



Costruzione di Macchine

A.A. 2018/2019

Prof. Luca Esposito

Lecture 2: Determinazione delle tensioni principali e Cerchi di Mohr – Criteri di resistenza – Coefficienti di sicurezza

Determinazione Tensioni principali

Siano σ_{ij} le componenti note del tensore nel generico sistema di riferimento (x,y,z) e l,m,n i coseni direttori incogniti del sistema di riferimento principale:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \sigma \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (\sigma_{xx} - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_{yy} - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_{zz} - \sigma) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Il sistema di equazioni trovato è omogeneo e ammette soluzione solo se il suo determinante è pari a zero (problema agli autovalori) :

$$\text{Det} \begin{vmatrix} (\sigma_{xx} - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_{yy} - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_{zz} - \sigma) \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

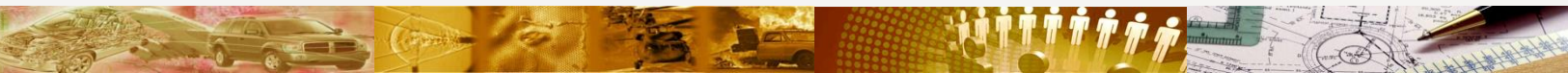
Equazione secolare

Con I indichiamo gli invarianti del tensore degli sforzi

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$I_2 = \sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{yy} \sigma_{zz} + \sigma_{zz} \sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$I_3 = \sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_{xx} \tau_{yz}^2 - \sigma_{yy} \tau_{zx}^2 - \sigma_{zz} \tau_{xy}^2$$



Risolvendo l'equazione secolare si ottengono 3 radici reali e distinte ognuna delle quali rappresenta lo sforzo in una direzione principale

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

Generico stato di sforzo triassiale

$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$: stato di sforzo monoassiale

$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$: stato di sforzo biassiale

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$: stato di sforzo idrostatico (sferico)

I coseni direttori definiscono le tre direzioni principali e si ottengono sostituendo gli sforzi principali nel sistema omogeneo tenendo conto che:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

L'equazione secolare ricavata è una cubica di cui non conosciamo soluzione in forma chiusa. Possiamo però trovare una forma chiusa al problema in base alle seguenti considerazioni:

$$[\sigma] = [\sigma_h] + [\sigma_D]$$

Decomposizione del tensore degli sforzi in parte sferica e parte deviatorica.

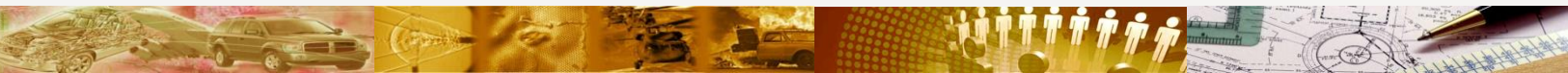
$$[\sigma_h] = \frac{\sigma_{kk}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{con } \sigma_{kk} = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

Responsabile di variazioni di volume

$$[\sigma_D] = [\sigma] - [\sigma_h]$$

Responsabile di variazioni di forma;
Il generico tensore di sforzo e la sua parte deviatorica hanno in comune le direzioni principali



Piuttosto che trovare le tensioni principali del tensore completo le trovo per la sola sua parte deviatorica

$$\sigma_D = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \frac{\sigma_{kk}}{3} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \frac{\sigma_{kk}}{3} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \frac{\sigma_{kk}}{3} \end{bmatrix}$$

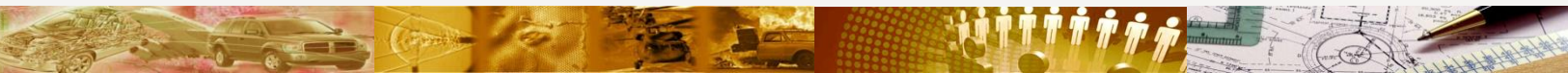
In questo caso il primo invariante è nullo e l'equazione secolare si semplifica

$$\tilde{\sigma}^3 + I_2^D \tilde{\sigma} - I_3^D = 0$$

$$\tilde{\sigma}_i = 2 \cos(\alpha_i) \left(-\frac{I_2^D}{3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

