

Esercizi moto in due dimensioni

Prof. Francesco Di Capua

a.a. 2018/19

....lezione precedente: moto in due
dimensioni

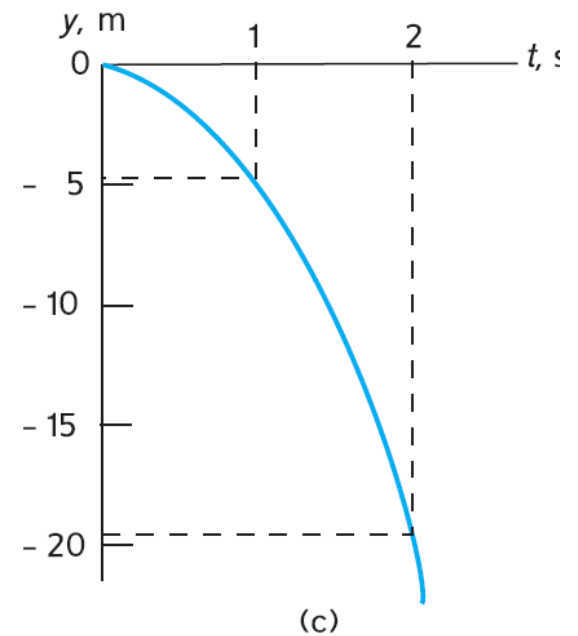
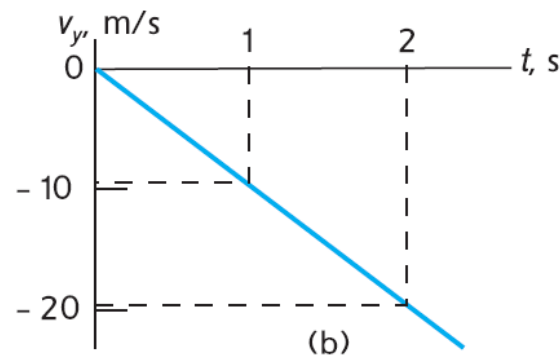
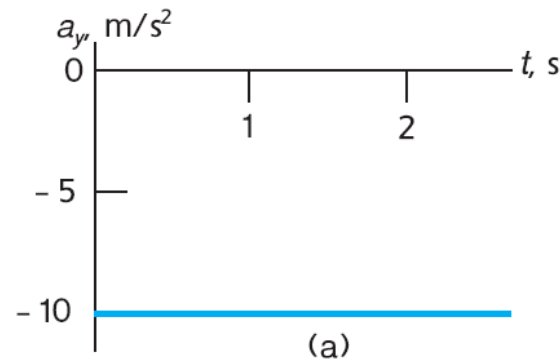
Moto in caduta libera

- Per descrivere il moto in caduta libera si scelga l'asse delle y orientato verso l'alto

$$\vec{a} = -g\hat{j} \quad a_y = -g$$

$$v_y = v_{y0} - gt$$

$$y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$$



Moto in due dimensioni con accelerazione costante: formule riassuntive

$$\vec{v}_f = (v_{xi} + a_x t)\hat{i} + (v_{yi} + a_y t)\hat{j}$$

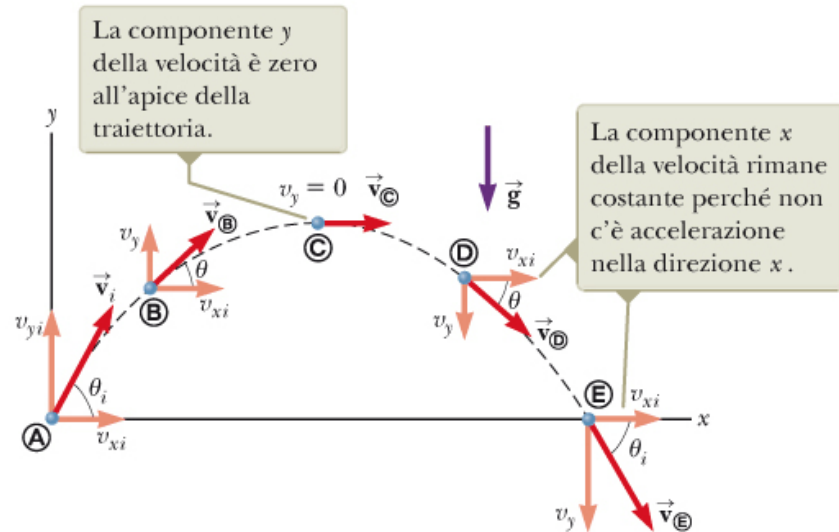
$$\vec{v}_f = (v_{xi}\hat{i} + v_{yi}\hat{j}) + (a_x\hat{i} + a_y\hat{j})t = \vec{v}_i + \vec{a}t$$

$$\vec{r}_f = (x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2)\hat{i} + (y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2)\hat{j}$$

$$\vec{r}_f = (x_i\hat{i} + y_i\hat{j}) + (v_{xi}\hat{i} + v_{yi}\hat{j})t + \frac{1}{2}(a_x\hat{i} + a_y\hat{j})t^2$$

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a} t^2$$

Moto del proiettile



Consideriamo un proiettile lanciato all'origine con una velocità che ha componenti diverse da zero sia sull'asse x che y

Detto θ_i l'angolo che il vettore velocità ha con l'asse delle x si ha:

$$v_{xi} = v_i \cos \theta_i \quad v_{yi} = v_i \sin \theta_i$$

Il proiettile una volta lanciato è sottoposto alla sola accelerazione di gravità diretta lungo y

$$a_{xi} = 0 \quad a_{yi} = -g$$

Le equazioni del moto sono:

$$v_{xf} = v_{xi} = v_i \cos \theta_i = \text{costante}$$

$$v_{yf} = v_{yi} - gt = v_i \sin \theta_i - gt$$

$$x_f = x_i + v_{xi}t = (v_i \cos \theta_i)t$$

$$y_f = y_i + v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_i \sin \theta_i)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Il moto lungo l'asse x è un moto unidimensionale con velocità costante.

