

Capitolo 3

Esempi di Modelli di Programmazione Lineare

Le applicazioni della Ricerca Operativa che possono essere formulate mediante l'uso di modelli di programmazione lineare sono molto frequenti e importanti. Lo scopo di questo capitolo è quello di illustrare alcune classi di problemi di programmazione lineare tipici che si incontrano frequentemente nelle applicazioni reali.

Consigliamo allo studente, al fine di impratichirsi nella formulazione di problemi di PL, di provare da solo a formulare i problemi descritti prima di leggere la formulazione fornita.

3.1 Alcune considerazioni di carattere generale

Ricordiamo dal precedente capitolo, che un modello di Programmazione Lineare è costituito da:

- una *singola espressione lineare* (la funzione obiettivo) che deve essere minimizzata o massimizzata.
- un *numero finito di vincoli lineari*, vincoli cioè espressi nella forma

$$f(x_1, \dots, x_n) \leq b$$

o

$$f(x_1, \dots, x_n) \geq b$$

dove f è una funzione lineare e b una costante reale, (in questo caso si parla di vincoli di disuguaglianza) oppure

$$f(x_1, \dots, x_n) = b$$

sempre con f funzione lineare e b costante reale; (in questo caso si parla di vincoli di uguaglianza).

In riferimento alle applicazioni di tipo economico la funzione obiettivo ha di solito il significato di profitto (da massimizzare) oppure di costo (da minimizzare). Profitti e costi sono ottenuti come somma dei *profitti e costi marginali* cioè di quelli relativi a ciascuna unità di prodotto.

Quando è richiesta la massimizzazione di un profitto, il modello contiene, di solito, vincoli che esprimono limitazioni superiori sulle risorse (vincoli di capacità produttiva, disponibilità di materie prime); se invece è richiesta la minimizzazione di un costo sono di solito presenti vincoli sulla domanda (richieste di mercato) che impongono limitazioni inferiori alle variabili. È possibile la presenza di *vincoli di continuità* che esprimono conservazione o riduzione di masse o volumi ed hanno spesso la forma di vincoli di uguaglianza.

Le ipotesi che vengono assunte nel formulare un problema di Programmazione Lineare sono le seguenti:

- *proporzionalità*: il contributo di una variabile di decisione alla funzione obiettivo e ai vincoli è proporzionale secondo una costante moltiplicativa alla quantità rappresentata dalla variabile stessa;
- *additività*: il contributo delle variabili di decisione alla funzione obiettivo e ai vincoli è dato dalla somma dei contributi di ogni singola variabile.
- *continuità*: ogni variabile di decisione può assumere tutti i valori reali nell'intervallo di ammissibilità, e quindi le variabili possono assumere valori frazionari.

La particolare attenzione dedicata ai modelli di Programmazione Lineare deriva dai numerosi vantaggi che essa presenta e che possono essere così sintetizzati:

1. *Generalità e flessibilità.*

I modelli di Programmazione Lineare possono descrivere moltissime situazioni reali anche assai diverse tra loro e quindi hanno un carattere di universalità e di adattabilità alle diverse realtà applicative e anche quando l'ipotesi di linearità non è accettabile, il modello lineare costituisce una buona base di partenza per successive generalizzazioni.

2. *Semplicità.*

I modelli di Programmazione Lineare sono espressi attraverso il linguaggio dell'algebra lineare e quindi sono facilmente comprensibili anche in assenza di conoscenze matematiche più elevate.

3. *Efficienza degli algoritmi risolutivi.*

Come accennato in precedenza i modelli reali hanno dimensioni molto elevate ed è quindi indispensabile l'uso del calcolatore che con opportuni programmi di calcolo possa rapidamente fornire una soluzione numerica. Relativamente ai modelli di Programmazione Lineare esistono programmi molto efficienti e largamente diffusi che sono in grado di risolvere rapidamente problemi con migliaia di vincoli e centinaia di migliaia di variabili.

4. *Possibilità di analisi qualitative.*

I modelli di Programmazione Lineare permettono di ottenere, oltre la soluzione numerica del problema, anche ulteriori informazioni relative alla dipendenza della soluzione da eventuali parametri presenti, che possono avere significative interpretazioni economiche.

3.2 Esempi tipici di PL

Esamineremo nel seguito tre grandi classi di modelli di Programmazione Lineare che rappresentano situazioni molto diffuse del mondo reale e che abbiamo già incontrato nel paragrafo 2.2; si tratta dei

- *modelli di allocazione ottima di risorse,*
- *modelli di miscelazione,*
- *modelli di trasporto.*

I modelli reali sono ovviamente molto più grandi in termini di dimensioni (numero delle variabili e dei vincoli) e più complessi di quelli analizzati qui, noi, per ovvie ragioni didattiche ci limiteremo alla presentazione di esempi "piccoli", che tuttavia colgono le caratteristiche essenziali dei modelli usati in pratica.

Va inoltre sottolineato come nella realtà i problemi che si incontrano spesso possono combinare insieme più classi di problemi; la divisione che si è effettuata in problemi di allocazione ottima, problemi di miscelazione e problemi di trasporti ha, evidentemente, scopi essenzialmente didattici e dovrebbe

fornire la possibilità di affrontare anche situazioni in cui confluiscono simultaneamente problematiche riconducibili a differenti classi di modelli.

Infine segnaliamo che esistono e vengono comunemente incontrati casi pratici il cui modello di PL non rientra in nessuna delle classi sopra indicate o in una loro combinazione. Quindi, ripetiamo, lo scopo di questo capitolo è solo di presentare, in forma didattica, alcuni dei più comuni tipi di problemi formulabili come modelli di PL.

3.2.1 Modelli di allocazione ottima di risorse

Si tratta di problemi in cui disponendo di determinate *risorse* (disponibilità di macchinari, materie prime, mano d'opera, energia, etc.), si deve pianificare la produzione di un certo numero di prodotti finiti, cercando di massimizzare il profitto ricavato dalla loro vendita.