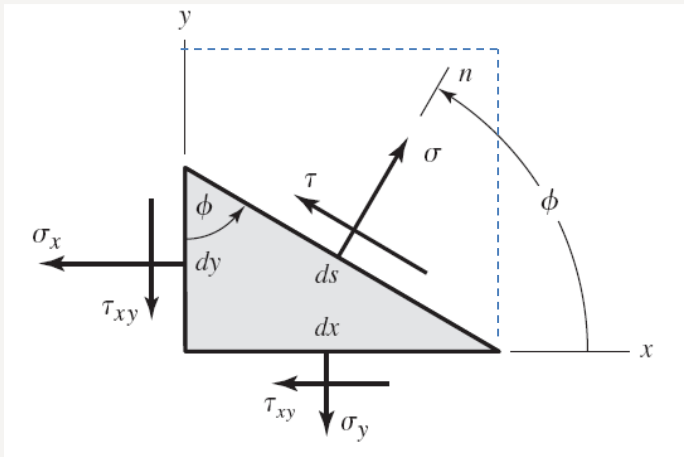
$$\sigma_i = \tilde{\sigma}_i + \frac{\sigma_{kk}}{3}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{I_3^D}{2} \left(-\frac{3}{I_2^D} \right)^{\frac{3}{2}} \right); \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{2}{3} \pi; \quad \alpha_3 = \alpha_1 - \frac{2}{3} \pi$$



Cerchi di Mohr

Quando lo stato di sforzo è piano, oppure è nota una delle tre tensioni principali, il problema della determinazione delle tensioni principali può essere affrontata con i cerchi di Mohr

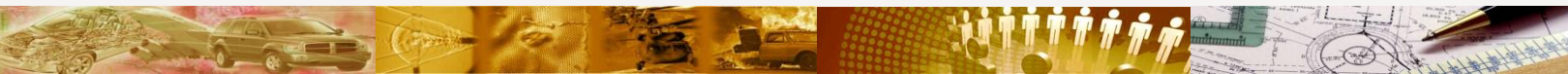


Sezioniamo un cubetto infinitesimo (dx, dy, dz) con un piano la cui normale n , ortogonale alla direzione principale nota, forma un angolo ϕ con x

Dall'equilibrio delle forze in direzione n e m posso esprimere σ e τ in funzione delle componenti non principali

$$\sigma dz \frac{dx}{\sin \phi} = \sigma_y dz dx \sin \phi + \sigma_x dz \frac{dx}{\tan \phi} \cos \phi + \tau_{xy} dz \frac{dx}{\tan \phi} \sin \phi + \tau_{xy} dz dx \cos \phi$$

$$\tau dz \frac{dx}{\sin \phi} = \tau_{xy} dz \frac{dx}{\sin \phi} \cos^2 \phi - \tau_{xy} dz dx \sin \phi + \sigma_y \sin \phi dz \frac{dx}{\sin \phi} \cos \phi - \sigma_x \cos \phi dz dx$$



Semplificando:

$$\sigma = \sigma_y \sin^2 \phi + \sigma_x \cos^2 \phi + 2\tau_{xy} \sin \phi \cos \phi$$

$$\tau = \tau_{xy} \cos^2 \phi - \tau_{xy} \sin^2 \phi - \sigma_y \sin \phi \cos \phi + \sigma_x \sin \phi \cos \phi$$

Si possono riscrivere sfruttando le formule trigonometriche di duplicazione

$$\sin 2\phi = 2 \sin \phi \cos \phi$$

$$\cos 2\phi = \cos^2 \phi - \sin^2 \phi$$

$$\cos^2 \phi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\phi)$$

$$\sin^2 \phi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\phi)$$

$$\sigma = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos 2\phi + \tau_{xy} \sin 2\phi$$

$$\tau = - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \sin 2\phi + \tau_{xy} \cos 2\phi$$

Equazioni di trasformazione per uno stato piano di tensione da un sistema di riferimento ad un altro (parametriche)

Quadrando e sommando le due equazioni:

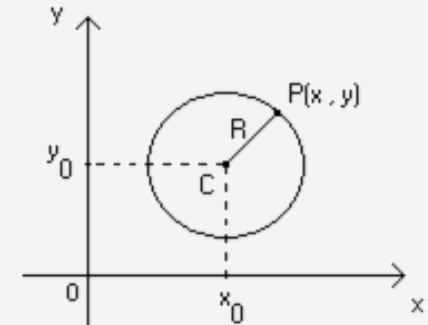
$$\left(\sigma - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$