Il moto lungo y è un moto unidimensionale con accelerazione costante

Moto del proiettile: altezza massima

Calcolo dell'altezza massima

Imponendo che nel punto più alto si $v_y=0$

$$v_{y(A)} = v_i \sin \theta_i - g t_{(A)} = 0$$

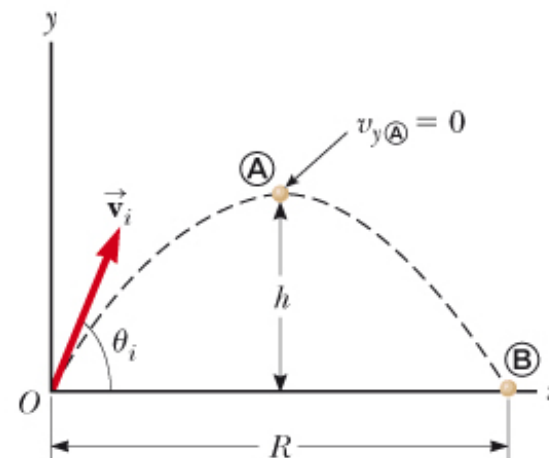
$$t_{(A)} = \frac{v_i \sin \theta_i}{g}$$

Sostituendo nella legge oraria della componente y

$$y_f = y_i + v_{yi} t - \frac{1}{2} g t^2 = (v_i \sin \theta_i) t - \frac{1}{2} g t^2 = (v_i \sin \theta_i) \left(\frac{v_i \sin \theta_i}{g} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_i \sin \theta_i}{g} \right)^2$$

$$y_f = h = \frac{v_i^2 \sin^2 \theta_i}{2g}$$

Nel moto del proiettile l'altezza massima aumenta se si aumenta la velocità iniziale e se si aumenta l'angolo iniziale di incidenza



Moto del proiettile: gittata

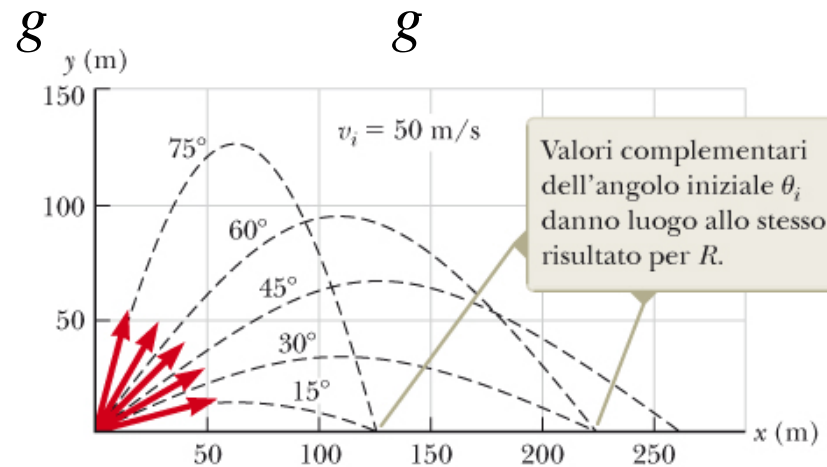
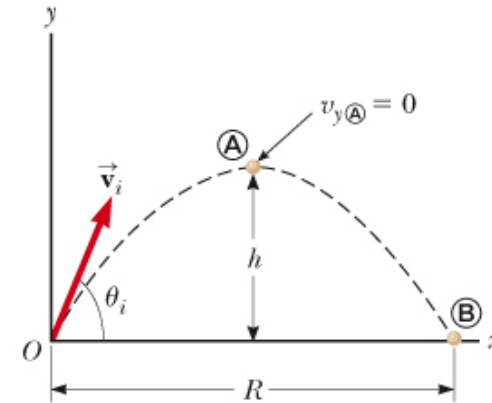
Calcolo della gittata R

Usando $t_B = 2t_A$ (che si ottiene dalla relazione su y_B in funzione del tempo)

$$R = (v_i \cos \theta_i) t_B = (v_i \cos \theta_i) 2t_A$$

$$R = (v_i \cos \theta_i) t_B = (v_i \cos \theta_i) \frac{2v_i \sin \theta_i}{g} = \frac{2v_i^2 \sin \theta_i \cos \theta_i}{g}$$

$$R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g}$$



$$R_{MAX} \Rightarrow \sin 2\theta_i = 1 \Rightarrow 2\theta_i = 90^\circ \Rightarrow \theta_i = 45^\circ$$

La gittata è massima quando l'angolo di lancio è di 45°

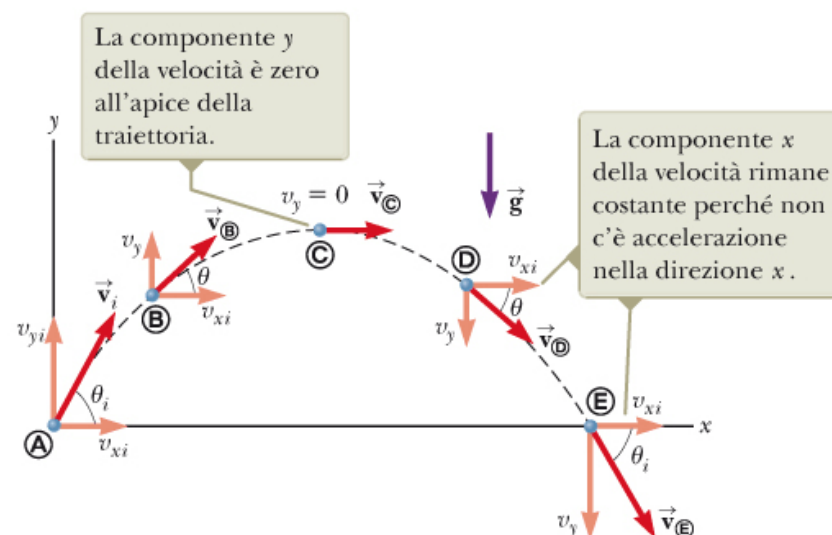
N.B. : I valori degli angoli θ e $90-\theta$ danno luogo allo stesso valore di gittata