Esempi introduttivi

Esempio 3.2.1 *Un colorificio produce due tipi di coloranti C1 e C2 utilizzando 3 preparati base P1, P2, P3. Tali preparati devono essere acquistati e subiscono un processo di raffinazione prima di essere utilizzati. Le quantità (in litri) di preparati base da acquistare per produrre un litro di colorante di ciascuno dei due tipi è riportato nella seguente tabella*

	C1	C2
P1	1	1
P2	1	2
P3	-	1

Ogni mese la quantità di preparati base (in litri) che possono essere acquistati è la seguente

P1	P2	P3
750	1000	400

Il prezzo di vendita del colorante C1 è di 7000 lire al litro, mentre il colorante C2 viene venduto a 10000 lire al litro. Determinare la strategia ottimale di produzione mensile in modo da massimizzare i ricavi ottenuti dalla vendita dei due coloranti.

Formulazione.

Si vuole costruire il modello di Programmazione Lineare che rappresenti il problema in analisi considerando le limitazioni date dalle produzioni effettivamente realizzabili.

È immediato associare le variabili di decisione ai quantitativi di coloranti prodotti. Siano, quindi, rispettivamente x_1 e x_2 i quantitativi (in litri) da produrre mensilmente dei due coloranti.

Nel formulare il modello di Programmazione Lineare si deve verificare che siano soddisfatte le ipotesi fondamentali:

- *Proporzionalità.*

I consumi dei preparati base e i ricavi ottenibili sono proporzionali ai quantitativi di coloranti prodotti. Ad esempio, per produrre una quantità x_2 di colorante C2 si consumano $2x_2$ litri di P2 e dalla vendita di x_2 litri di C2 si ricavano $10x_2$ migliaia di lire indipendentemente dalla quantità prodotta e venduta dell'altro tipo di colorante.

- *Additività.*

I consumi dei preparati base e i ricavi rispettivamente associati alla produzione dei due coloranti sono additivi, nel senso che per produrre x_1 litri di colorante C1 e x_2 di C2 si consumano $x_1 + 2x_2$ litri di preparato di base P2 e si ricavano $7x_1 + 10x_2$ migliaia di lire.

- *Continuità.*

Ogni variabile introdotta nel modello può assumere tutti i valori reali nell'intervallo di ammissibilità.

Queste ipotesi devono valere in generale e quindi dovranno essere sempre verificate nella costruzione di un modello di (PL).

- *Variabili.* Come già detto, prendiamo come variabili di decisione x_1 e x_2 , rispettivamente i quantitativi (in litri) di colorante **C1** e **C2** da produrre mensilmente.
- *Funzione obiettivo.* È rappresentata dal profitto totale che per le ipotesi fatte è dato (in migliaia di lire) da $7x_1 + 10x_2$.
- *Vincoli.* Poiché il consumo di preparati base non può essere superiore alla disponibilità si deve avere

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\leq 750 \\x_1 + 2x_2 &\leq 1000 \\x_2 &\leq 400.\end{aligned}$$

Inoltre si deve esplicitare il vincolo di non negatività sulle variabili

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Quindi la formulazione finale è

$$\begin{cases} \max (7x_1 + 10x_2) \\ x_1 + x_2 \leq 750 \\ x_1 + 2x_2 \leq 1000 \\ x_2 \leq 400 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

□

Esempio 3.2.2 *Un'industria manifatturiera può fabbricare 5 tipi di prodotti che indichiamo genericamente con P1, P2, P3, P4, P5 usando 2 processi di produzione che avvengono mediante l'uso di due macchine che indichiamo con M1 e M2. Dopo aver dedotto il costo del materiale grezzo, ciascuna unità di prodotto dà i seguenti profitti (in migliaia di lire)*

P1	P2	P3	P4	P5
250	300	500	450	180

Ciascuna unità di prodotto richiede un certo tempo di ciascuno dei 2 processi; la tabella che segue riporta i tempi (in ore) di lavorazione di ciascuna macchina per ottenere una unità di ciascuno dei prodotti finiti

	P1	P2	P3	P4	P5
M1	10	15	7	18	–
M2	9	13	–	–	20

Inoltre, l'assemblaggio finale per ciascuna unità di ciascun prodotto richiede 18 ore di lavoro di un operaio. La fabbrica possiede 4 macchine M1 e 3 macchine M2 che sono in funzione 5 giorni alla settimana per 2 turni di 8 ore al giorno. Gli operai impiegati nell'assemblaggio sono 10 e ciascuno di essi lavora 5 giorni alla settimana per un turno di 8 ore al giorno. Trovare la quantità che conviene produrre di ciascun prodotto per massimizzare il profitto totale.

Formulazione.

Costruiamo un modello di Programmazione Matematica rappresentante il problema in analisi supponendo di voler pianificare la produzione settimanale. È immediato verificare che anche in questo caso le ipotesi fondamentali della Programmazione Lineare sono soddisfatte.

– *Variabili di decisione.* È naturale introdurre le variabili reali x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 rappresentanti rispettivamente le quantità di prodotto **P1**, **P2**, **P3**, **P4**, **P5** che conviene fabbricare in una settimana.

– *Funzione Obiettivo.* Ciascuna unità di prodotto finito contribuisce al profitto totale secondo la tabella data. Quindi il profitto totale sarà

$$250x_1 + 300x_2 + 500x_3 + 450x_4 + 180x_5. \quad (3.1)$$

L'obiettivo della fabbrica sarà quello di scegliere le variabili x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 in modo che l'espressione (3.1) del profitto sia massimizzata. La (3.1) rappresenta la funzione obiettivo.