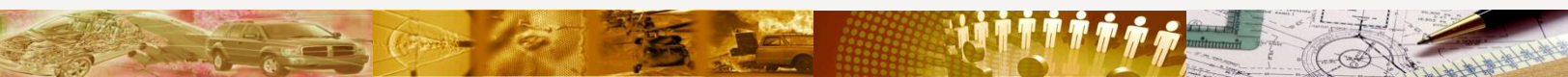
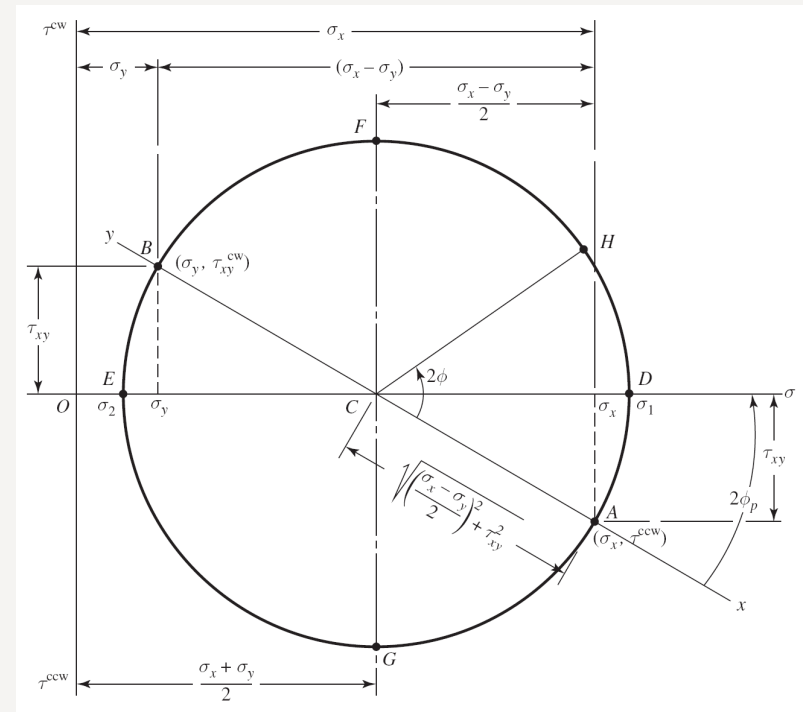
Nel piano σ, τ rappresenta una circonferenza:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

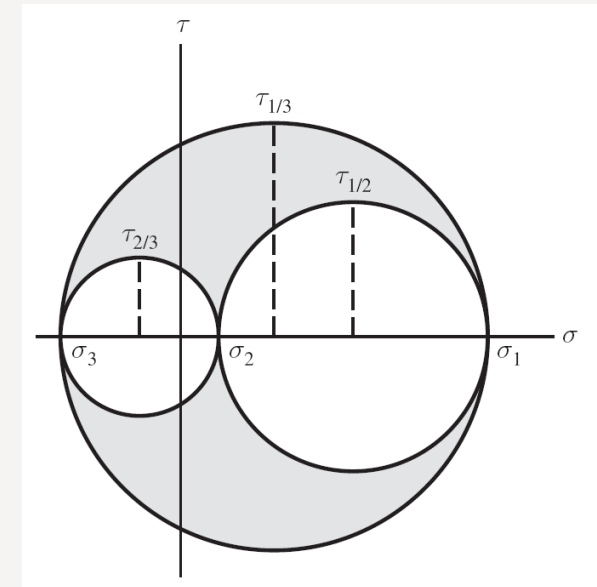
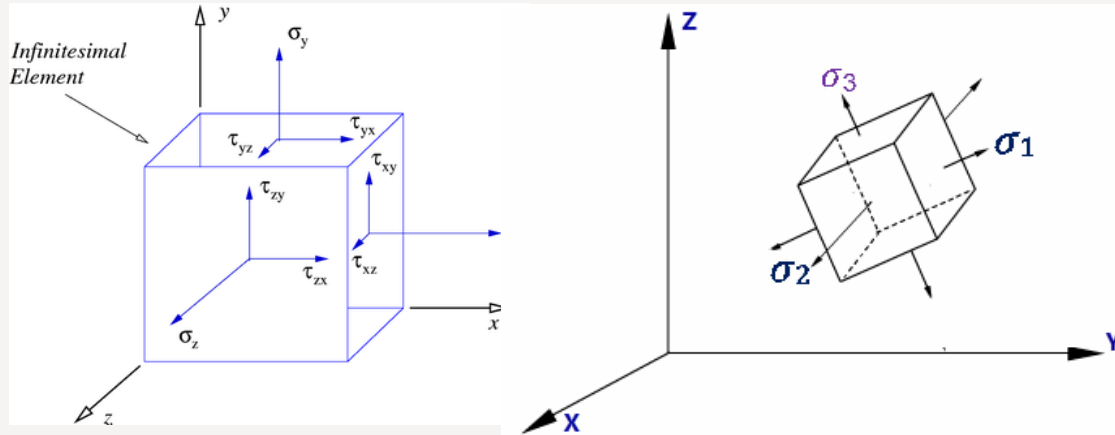
$$C = \left(\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right); 0 \right)$$