Equazione del cammino

$$t = \frac{x_f}{v_i \cos \theta_i}$$

$$y_f = (v_i \sin \theta_i) t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y_f = (\tan \theta_i) x_f - \left(\frac{g}{2 v_i^2 \cos^2 \theta_i} \right) x_f^2$$



Equazione della parabola passante per l'origine

Esercizi

Atterraggio aereo

Un aereo atterra alla velocità di 100 m/s per fermarsi può decelerare al massimo di 5 m/s²



Qual'è l'intervallo di tempo minimo necessario a fermarsi?

Se il pilota riesce a decelerare con -5m/s² per tutta la durata dell'atterraggio e questa accelerazione è costante:

L'aereo si ferma quando V_f diventa zero

$$v_f = v_i + at = 0 \quad \Rightarrow \quad 100(m/s) - 5(m/s^2)t = 0$$
$$t = \frac{100}{5} s = 20s$$

L'aereo può atterrare su una piccola isola con una pista lunga 800m?

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad (x - x_0) = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2a}$$

$$x - x_0 = \frac{0 - (100m/s)^2}{2(-5m/s^2)} = \frac{10000}{10} m = 1000m$$

**NON PUO
ATTERRARE!!!**

Esercizio moto verticale

Durante un incontro di baseball una palla colpita con la mazza viaggia verso l'alto. La palla impiega 3.0 s a raggiungere la massima altezza prima di cominciare a scendere

Qual'è la velocità iniziale data alla palla?

La palla nel punto più alto ha velocità nulla

$$v_f = v_i - gt = 0 \quad \Rightarrow \quad v_i = gt = 9.81(m/s^2) \times 3s = 29.4m/s$$

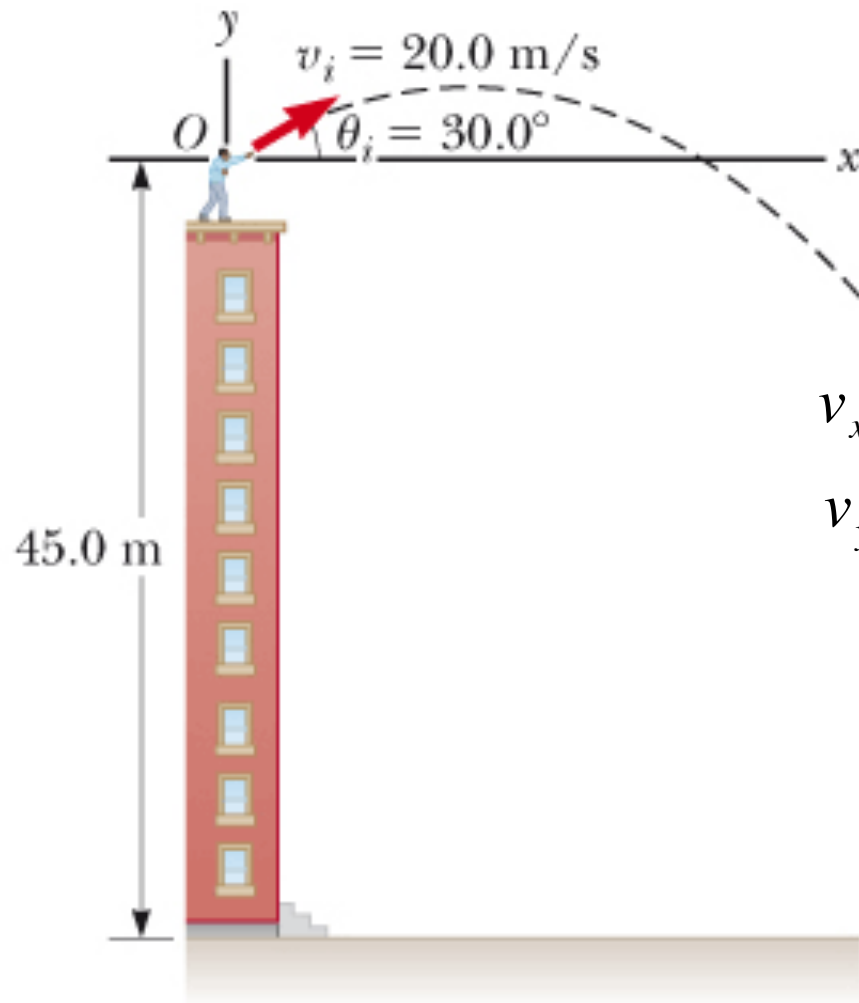
Qual'è la massima altezza raggiunta?

$$y_f = y_i + v_{yi}t_f - \frac{1}{2}gt_f^2 = 0 + (29.4)(3) - \frac{1}{2}(9.81)(3)^2 = 44.1m$$

...oppure

$$h_{\max} = \frac{v_i^2}{2g} = \frac{(29.4)^2}{2 \times 9.81} = 44.1m$$

Esempio: Lancio di un oggetto



Consideriamo una pietra scagliata verso l'alto con un angolo di 30° rispetto all'orizzontale e con una velocità di 20 m/s . L'edificio è alto 45 m

Per quanto tempo la pietra rimane in volo?