– *Vincoli.* Ovviamente la capacità produttiva della fabbrica sia dal punto di vista delle macchine, sia dal punto di vista degli operai, limita i valori che possono assumere le variabili $x_j, j = 1, \dots, 5$. Si hanno solo 4 macchine **M1** che lavorano per un totale di 320 ore settimanali e poiché ciascuna unità di prodotto **P1** usa per 10 ore la macchina **M1**, ciascuna unità di prodotto **P2** la usa per 15 ore e così via per gli altri prodotti, si dovrà avere

$$10x_1 + 15x_2 + 7x_3 + 18x_4 \leq 320. \quad (3.2)$$

Ragionando in modo analogo per la macchina **M2** si ottiene

$$9x_1 + 13x_2 + 20x_5 \leq 240. \quad (3.3)$$

Inoltre si hanno solo 10 uomini per l'assemblaggio, ciascuno dei quali lavora 40 ore a settimana e quindi si ha una capacità lavorativa settimanale di 400 ore. Poiché ciascuna unità di prodotto prevede 18 ore di lavoro di assemblaggio si dovrà avere

$$18x_1 + 18x_2 + 18x_3 + 18x_4 + 18x_5 \leq 400. \quad (3.4)$$

Le espressioni (3.2), (3.3) e (3.4) costituiscono i vincoli del modello. Ci sono inoltre vincoli impliciti dovuti al fatto che le variabili $x_j, j = 1, \dots, 5$ rappresentando quantità di prodotto non possono essere negative. Questa limitazione va esplicitata e quindi vanno aggiunti i vincoli

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

La formulazione finale sarà quindi

$$\begin{cases} \max (250x_1 + 300x_2 + 500x_3 + 450x_4 + 180x_5) \\ 10x_1 + 15x_2 + 7x_3 + 18x_4 \leq 320 \\ 9x_1 + 13x_2 + 20x_5 \leq 240 \\ 18x_1 + 18x_2 + 18x_3 + 18x_4 + 18x_5 \leq 400 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Questa formulazione è un problema matematico ben definito e costituisce il modello di Programmazione Matematica rappresentante il problema di pianificazione della produzione industriale in analisi. \square

Formulazione generale di un problema di allocazione ottima di risorse

Per costruire uno schema generale di formulazione per questo tipo di problemi si assuma di disporre di m risorse **R1**, **R2**, ..., **Rm** e di voler fabbricare n diversi prodotti **P1**, **P2**, ..., **Pn**.

Le risorse possono essere sia umane (mano d'opera) sia materiali (disponibilità di macchinari o di materie prime). Il problema della pianificazione delle risorse consiste nel determinare le quantità da

fabbricare di ciascun prodotto $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ in modo da massimizzare il profitto rispettando i vincoli sulle risorse disponibili o sui livelli di produzione richiesti.

Si indichi con $a_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ la quantità della risorsa \mathbf{R}_i necessaria per fabbricare una unità del prodotto \mathbf{P}_j . Si può così costruire la seguente tabella

	\mathbf{P}_1	\dots	\mathbf{P}_j	\dots	\mathbf{P}_n
\mathbf{R}_1	a_{11}	\dots	a_{1j}	\dots	a_{1n}
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
\mathbf{R}_i	a_{i1}	\dots	a_{ij}	\dots	a_{in}
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
\mathbf{R}_m	a_{m1}	\dots	a_{mj}	\dots	a_{mn}

Supponiamo che ciascuna risorsa \mathbf{R}_i non possa superare un valore prefissato $b_i, i = 1, \dots, m$

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 & \dots & \mathbf{R}_m \\ b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{array}$$

e che nella vendita di ciascuna unità di prodotto \mathbf{P}_j si ricavi un profitto netto $c_j, j = 1, \dots, n$

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \dots & \mathbf{P}_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{array}$$

Formulazione.

È utile ribadire le ipotesi già espone in precedenza le quali devono valere in generale per la costruzione di modelli di Programmazione Lineare: *proporzionalità*, *additività*, *continuità* cioè i consumi delle risorse e i ricavi ottenibili sono proporzionali ai quantitativi di prodotto fabbricati; i consumi globali di risorse e i ricavi totali si ottengono come somma dei consumi e dei ricavi marginali; le variabili possono assumere valori frazionari.

– *Variabili di decisione*. Si introducono le variabili di decisione x_1, x_2, \dots, x_n rappresentanti (in un'opportuna unità di misura) la quantità di ciascun prodotto $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$. Queste saranno le incognite del problema. Tali variabili di decisione sono i cosiddetti *livelli di attività*. Introducendo come spazio delle variabili lo spazio delle n -uple reali \mathbb{R}^n si può considerare un $x \in \mathbb{R}^n$ definendo $x = (x_1, \dots, x_n)^T$.

– *Funzione obiettivo*. Per le ipotesi fatte la funzione obiettivo (da massimizzare) può essere scritta

$$z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j.$$

Introducendo $c \in \mathbb{R}^n$, definito $c = (c_1, \dots, c_n)^T$ la funzione obiettivo può essere scritta in notazione vettoriale

$$z = c^T x.$$

– *Vincoli*. Si devono introdurre i seguenti vincoli:

- Vincoli di capacità produttiva:

tenendo conto delle limitazioni delle risorse si hanno i seguenti m vincoli

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + & \dots & +a_{2n}x_n & \leq b_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & \leq b_m. \end{array}$$

- Vincoli di non negatività:

le variabili devono essere non negative in quanto esse rappresentano livelli di produzione e quindi si hanno i vincoli

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Introducendo la matrice ($m \times n$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e il vettore $b = (b_1, \dots, b_m)^T$ la formulazione completa del problema può essere scritta nella forma

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

È una formulazione generale (con solo vincoli di disuguaglianza e vincoli di non negatività) in cui si può porre un generico problema di allocazione ottima di risorse.

Nella pratica, potrebbe essere necessario imporre ulteriori vincoli:

- Vincoli di domanda

- limitazioni inferiori sulle variabili x_i cioè

$$x_i \geq l_i \quad i = 1, \dots, n$$

con $l_i \geq 0$ per assicurare che i prodotti siano fabbricati in quantità significative. In questo caso, per ogni indice i per il quale $l_i > 0$ il vincolo di non negatività $x_i \geq 0$ è ridondante.

- limitazioni superiori sulle variabili, cioè

$$x_i \leq u_i \quad i = 1, \dots, n$$

dovute ad eventuali possibilità limitate di assorbimento dei prodotti da parte del mercato.

Introducendo le notazioni vettoriali $l = (l_1, \dots, l_n)^T$ e $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ questi vincoli possono essere scritti nella forma $l \leq x \leq u$, $x \in \mathbb{R}^n$.

- Vincoli di interezza.