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

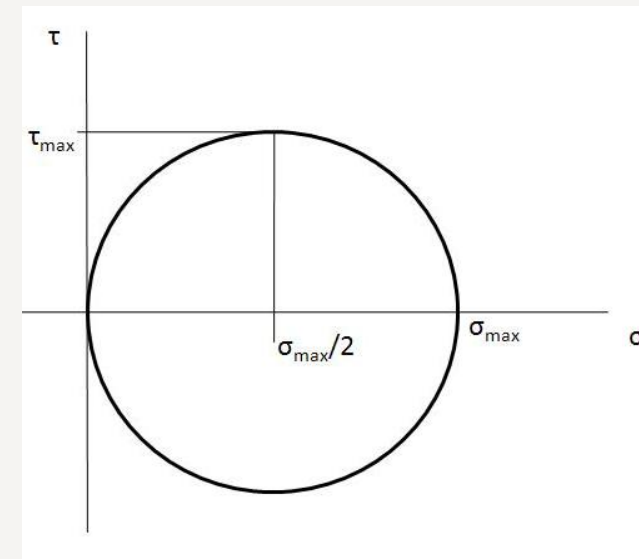
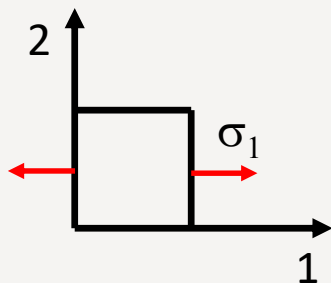


Per ogni coppia di tensioni principale è possibile disegnare un circolo di Mohr:



Attenzione alla individuazione della massima tensione tangenziale!

Per uno stato di sforzo uniassiale due circoli collassano in un punto $\sigma_3 = \sigma_2 = 0$



Costruzione grafica:

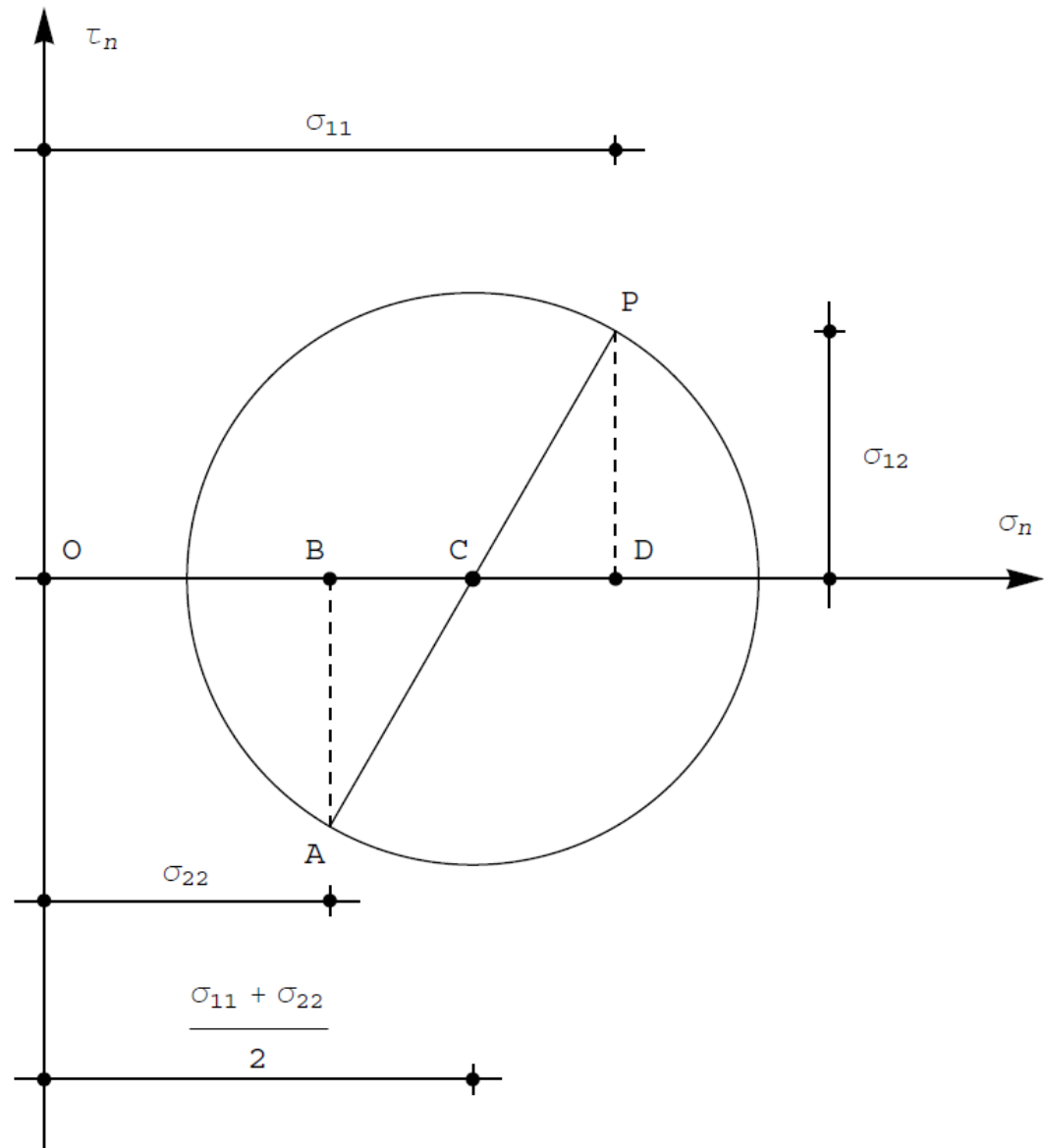
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Si individuano i punti B e D tali che:

$$\overline{OD} = \sigma_{11} \quad \overline{OB} = \sigma_{22}$$

Il punto C si trova come intermedio tra B e D;

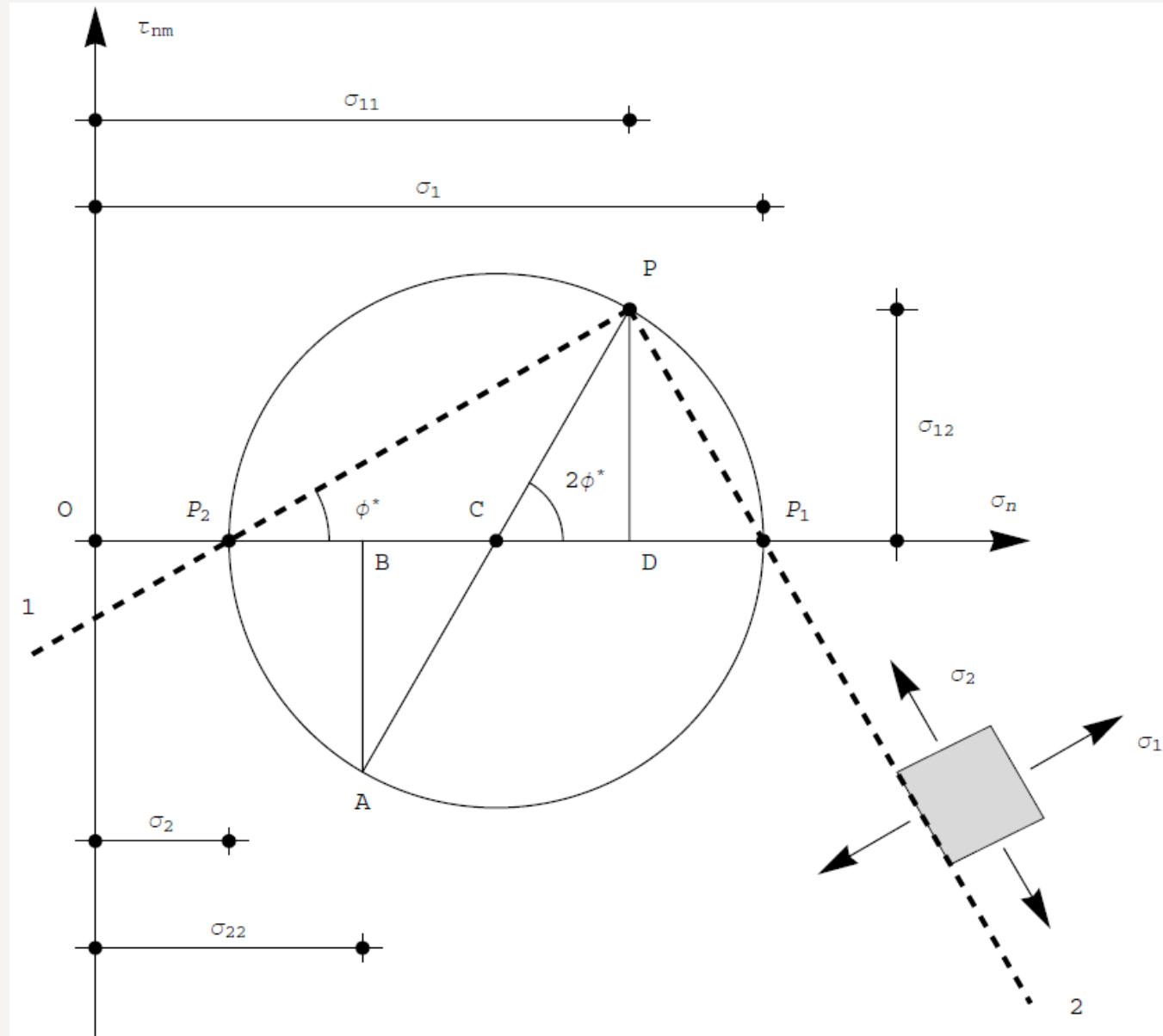
A partire da D si traccia il segmento $\overline{DP} = \sigma_{12}$