$$v_{xi} = v_i \cos \theta_i = (20 \text{ m/s}) \cos(30^\circ) = 17.3 \text{ m/s}$$

$$v_{yi} = v_i \sin \theta_i = (20 \text{ m/s}) \sin(30^\circ) = 10 \text{ m/s}$$

$$y_f = y_i + v_{yi} t_f - \frac{1}{2} g t_f^2$$



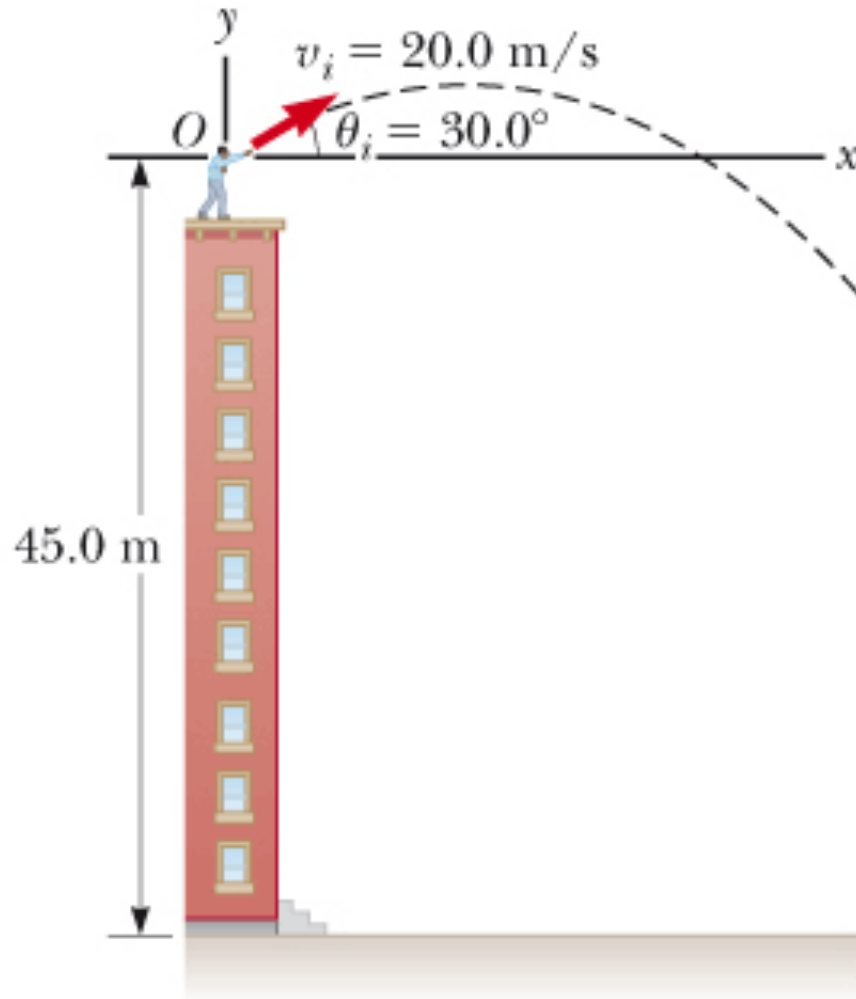
$$-45.0 \text{ m} = 0 + (10 \text{ m/s}) t_f - \frac{1}{2} g t_f^2$$



trovare

t_f

Lancio di un oggetto



Velocità della pietra prima di colpire il suolo

$$v_{yf} = v_{yi} - gt_f$$



$$v_{yf} = v_i \sin(\theta_i) - gt_f$$

$$v_{xf} = v_{xi} = v_i \cos(\theta_i)$$

$$v_f = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2}$$

...un altro esempio

Lancio di un pacco da un aereo.

L'aereo vola orizzontalmente a 40 m/s ad un'altezza di 100 m.

A che distanza verrà lanciato il pacco rispetto alla posizione in cui è lanciato?

$$x_f = x_i + v_{xi}t_f = 0 + (40\text{ m/s})t_f$$

$$y_f = y_i + v_{yi}t_f - \frac{1}{2}gt_f^2$$

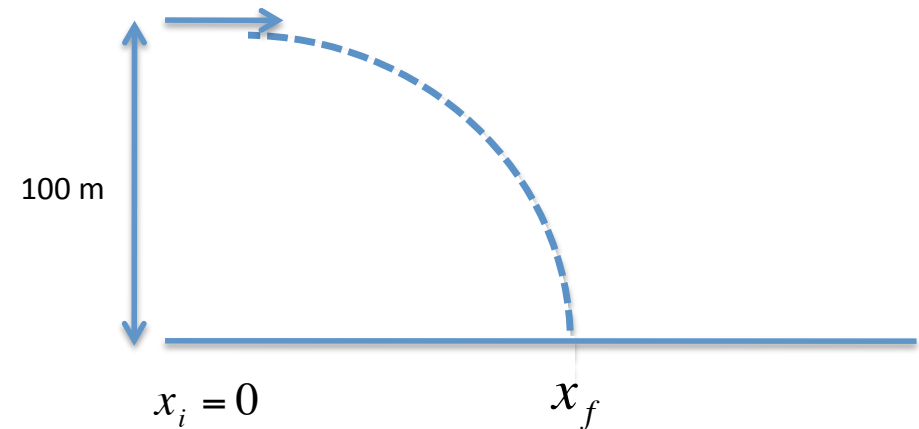


$$-100\text{ m} = 0 + 0 - \frac{1}{2}gt_f^2$$

trovare



t_f x_f



Lancio del giavellotto

Un atleta lancia un giavellotto ad una distanza di 80.0 m in una Olimpiade tenuta all'equatore ($g=9.78 \text{ m/s}^2$). Successivamente le Olimpiadi si tengono al Polo ($g=9.83 \text{ m/s}^2$). Imprimendo la stessa velocità iniziale a che distanza lancerà il giavellotto?