Se inoltre non ha senso considerare i prodotti quantità divisibili allora si deve definire un modello di programmazione a numeri interi. Cioè nel caso in cui non si possa supporre che i livelli di attività siano frazionari (ad es. se i prodotti sono quantità indivisibili come motori, lavatrici etc.), allora si deve aggiungere il vincolo che le quantità x_i siano intere.

Altri esempi di modelli di allocazione ottima di risorse

Verranno ora di seguito esaminati alcuni esempi di modelli di allocazione ottima di risorse.

Esempio 3.2.3 *Una azienda automobilistica produce tre diversi modelli di autovettura: un modello economico, uno normale ed uno di lusso. Ogni autovettura viene lavorata da tre robot: A, B e C. I tempi necessari alla lavorazione sono riportati, in minuti, nella tabella seguente insieme al profitto netto realizzato per autovettura*

	Economica	Normale	Lusso
A	20	30	62
B	31	42	51
C	16	81	10
Prezzo	1000	1500	2200

I robot **A** e **B** sono disponibili per 8 ore al giorno mentre il robot **C** è disponibile per 5 ore al giorno. Il numero di autovetture di lusso prodotte non deve superare il 20% del totale mentre il numero di autovetture economiche deve costituire almeno il 40% della produzione complessiva. Supponendo che tutte le autovetture vengano vendute, formulare un problema di Programmazione Lineare che permetta di decidere le quantità giornaliere (non necessariamente intere) da produrre per ciascun modello in modo tale da massimizzare i profitti rispettando i vincoli di produzione.

Formulazione.

È un problema di allocazione ottima di risorse e può essere formulato in termini di Programmazione Lineare nel seguente modo.

– *Variabili.* Indichiamo con x_1, x_2, x_3 , rispettivamente il numero di autovetture del modello economico, normale e di lusso.

– *Funzione obiettivo.* È data dal profitto globale e quindi è data da

$$1000x_1 + 1500x_2 + 2200x_3.$$

– *Vincoli.* I vincoli sulla capacità produttiva sono

$$20x_1 + 30x_2 + 62x_3 \leq 480$$

$$31x_1 + 42x_2 + 51x_3 \leq 480$$

$$16x_1 + 81x_2 + 10x_3 \leq 300.$$

I vincoli sul numero totale dei singoli tipi di autovetture sono

$$x_3 \leq 0.2(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$x_1 \geq 0.4(x_1 + x_2 + x_3).$$

Si devono inoltre esplicitare i vincoli di non negatività

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0.$$

Quindi la formulazione completa può essere scritta

$$\begin{cases} \max(1000x_1 + 1500x_2 + 2200x_3) \\ 20x_1 + 30x_2 + 62x_3 \leq 480 \\ 31x_1 + 42x_2 + 51x_3 \leq 480 \\ 16x_1 + 81x_2 + 10x_3 \leq 300 \\ x_3 \leq 0.2(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_1 \geq 0.4(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

□

Esempio 3.2.4 Un'industria produce 4 tipi di elettrodomestici **E1**, **E2**, **E3**, **E4** ed è divisa in 3 reparti. Ciascun reparto può fabbricare ciascuno tipo di elettrodomestico. Questa industria dispone di 100 operai così ripartiti: 40 nel reparto 1, 35 nel reparto 2 e 25 nel reparto 3. Ciascun operaio lavora 5 giorni la settimana, per 8 ore al giorno. La tabella che segue riporta, per ciascun tipo di elettrodomestico e per ciascun reparto, il tempo di lavorazione (in ore) necessario per ottenere un elettrodomestico pronto per la vendita, insieme al prezzo di vendita unitario in migliaia di lire.

	E1	E2	E3	E4
Reparto 1	1	1.5	0.5	1.6
Reparto 2	1.2	1.3	0.6	1
Reparto 3	0.8	1.7	0.7	1.3
prezzo di vendita	800	1200	950	1100

Questa industria deve pianificare la sua produzione settimanale, deve cioè determinare il numero di ciascuno degli elettrodomestici che deve essere fabbricato da ciascun reparto in modo da soddisfare un ordine di almeno 1000, 600, 300, 200 elettrodomestici rispettivamente del tipo **E1**, **E2**, **E3**, **E4** e in modo da massimizzare il profitto complessivo ricavato dalla vendita.

Formulazione.

È un problema di allocazione ottima di risorse con la differenza rispetto a quelli fino ad ora esaminati, che ciascun reparto è in grado di fornire prodotti finiti pronti per la vendita, cioè non è necessaria la lavorazione su tutti i reparti per ottenere un prodotto finito. Questa differenza è di fondamentale importanza nella scelta delle variabili di decisione.

– *Variabili.* Si devono distinguere il numero di elettrodomestici prodotti in ciascun reparto e quindi una naturale associazione delle variabili di decisione è la seguente: si indica con x_{ij} , $i = 1, \dots, 4$, $j = 1, 2, 3$, il numero di elettrodomestici del tipo **Ei** da produrre settimanalmente nel reparto j -esimo.

– *Funzione obiettivo.* Sarà data dal profitto complessivo ricavato dalla vendita e quindi è

$$800(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 1200(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 950(x_{31} + x_{32} + x_{33}) + 1100(x_{41} + x_{42} + x_{43})$$

– *Vincoli.* Si devono considerare i vincoli dovuti alla limitata disponibilità settimanale di ore lavorative; in particolare, vista la distribuzione degli operai nei reparti si hanno al più le seguenti disponibilità orarie: 1600 ore nel reparto 1, 1400 ore nel reparto 2 e 1000 ore nel reparto 3. Pertanto in base ai tempi di lavorazione riportati nella tabella i vincoli da considerare sono:

$$\begin{aligned} x_{11} + 1.5x_{21} + 0.5x_{31} + 1.6x_{41} &\leq 1600 \\ 1.2x_{12} + 1.3x_{22} + 0.6x_{32} + x_{42} &\leq 1400 \\ 0.8x_{13} + 1.7x_{23} + 0.7x_{33} + 1.3x_{43} &\leq 1000. \end{aligned}$$

Inoltre si devono considerare dovuti all'ordine da soddisfare che possono essere scritti nella forma