Determinazione delle tensioni e direzioni principali

I punti P1 e P2 individuano le due tensioni principali cercate;

Congiungendo il polo P con i punti P1 e P2 si individuano per via grafica le direzioni principali



Criteri di resistenza

Necessità di una scrittura di equivalenza per confrontare un generico stato di sforzo triassiale con una condizione monoassiale di riferimento

$$\sigma_{eq} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \text{ or } f(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz},)$$

In genere si conoscono (sperimentazione) condizioni limite per sollecitazioni semplici quindi una scrittura di equivalenza serve ad individuare la medesima condizione di criticità per stati di sforzi complessi.

- Materiali e condizioni al contorno diverse inducono modalità di cedimento diverse
- Esistono criteri di resistenza che sono più o meno idonei a seconda del tipo di cedimento (criteri allo snervamento per materiali duttili; criteri di frattura per materiali fragili)

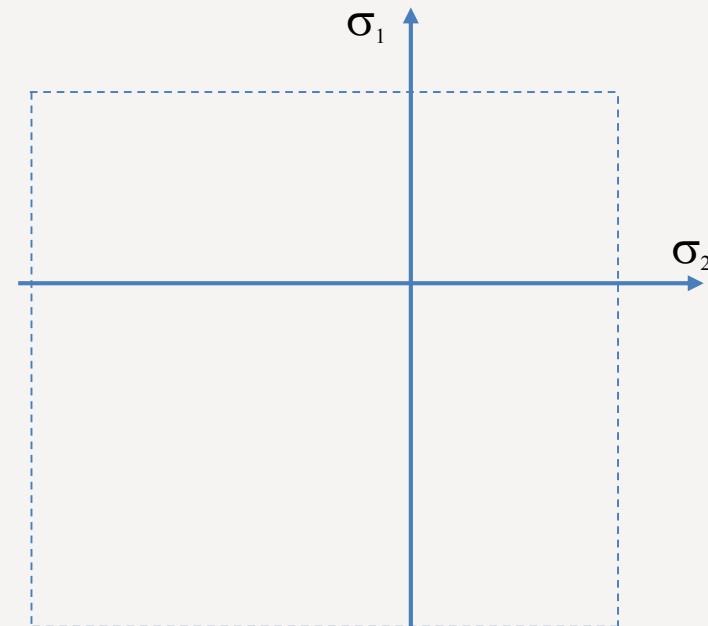
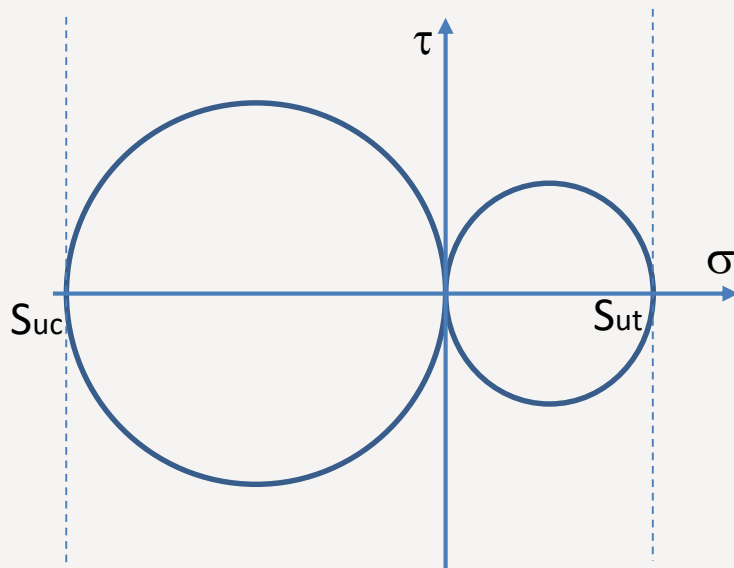