$$R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g}$$

$$R_{eq} = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g_{eq}} = 80.0 \text{ m}$$

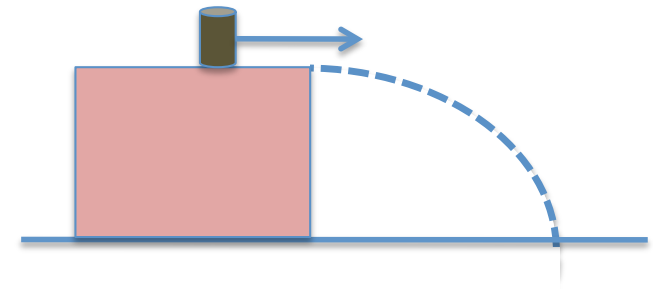
$$R_{Polo} = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g_{polo}}$$

$$\frac{R_{Polo}}{R_{eq}} = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g_{polo}} \frac{g_{eq}}{v_i^2 \sin 2\theta_i} = \frac{g_{eq}}{g_{Polo}}$$

$$R_{Polo} = \frac{g_{eq}}{g_{Polo}} R_{eq} = \frac{9.78 \text{ m/s}^2}{9.83 \text{ m/s}^2} 80 \text{ m} = 79.6 \text{ m}$$

Lancio della birra

Un boccale di birra viene lanciato su un bancone, il boccale cade a terra ad una distanza di 1.40 m dalla base del banco. L'altezza del bancone è 0.860 m



Calcolare la velocità finale del boccale prima dell'impatto a terra (e la sua direzione)

Calcolare la velocità iniziale del boccale all'uscita dal bancone

Condizioni iniziali:

$$X_i=0$$

$$Y_i=0$$

$$X_f=1.40 \text{ m}$$

$$Y_f=-0.860 \text{ m}$$

$$V_{yi}=0$$

$$a_x=0$$

$$a_y=-g=-9.80 \text{ m/s}^2$$

$$y_f = y_i + v_{yi}t_f - \frac{1}{2}gt_f^2$$

$$-0.860 \text{ m} = 0 + 0 - \frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2)t_f^2 \quad t_f ?$$

$$x_f = x_i + v_{xi}t_f \quad \Rightarrow \quad 1.40 \text{ m} = 0 + v_{xi}t_f \quad v_{xi} ?$$

$$v_{xf} = \frac{x_f}{t_f} = v_{xi}$$

$$v_{yf} = v_{yi} - \frac{1}{2}gt_f^2 \quad \Rightarrow \quad v_f = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2}$$

Altro esempio: Il calciatore

Un calciatore calcia il pallone da una distanza di 36 m dalla porta

Il pallone lascia il suolo con un angolo di 53° rispetto all'orizzontale ed ha una velocità di 20 m/s

Riesce il pallone ad entrare in porta (altezza traversa 3.05 m)
A che distanza passa dalla traversa?



Condizioni iniziali:

$$X_i=0 ; Y_i=0$$

$$X_f=36 \text{ m}$$

$$v_{xi}=v\cos\theta; v_{yi}=v\sin\theta$$

$$a_x=0$$

$$a_y=-g=-9.80 \text{ m/s}^2$$

$$x_f = x_i + v_{xi}t_f \quad \Rightarrow \quad 36\text{m} = 0 + v_{xi}t_f \quad \Rightarrow \quad t_f$$

$$y_f = y_i + v_{yi}t_f - \frac{1}{2}gt_f^2 \quad \Rightarrow \quad y_f = 0 + v_{yi}t_f - \frac{1}{2}gt_f^2 \quad \Rightarrow \quad y_f$$

Il calciatore (2)

Il pallone passa alto sulla traversa nella sua fase ascendente o discendente

Alla massima altezza

$$v_{yf} = 0 = v_{yi} - gt_{\max h} \quad \rightarrow \quad v_{yf} = 0 = v_i \sin \vartheta_i - gt_{\max h}$$

$$t_{\max h} = \frac{20 \sin(53^\circ)}{9.8} = 1.63s$$

$$t_{\max h} = \frac{v_i \sin \vartheta}{g}$$

Se $t_f > t_{\max h}$ allora il pallone supera la traversa in fase di discesa

Risolvere

Moto circolare uniforme

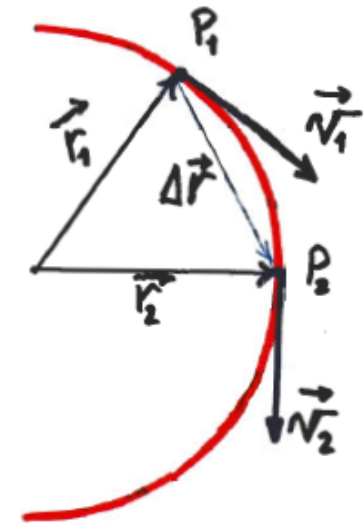
- Un moto può essere vincolato a compiersi lungo una circonferenza
- Se vengono percorsi archi di circonferenza uguali in tempi uguali si parla di moto circolare uniforme
- Il modulo della velocità è costante