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &\geq 1000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\geq 600 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &\geq 300 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} &\geq 200. \end{aligned}$$

Infine devono essere esplicitati i vincoli di

- non negatività delle variabili $x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, 4, j = 1, 2, 3$
- interezza delle variabili $x_{ij} \in \mathbf{Z}, i = 1, \dots, 4, j = 1, 2, 3.$

Quindi la formulazione completa è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max (800(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 1200(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 950(x_{31} + x_{32} + x_{33}) + 1100(x_{41} + x_{42} + x_{43})) \\ x_{11} + 1.5x_{21} + 0.5x_{31} + 1.6x_{41} \leq 1600 \\ 1.2x_{12} + 1.3x_{22} + 0.6x_{32} + x_{42} \leq 1400 \\ 0.8x_{13} + 1.7x_{23} + 0.7x_{33} + 1.3x_{43} \leq 1000 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 1000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 600 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 300 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} \geq 200 \\ x_{ij} \geq 0, \quad x_{ij} \in \mathbf{Z}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad j = 1, 2, 3. \end{array} \right.$$

□

Modelli di pianificazione della produzione multiperiodo

Si tratta di problemi di allocazione ottima di risorse limitate analoghi a quelli già trattati, ma dove la pianificazione è effettuata su un orizzonte temporale composto da più periodi elementari; si richiede, ad esempio, di estendere la programmazione mensile della produzione di un'azienda in modo da ottenere un piano di produzione semestrale con possibilità di giacenze al termine di ciascun mese. L'esempio che segue riporta una semplice situazione di questo tipo.

Esempio 3.2.5 *Una fabbrica produce due tipi di pneumatici A e B ed ha una gestione trimestrale della produzione. Per i prossimi tre mesi deve soddisfare il seguente ordine (espresso in numero di pneumatici richiesti ciascun mese)*

	tipo A	tipo B
ottobre	4500	3000
novembre	5000	3500
dicembre	2000	8000

Per la produzione di questi pneumatici la fabbrica dispone di due macchine M1 e M2. Per avere un pneumatico finito e pronto per essere venduto, è necessaria la lavorazione di materiale grezzo su solo una delle due macchine. Il numero di ore in cui le macchine sono disponibili ciascun mese sono riportate nella seguente tabella

	M1	M2
ottobre	1000	800
novembre	1500	1800
dicembre	600	1100

I tempi necessari per produrre questi pneumatici varia a seconda del tipo e della macchina usata. Tali tempi sono riportati nella seguente tabella (in ore)

	M1	M2
tipo A	0.10	0.12
tipo B	0.18	0.15

Il costo di lavorazione per ogni ora di macchina usata è uguale per entrambe le macchine ed è pari a lire 6000. Il costo del materiale grezzo necessario per produrre ciascun pneumatico è di lire 2500 per il tipo A e di lire 4000 per il tipo B.

Nel primo e nel secondo mese del trimestre è possibile produrre più di quanto richiesto nello stesso mese; la produzione in eccesso deve essere immagazzinata per essere usata nel mese successivo. Ogni mese, il costo di tale immagazzinamento è di lire 350 per ciascun pneumatico immagazzinato. Si assuma che all'inizio del trimestre non ci sia nessun prodotto immagazzinato e analogamente alla fine del trimestre non rimanga nessun prodotto immagazzinato.

Costruire un modello lineare che permetta di pianificare la produzione trimestrale minimizzando il costo complessivo trascurando l'interesse dei prodotti.

Formulazione.

Si tratta di un problema di allocazione ottima di risorse nel quale si deve tenere presente la possibilità dell'immagazzinamento del prodotto in eccesso.

– *Variabili.* Si introducono le variabili A_{Mi}^{ott} , A_{Mi}^{nov} , A_{Mi}^{dic} che indicano la quantità di pneumatici di tipo A prodotti dalla i -esima macchina ($i = 1, 2$) rispettivamente nei mesi di ottobre, novembre e dicembre. Analogamente B_{Mi}^{ott} , B_{Mi}^{nov} , B_{Mi}^{dic} indicheranno le quantità di pneumatici di tipo B prodotti dalla i -esima macchina ($i = 1, 2$) rispettivamente nei mesi di ottobre, novembre e dicembre. Si indichino inoltre con A_{im}^{ott} , A_{im}^{nov} , B_{im}^{ott} , B_{im}^{nov} le quantità di pneumatici di tipo A e B da immagazzinare nei mesi di ottobre e novembre.

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare è data dal costo complessivo di produzione. Poiché un'ora di lavorazione su una macchina costa lire 6000, e poiché i tempi di lavorazione cambiano a seconda delle macchine usate, per produrre ciascun pneumatico di tipo A si spende lire 600 se si utilizza la macchina 1, lire 720 se si utilizza la macchina 2. Analogamente, il costo di ciascun pneumatico del tipo B è di lire 1080 se si utilizza la macchina 1, e di lire 900 se si utilizza la macchina 2. Quindi tenendo conto del costo del materiale grezzo e dell'immagazzinamento, il costo complessivo sarà

$$\begin{aligned} & 600(A_{M1}^{ott} + A_{M1}^{nov} + A_{M1}^{dic}) + 720(A_{M2}^{ott} + A_{M2}^{nov} + A_{M2}^{dic}) + \\ & + 1080(B_{M1}^{ott} + B_{M1}^{nov} + B_{M1}^{dic}) + 900(B_{M2}^{ott} + B_{M2}^{nov} + B_{M2}^{dic}) + \\ & + 2500((A_{M1}^{ott} + A_{M1}^{nov} + A_{M1}^{dic} + A_{M2}^{ott} + A_{M2}^{nov} + A_{M2}^{dic}) + \\ & + 4000(B_{M1}^{ott} + B_{M1}^{nov} + B_{M1}^{dic} + B_{M2}^{ott} + B_{M2}^{nov} + B_{M2}^{dic}) + \\ & + 350(A_{im}^{ott} + A_{im}^{nov} + B_{im}^{ott} + B_{im}^{nov}). \end{aligned}$$