Criterio della massima tensione normale

Il cedimento avviene ogni qual volta la tensione di trazione massima supera la resistenza uniaassiale a trazione oppure la tensione di compressione massima supera la resistenza uniaassiale a compressione

$$\text{rottura: } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \geq S_{ut} \\ \sigma_3 \leq -S_{uc} \end{array} \right\}$$

$$\sigma_{eq} = \max \{ |\sigma_1|, |\sigma_3| \}$$



Criterio della massima tensione tangenziale (Tresca)

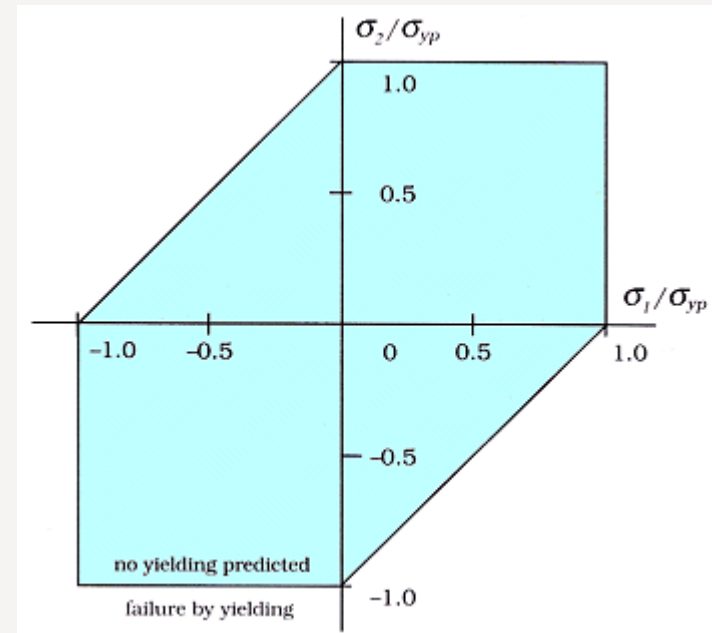
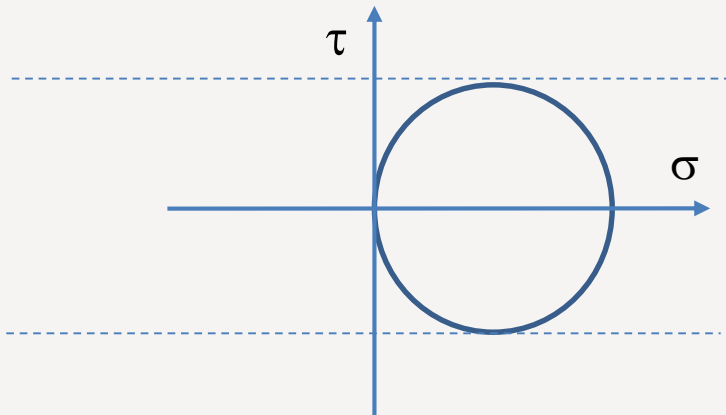
Lo snervamento in qualsiasi punto avviene quando la massima tensione tangenziale raggiunge o supera la massima tensione tangenziale che provoca lo snervamento nel caso uniassiale (di riferimento per lo stesso materiale)

$$\tau_{\max} (\text{uniassiale}) = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{\sigma_y}{2}$$

$$\tau_{\max} (\text{triassiale}) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$



$$\sigma_1 - \sigma_3 \geq \sigma_y \quad \sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3$$



Criterio di von Mises (massima energia distorsionale)

Lo snervamento avviene quando l'energia di distorsione per unità di volume nel generico punto raggiunge o supera l'energia di distorsione necessaria allo snervamento nel caso uniassiale (di riferimento per lo stesso materiale)

Si considera la sola parte deviatorica del tensore degli sforzi e si calcola l'energia di deformazione

$$[\sigma_D] = [\sigma] - [\sigma_h]$$

$$U_D = U_T - U_h$$

$$U_h = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{kk}}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \frac{1}{6} \sigma_{kk} \left(3 \cdot \left(\frac{\sigma_{kk}}{3E} - \frac{\nu}{E} \left(2 \cdot \frac{\sigma_{kk}}{3} \right) \right) \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{1-2\nu}{E} \right) \sigma_{kk}^2$$

$$U_t = \frac{1}{2} \sigma_1 \left(\frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_2 + \sigma_3) \right) + \frac{1}{2} \sigma_2 \left(\frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_3) \right) + \frac{1}{2} \sigma_3 \left(\frac{\sigma_3}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2) \right) =$$

$$= \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \right]$$



$$U_D = U_t - U_h = \left[\frac{1}{2E} - \frac{1}{6} \left(\frac{1-2\nu}{E} \right) \right] \sigma_1^2 + \dots + \left(-\frac{2\nu}{2E} - \frac{2}{6} \left(\frac{1-2\nu}{E} \right) \right) \sigma_1 \sigma_2 + \dots =$$