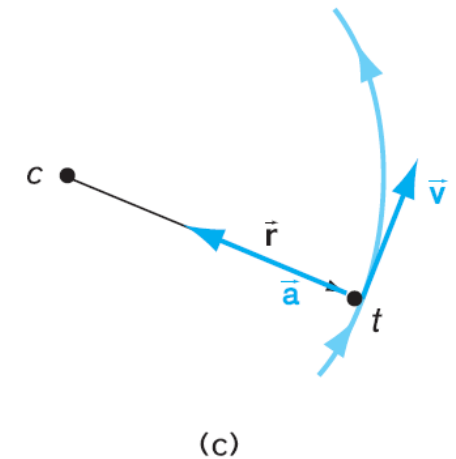
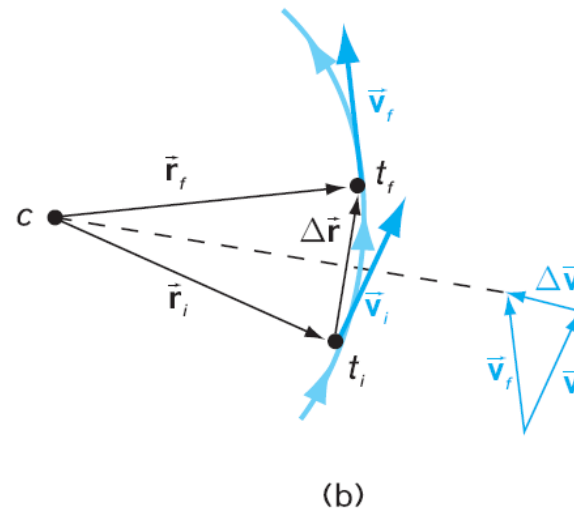
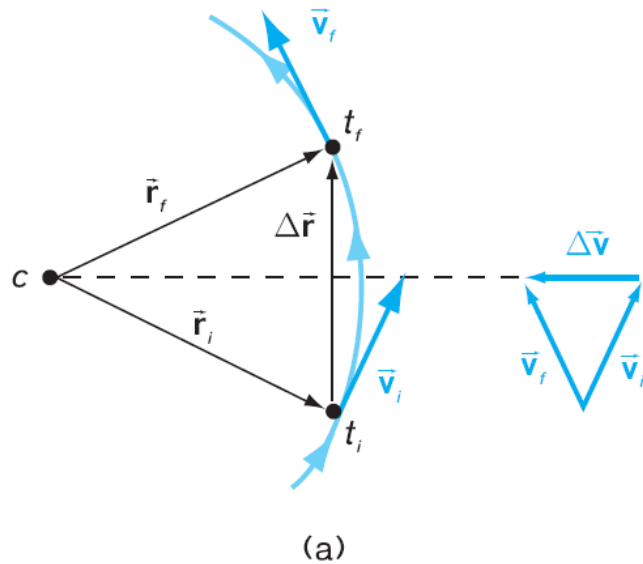
Moto circolare uniforme

- Moto di un punto materiale che si muove lungo una circonferenza ad una velocità costante
- L'oggetto si muove con velocità costante in modulo ma la direzione del vettore velocità cambia continuamente
- Il vettore velocità nel moto circolare uniforme è sempre tangente ad una circonferenza.
- Accelerazione diretta verso il centro dovuta alla variazione nel tempo della direzione della velocità
- Detto T il tempo per percorrere l'intera circonferenza di raggio r si ha che il modulo della velocità vale

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$



Moto circolare uniforme

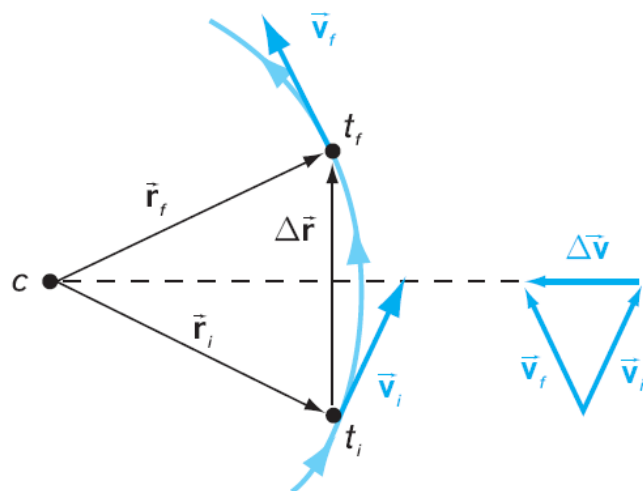


La direzione di $\mathbf{v}$ è sempre perpendicolare ad $\mathbf{r}$, per cui anche $\Delta \mathbf{v}$ è perpendicolare a $\Delta \mathbf{r}$ e **diretto verso il centro della circonferenza**

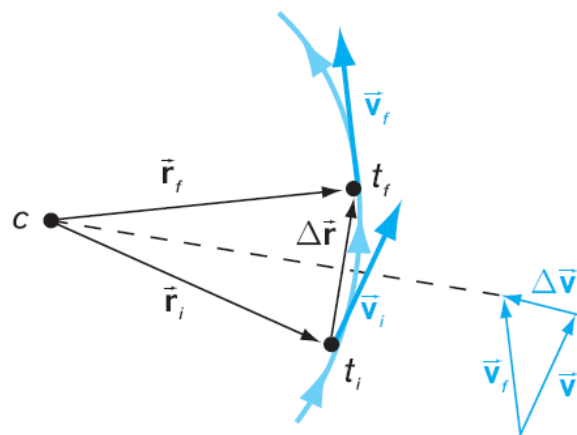
Nota che $\Delta \mathbf{v}$ coincide con la direzione dell'accelerazione $\mathbf{a}$ (la quale quindi è anch'essa diretta verso il centro)

$$\vec{a}_{ist} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$$

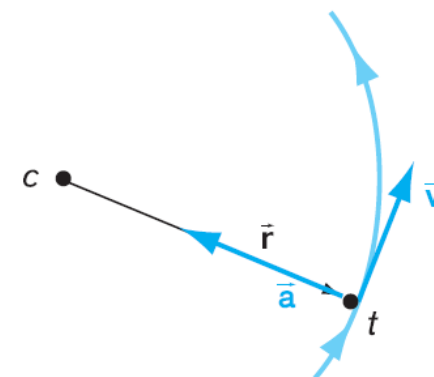
Moto circolare uniforme



(a)

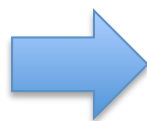


(b)



(c)