– *Vincoli.* I vincoli dovuti alla disponibilità limitata delle macchine sono

$$\begin{aligned} 0.10A_{M1}^{ott} + 0.18B_{M1}^{ott} & \leq 1000 \\ 0.10A_{M1}^{nov} + 0.18B_{M1}^{nov} & \leq 1500 \\ 0.10A_{M1}^{dic} + 0.18B_{M1}^{dic} & \leq 600 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0.12A_{M2}^{ott} + 0.15B_{M2}^{ott} & \leq 800 \\ 0.12A_{M2}^{nov} + 0.15B_{M2}^{nov} & \leq 1800 \\ 0.12A_{M2}^{dic} + 0.15B_{M2}^{dic} & \leq 1100. \end{aligned}$$

Si hanno inoltre i seguenti vincoli dovuti alla richiesta e all'immagazzinamento:

$$\begin{aligned} A_{M1}^{ott} + A_{M2}^{ott} &= 4500 + A_{im}^{ott} \\ A_{M1}^{nov} + A_{M2}^{nov} + A_{im}^{ott} &= 5000 + A_{im}^{nov} \\ A_{M1}^{dic} + A_{M2}^{dic} + A_{im}^{nov} &= 2000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{M1}^{ott} + B_{M2}^{ott} &= 3000 + B_{im}^{ott} \\ B_{M1}^{nov} + B_{M2}^{nov} + B_{im}^{ott} &= 3500 + B_{im}^{nov} \\ B_{M1}^{dic} + B_{M2}^{dic} + B_{im}^{nov} &= 8000. \end{aligned}$$

Si hanno inoltre i vincoli di non negatività sulle variabili.

Quindi il modello finale è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \left(3100(A_{M1}^{ott} + A_{M1}^{nov} + A_{M1}^{dic}) + 3220(A_{M2}^{ott} + A_{M2}^{nov} + A_{M2}^{dic}) + \right. \\ \quad \left. + 5080(B_{M1}^{ott} + B_{M1}^{nov} + B_{M1}^{dic}) + 4900(B_{M2}^{ott} + B_{M2}^{nov} + B_{M2}^{dic}) + \right. \\ \quad \left. + 350(A_{im}^{ott} + A_{im}^{nov} + B_{im}^{ott} + B_{im}^{nov}) \right) \\ 0.10A_{M1}^{ott} + 0.18B_{M1}^{ott} \leq 1000 \\ 0.10A_{M1}^{nov} + 0.18B_{M1}^{nov} \leq 1500 \\ 0.10A_{M1}^{dic} + 0.18B_{M1}^{dic} \leq 600 \\ 0.12A_{M2}^{ott} + 0.15B_{M2}^{ott} \leq 800 \\ 0.12A_{M2}^{nov} + 0.15B_{M2}^{nov} \leq 1800 \\ 0.12A_{M2}^{dic} + 0.15B_{M2}^{dic} \leq 1100 \\ A_{M1}^{ott} + A_{M2}^{ott} = 4500 + A_{im}^{ott} \\ A_{M1}^{nov} + A_{M2}^{nov} + A_{im}^{ott} = 5000 + A_{im}^{nov} \\ A_{M1}^{dic} + A_{M2}^{dic} + A_{im}^{nov} = 2000 \\ B_{M1}^{ott} + B_{M2}^{ott} = 3000 + B_{im}^{ott} \\ B_{M1}^{nov} + B_{M2}^{nov} + B_{im}^{ott} = 3500 + B_{im}^{nov} \\ B_{M1}^{dic} + B_{M2}^{dic} + B_{im}^{nov} = 8000 \\ A_{Mi}^{ott} \geq 0, A_{Mi}^{nov} \geq 0, A_{Mi}^{dic} \geq 0, \quad i = 1, 2 \\ B_{Mi}^{ott} \geq 0, B_{Mi}^{nov} \geq 0, B_{Mi}^{dic} \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{array} \right.$$

□

3.2.2 Modelli di miscelazione

Si tratta di problemi in cui si hanno a disposizione un certo numero di sostanze ciascuna delle quali ha un certo costo ed un determinato contenuto di componenti utili. Si vuole ottenere la miscela più economica di queste sostanze in modo che contenga una certa quantità di ciascuno dei componenti utili.

Esempi introduttivi

Esempio 3.2.6 *Un'industria conserviera deve produrre succhi di frutta mescolando polpa di frutta e dolcificante ottenendo un prodotto finale che deve soddisfare alcuni requisiti riguardanti il contenuto di vitamina C, di sali minerali e di calorie. La polpa di frutta e il dolcificante vengono acquistati al costo rispettivamente di Lire 400 e Lire 600 ogni ettogrammo. Inoltre dalle etichette si ricava che 100 grammi di polpa di frutta contengono 140 mg di vitamina C, 20 mg di sali minerali e 50 calorie mentre 100 grammi di dolcificante contengono 10 mg di sali minerali, 100 calorie e non contengono vitamina C. I requisiti che il prodotto finale (cioè il succo di frutta pronto per la vendita) deve avere sono i seguenti: il succo di frutta deve contenere almeno 70 mg di vitamina C, almeno 30 mg di sali minerali e un contenuto calorico di almeno 150 calorie. Si devono determinare le quantità di polpa di frutta e di dolcificante da utilizzare nella produzione del succo di frutta in modo da minimizzare il costo complessivo dell'acquisto dei due componenti base.*

Formulazione.

Si vuole costruire un modello di Programmazione Lineare che rappresenti il problema in analisi tenendo presente i requisiti di qualità richiesti. Si verifica facilmente che le ipotesi fondamentali di un modello di Programmazione Lineare sono soddisfatte.