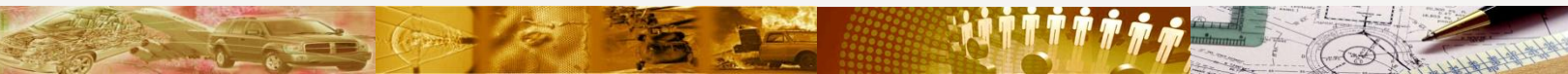
$$= \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2 \sigma_3)$$

Condizione limite uniassiale: $U_D(\text{uniassiale}) = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_y^2)$

➔ $\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2 \sigma_3}$

In un sistema di riferimento
non principale:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{xx} \sigma_{yy} - \sigma_{xx} \sigma_{zz} - \sigma_{yy} \sigma_{zz} + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$



Confronto tra i criteri di resistenza (conservatività)

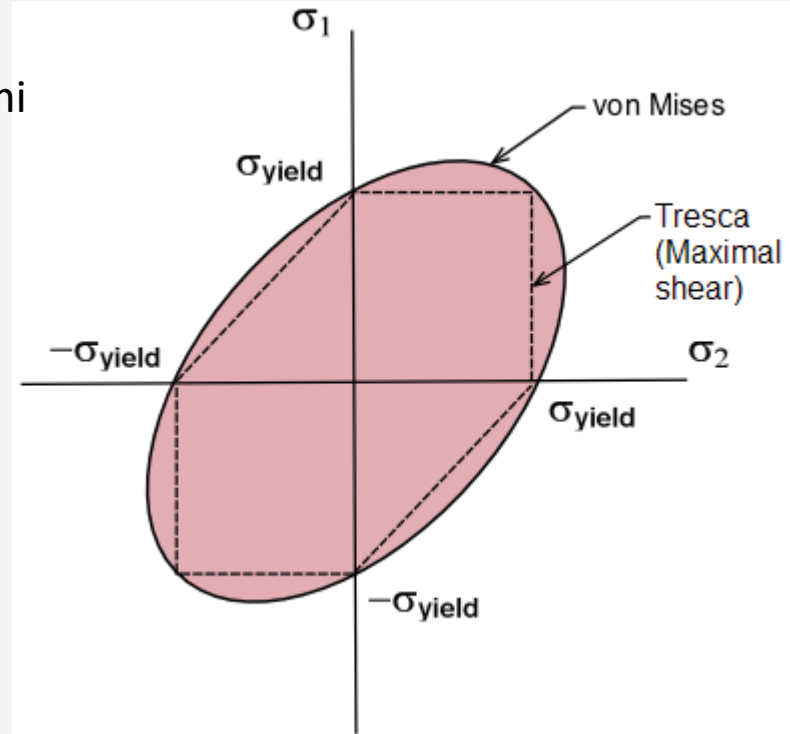
Un criterio è più conservativo se in progettazione mi garantisce un maggior margine di sicurezza

Più è ristretta l'area che delimita le combinazioni ammissibile di sforzi nel piano σ_1, σ_2 più il criterio è conservativo

Esempio di taglio puro con i tre criteri:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{1,2} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \tau_{xy}$$



$$\sigma_{eq}^R = \tau$$

$$\sigma_{eq}^T = 2\tau$$

$$\sigma_{eq}^{vM} = \sqrt{3}\tau$$

Coefficiente di sicurezza

Ci consente di valutare la lontananza della condizione limite e quindi di stimare il margine di sicurezza in fase di verifica di un componente o una struttura

In progettazione è anche un modo per tenere in considerazione delle incertezze, della non aderenza del modello alla realtà e della nostra «ignoranza»

$$n = \frac{\sigma_L}{\sigma_{eq}}$$

$$\sigma_{amm} = \frac{\sigma_L}{n}$$

Esempio di taglio puro con i tre criteri:

$$\sigma_{eq}^R = \tau = 100$$

$$\sigma_y = 400$$

$$\sigma_{eq}^T = 2\tau = 200$$

$$\sigma_{eq}^{vM} = \sqrt{3}\tau = 173.2$$

$$n = \frac{\sigma_L}{\sigma_{eq}} = \frac{\sigma_y}{\sigma_{eq}}$$

$$n = \begin{cases} n^R = 400/100 = 4 \\ n^T = 400/200 = 2 \\ n^{vM} = 400/173.2 = 2.3 \end{cases}$$