I triangoli formati dai vettori posizione e velocità (iniziale e finale) sono dei triangoli simili: l'angolo tra due lati è uguale e rapporto tra le lunghezze dei lati uguale



$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r}$$

$$\Delta v = v \frac{\Delta r}{r}$$

$$\vec{a}_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} \hat{r}$$

Accelerazione centripeta:
l'accelerazione ha la stessa direzione di Δv che è diretta verso il centro

Esempio

- Un satellite della Terra si muove su un'orbita circolare con velocità costante in modulo

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(2\pi R/T)^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

- Il satellite ha un'altezza $h=200$ km sopra la superficie ed ha periodo $T=147$ h. Determinare la sua accelerazione centripeta

$$R = R_T + h = 6.37 \times 10^6 m + 0.2 \times 10^6 m = 6.57 \times 10^6 m$$

$$a_c = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2 (6.57 \times 10^6 m)}{(147 \times 3600 s)^2} = 9.22 m/s^2$$

Velocità angolare

- Nel moto circolare uniforme si utilizza spesso il concetto di velocità angolare
- Al variare del tempo cambia il vettore posizione e cambia l'angolo del vettore rispetto ad un riferimento fisso
- L'angolo al centro e l'arco di circonferenza sono legati dalla relazione

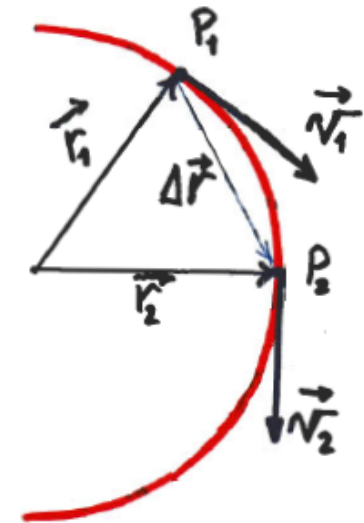
$$\Delta s = R \Delta \varphi$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = R \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \quad \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \quad v = R \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{R} = \omega$$

Velocità angolare: indica di quanto varia l'angolo sotteso dall'arco di circonferenza in funzione del tempo

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$



Accelerazione tangenziale e radiale

- Il moto di una particella lungo una traiettoria curva avviene in maniera arbitraria sia con variazioni del modulo della velocità che con variazioni della direzione della velocità.
- In ogni punto la velocità è la tangente alla traiettoria

$$\vec{v} = v\hat{t}$$

$$\vec{a} = \frac{d(v\hat{t})}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + v\frac{d\hat{t}}{dt}$$

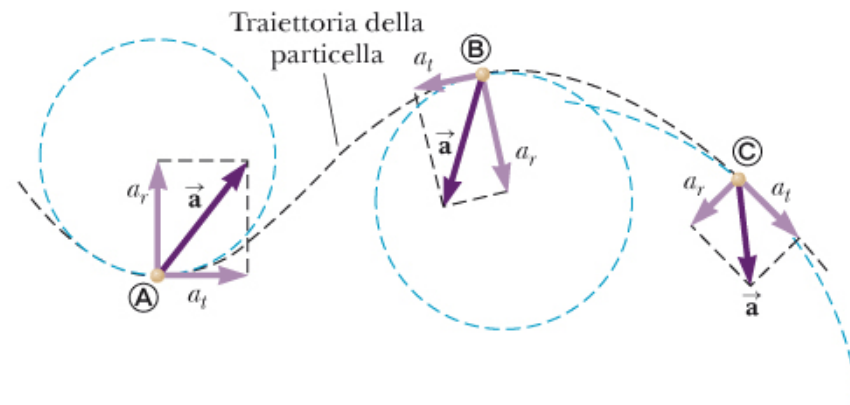
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$$

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\hat{t}$$

$$\vec{a}_r = v\frac{d\hat{t}}{dt} = v\left(\frac{v}{\rho}\right)\hat{n} \quad \text{n perpendicolare a t}$$

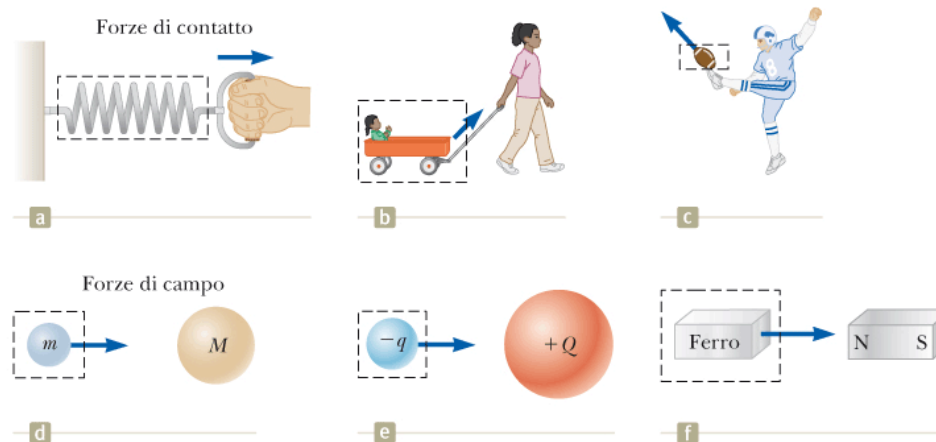
$$\vec{a}_r = -a_c = -\frac{v^2}{\rho}$$

- In generale l'accelerazione ha una componente tangenziale (tangente alla traiettoria) ed una componente radiale diretta verso il centro



Concetto di Forza

- Associata ad un cambiamento dello stato di quiete o di moto rettilineo di un oggetto
- Si tratta di un'azione in grado di modificare lo stato di moto ed è misurabile proprio misurando come il moto di un corpo si discosta dal moto rettilineo uniforme
- Una spinta o un'attrazione oltre ad una intensità hanno una direzione ed un verso
- La Forza è una grandezza vettoriale
- Un corpo anche se sottoposto ad un insieme di forze può restare in quiete quando le forze presenti si bilanciano
- Forze di contatto e campi di forza (azioni a distanza)