- *Variabili.* È naturale associare la variabili di decisione alle quantità di polpa di frutta e di dolcificante da utilizzare per la produzione del succo di frutta. Quindi siano x_1 e x_2 rispettivamente le quantità espresse in ettogrammi di polpa di frutta e di dolcificante che devono essere utilizzate.
- *Funzione obiettivo.* È rappresentata dal costo complessivo dell'acquisto dei due componenti base e quindi è data da $400x_1 + 600x_2$. Questa espressione naturalmente deve essere minimizzata.
- *Vincoli.* Poiché un ettogrammo di polpa contiene 140 mg di vitamina C e il dolcificante non contiene vitamina C, il primo vincolo da considerare riguardante il contenuto di vitamina C del succo di frutta si può scrivere nella forma

$$140x_1 \geq 70.$$

Analogamente per rispettare il requisito sul contenuto di sali minerali del succo di frutta si dovrà imporre il vincolo

$$20x_1 + 10x_2 \geq 30.$$

Infine il vincolo sul contenuto calorico del succo di frutta si può esprimere nella forma

$$50x_1 + 100x_2 \geq 150.$$

Infine si deve esplicitare il vincolo di non negatività sulle variabili cioè

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Quindi la formulazione finale è

$$\begin{cases} \min(400x_1 + 600x_2) \\ 140x_1 \geq 70 \\ 20x_1 + 10x_2 \geq 30 \\ 50x_1 + 100x_2 \geq 150 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Esempio 3.2.7 – IL PROBLEMA DELLA DIETA

Una dieta prescrive che giornalmente devono essere assimilate quantità predeterminate di calorie, proteine e calcio, intese come fabbisogni minimi giornalieri, disponendo di cinque alimenti base (pane, latte, uova, carne, dolce). Tali fabbisogni minimi sono di 2000 calorie, 50 g. di proteine, 700 mg. di calcio. Dalle tabelle dietetiche si ricavano i seguenti contenuti di calorie (in cal.), proteine (in g.), calcio (in mg.) per ogni singola porzione di ciascun alimento, intendendo come porzione una quantità espressa in grammi e quindi frazionabile.

	Pane	Latte	Uova	Carne	Dolce
calorie	110	160	180	260	420
proteine	4	8	13	14	4
calcio	2	285	54	80	22

I costi (in migliaia di lire) e il numero massimo di porzioni tollerate giornalmente sono i seguenti

	Pane	Latte	Uova	Carne	Dolce
costo	2	3	4	19	20
porz.	4	8	3	2	2

Determinare una dieta a costo minimo che soddisfi le prescrizioni richieste.

Formulazione.

Poiché si è supposto che le porzioni siano frazionabili ed inoltre valgono le ipotesi di linearità, si può costruire un modello di Programmazione Lineare per rappresentare il problema in analisi.

– *Variabili.* È ovvio introdurre le variabili x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 indicanti le quantità di porzioni dei singoli alimenti da includere giornalmente nella dieta.

– *Funzione obiettivo.* È rappresentata dal costo complessivo ed è quindi data da

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 19x_4 + 20x_5.$$

– *Vincoli.* Poiché sono prescritti i fabbisogni minimi giornalieri, si avranno i seguenti vincoli:

$$\begin{aligned} \text{calorie} &\longrightarrow 110x_1 + 160x_2 + 180x_3 + 260x_4 + 420x_5 \geq 2000 \\ \text{proteine} &\longrightarrow 4x_1 + 8x_2 + 13x_3 + 14x_4 + 4x_5 \geq 50 \\ \text{calcio} &\longrightarrow 2x_1 + 285x_2 + 54x_3 + 80x_4 + 22x_5 \geq 700 \end{aligned}$$

Inoltre i vincoli sul numero massimo di porzioni giornaliere di ciascun alimento e di non negatività

$$0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 2, 0 \leq x_3 \leq 3, 0 \leq x_4 \leq 2, 0 \leq x_5 \leq 2.$$

La formulazione completa sarà quindi

$$\begin{cases} \min (2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 19x_4 + 20x_5) \\ 110x_1 + 160x_2 + 180x_3 + 260x_4 + 420x_5 \geq 2000 \\ 4x_1 + 8x_2 + 13x_3 + 14x_4 + 4x_5 \geq 50 \\ 2x_1 + 285x_2 + 54x_3 + 80x_4 + 22x_5 \geq 700 \\ 0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 2, 0 \leq x_3 \leq 3, 0 \leq x_4 \leq 2, 0 \leq x_5 \leq 2. \end{cases}$$

Se inoltre si vuole supporre, ad esempio, che nella dieta sia presente almeno una porzione di dolce e due di latte si dovranno imporre i vincoli $x_5 \geq 1$ e $x_2 \geq 2$ da aggiungere alla precedente formulazione. In questo caso, i vincoli già presenti $x_5 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ sono ridondanti. \square

Formulazione generale di un problema di miscelazione

Formalmente, supponiamo di disporre di n sostanze diverse che indichiamo con $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_n$ ciascuna delle quali contenga una certa quantità di ciascuno degli m componenti utili che indichiamo con $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_m$. Supponendo che ogni sostanza \mathbf{S}_j abbia costo unitario c_j , $j = 1, \dots, n$

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \cdots & \mathbf{S}_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{array}$$

si desidera ottenere la miscela più economica che soddisfi alcuni requisiti qualitativi, cioè contenga una quantità non inferiore a b_i di ciascun \mathbf{C}_i , $i = 1, \dots, m$

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \cdots & \mathbf{C}_m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m. \end{array}$$

Si indichi con a_{ij} , $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ la quantità di componente \mathbf{C}_i presente nella sostanza \mathbf{S}_j . Si può così costruire la seguente tabella

	\mathbf{S}_1	\cdots	\mathbf{S}_j	\cdots	\mathbf{S}_n
\mathbf{C}_1	a_{11}	\cdots	a_{1j}	\cdots	a_{1n}
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
\mathbf{C}_i	a_{i1}	\cdots	a_{ij}	\cdots	a_{in}
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
\mathbf{C}_m	a_{m1}	\cdots	a_{mj}	\cdots	a_{mn}

Formulazione.

Supponendo che valgano le ipotesi di proporzionalità, additività ed inoltre assumendo che le quantità di sostanze da utilizzare siano frazionabili, si può formulare questo problema in termini di un problema di Programmazione Lineare.

– *Variabili.* È naturale introdurre le variabili di decisione x_1, x_2, \dots, x_n rappresentanti la quantità di ciascuna sostanza $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_n$ da utilizzare nella miscela. Queste saranno le incognite del problema. Introducendo come spazio delle variabili lo spazio delle n -uple reali \mathbb{R}^n si può considerare un $x \in \mathbb{R}^n$ definendo $x = (x_1, \dots, x_n)^T$.