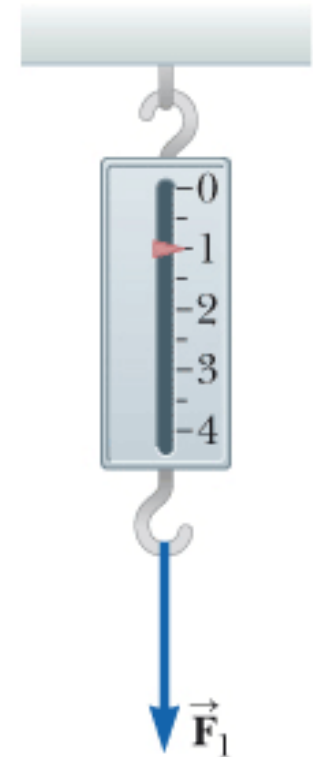


Massa

- La massa di un corpo è una misura della sua resistenza alle variazioni di velocità: quanto più un corpo ha massa tanto più è difficile metterlo in moto
- La massa è una proprietà intrinseca di un corpo
- La massa è una grandezza scalare ed additiva

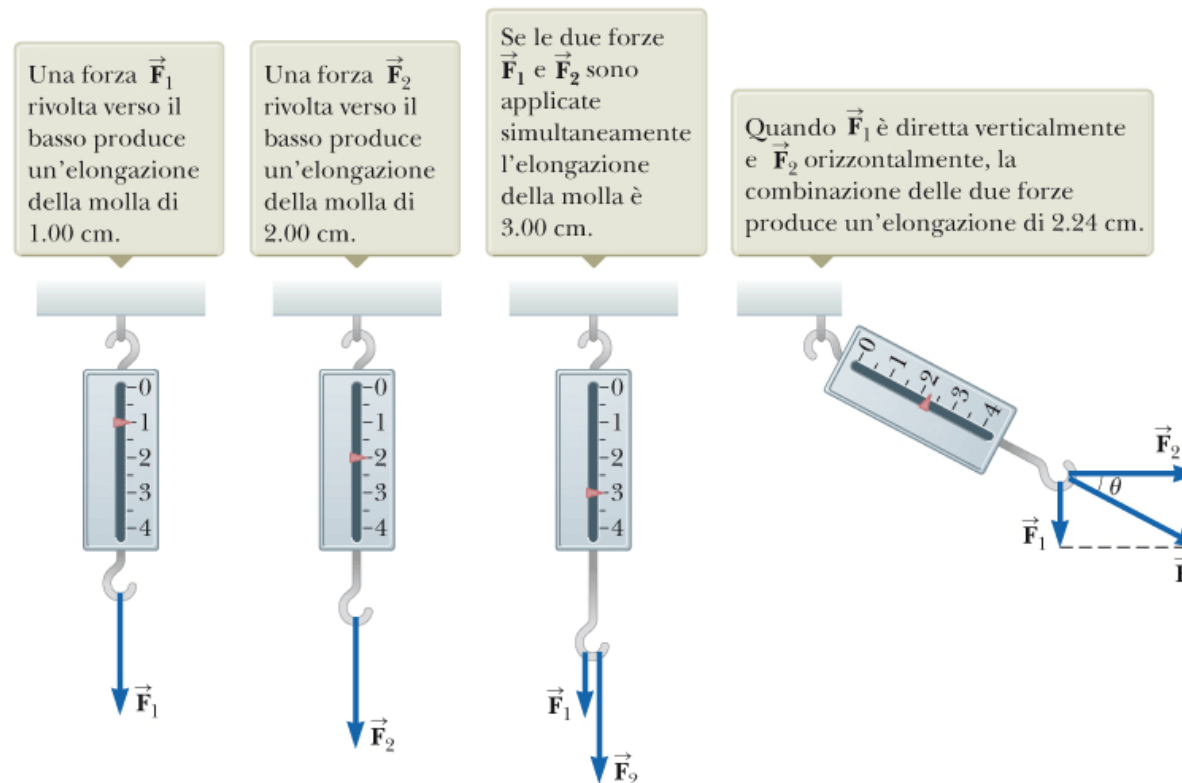
Definizione operativa

- Per misurare una forza si può usare la deformazione lineare di un corpo che sia sottoposto ad una certa forza
- Un oggetto di questo tipo si dice che segue la legge di Hooke (dinamometro)
- Se si applica alla molla una certa forza si ottiene un certo allungamento, con una forza doppia si ottiene un allungamento doppio



Principio di sovrapposizione

- L'applicazione simultanea di più forze produce effetti che si compongono vettorialmente
- Se due o più forze agiscono su un corpo simultaneamente è come se sul corpo agisse una singola forza uguale alla somma vettoriale delle singole forze



Primo principio della dinamica

- Galileo fu il primo ad affermare:” Una volta comunicata ad un corpo una qualsiasi velocità, questa sarà invariabilmente mantenuta fino a quando non ci saranno cause esterne ritardanti.”
- Se su un corpo non agisce alcuna forza, la velocità del corpo non può cambiare, ossia il corpo non può accelerare
- Lo stato naturale di un corpo è il moto rettilineo
- **Un corpo in quiete rimane in quiete a meno che su di esso non agiscano forze esterne. Un corpo in moto continua il suo moto con velocità costante in linea retta, a meno che su di esso non agiscano forze esterne.**

Primo principio della dinamica

- Due o più forze possono comporsi dando luogo ad una forza risultante

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots$$

- Se una forza risultante che agisce su un corpo è nulla, allora l'accelerazione del corpo è nulla

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = 0$$

Verifiche sperimentali principio d'inerzia