– *Funzione obiettivo.* Per le ipotesi fatte, la funzione obiettivo può essere scritta

$$z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = \sum_{j=1}^n c_j x_j.$$

Introducendo $c \in \mathbb{R}^n$, definito $c = (c_1, \dots, c_n)^T$, la funzione obiettivo può essere scritta in notazione vettoriale

$$z = c^T x.$$

– *Vincoli.* Si devono introdurre i seguenti vincoli:

- Vincoli di qualità.

Tenendo conto del fatto che la miscela deve contenere una quantità non inferiore a b_i di ciascun componente \mathbf{C}_i si dovrà avere

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

- Vincoli di non negatività.

Si devono infatti considerare i vincoli di non negatività sulle variabili cioè $x_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$.

Introducendo la matrice ($m \times n$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e il vettore $b = (b_1, \dots, b_m)^T$ la formulazione completa del problema può essere scritta nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Nella pratica, potrebbe essere necessario introdurre ulteriori vincoli:

- possono essere presenti limitazioni superiori o inferiori sulle variabili cioè $x_j \geq L$, $x_j \leq M$, $j = 1, \dots, n$;
- se è richiesto anche che la miscela contenga una quantità non superiore ad un valore d_i di ciascun componente C_i si dovrà aggiungere alla formulazione un altro vincolo di qualità:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq d_i, \quad i = 1, \dots, m;$$

- in alcuni casi si richiede che una certa sostanza appartenga alla miscela solo se un'altra sostanza vi appartiene (o non vi appartiene). Questi vincoli richiedono l'uso di variabili booleane come descritto in seguito.

□

Altri esempi di modelli di miscelazione

Esempio 3.2.8 Il prodotto finale di una fabbrica è ottenuto raffinando materie prime grezze e miscelando insieme. Queste materie prime possono essere di due categorie: naturali e sintetizzate. In particolare, sono disponibili tre materie prime naturali (**N1**, **N2**, **N3**) e due materie prime sintetizzate (**S1**, **S2**). Le materie prime naturali e quelle sintetizzate richiedono differenti linee di produzione. Ogni settimana è possibile raffinare non più di 500 quintali di materie prime naturali e non più di 300 quintali di materie prime sintetizzate. Si assume che non ci sia perdita di peso durante la raffinazione e che si possa trascurare il costo di raffinazione. Inoltre esiste una restrizione tecnologica sulla gradazione del prodotto finale: nell'unità di misura in cui questa gradazione è misurata, essa deve essere tra 2 e 7; si assume che tale gradazione nella miscela finale dipenda linearmente dalle singole gradazioni delle materie prime componenti. Nella tabella che segue è riportato il costo (in migliaia di lire) per quintale e la gradazione delle materie prime grezze.

	N1	N2	N3	S1	S2
costo	300	190	250	200	230
grad.	6.0	1.9	8.5	5.0	3.5

Il prodotto finale viene venduto a 350 migliaia di lire per quintale. Determinare come va pianificata la produzione settimanale per massimizzare il profitto netto.

Formulazione.

– *Variabili.* Introduciamo le variabili di decisione x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 rappresentanti le quantità (in quintali) di **N1**, **N2**, **N3**, **S1**, **S2** che devono essere comprate e raffinate in una settimana. Inoltre introduciamo una ulteriore variabile y che indica la quantità di prodotto finale che deve essere fabbricato.

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da massimizzare sarà data dal profitto netto cioè da

$$350y - 300x_1 - 190x_2 - 250x_3 - 200x_4 - 230x_5.$$

– *Vincoli.* Sono presenti tre tipi di vincoli

- capacità di raffinamento

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 500$$

$$x_4 + x_5 \leq 300;$$

- limitazioni sulla gradazione

$$6.0x_1 + 1.9x_2 + 8.5x_3 + 5.0x_4 + 3.5x_5 \leq 7y$$

$$6.0x_1 + 1.9x_2 + 8.5x_3 + 5.0x_4 + 3.5x_5 \geq 2y;$$

- vincolo di continuità

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = y.$$

Questo vincolo di continuità esprime il fatto che il peso finale del prodotto deve essere uguale alla somma dei pesi degli ingredienti.

Inoltre si devono esplicitare i vincoli di non negatività delle variabili.

La formulazione finale risulta quindi

$$\begin{cases} \max (-300x_1 - 190x_2 - 250x_3 - 200x_4 - 230x_5 + 350y) \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\ x_4 + x_5 \leq 300 \\ 6.0x_1 + 1.9x_2 + 8.5x_3 + 5.0x_4 + 3.5x_5 - 7y \leq 0 \\ 6.0x_1 + 1.9x_2 + 8.5x_3 + 5.0x_4 + 3.5x_5 - 2y \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - y = 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

□

Osservazione 3.2.9 Un errore comune è quello di scrivere i vincoli sulla gradazione

$$6.0x_1 + 1.9x_2 + 8.5x_3 + 5.0x_4 + 3.5x_5 \leq 7$$

$$6.0x_1 + 1.9x_2 + 8.5x_3 + 5.0x_4 + 3.5x_5 \geq 2.$$

Queste relazioni sono evidentemente dimensionalmente errate: il primo membro ha le dimensioni di *gradazione* \times *quantità* mentre il secondo membro ha le dimensioni della *gradazione*. Tuttavia, invece delle variabili x_i in queste due disuguaglianze si potevano usare le variabili x_i/y per rappresentare le *proporzioni degli ingredienti*, piuttosto che le *quantità assolute* x_i ; ovviamente, in questo caso si dovevano modificare anche le altre espressioni. Comunque, l'uso delle variabili x_i/y è ovviamente possibile solo nel caso in cui la quantità di prodotto fabbricato è non nulla, cioè $y \neq 0$.

Esempio 3.2.10 Una raffineria produce quattro tipi di benzine grezze ($\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4$) e le miscela allo scopo di ottenere carburanti di due diverse qualità ($\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$). Le quantità di benzine grezze non utilizzate nella produzione delle miscele possono essere vendute direttamente. La seguente tabella riassume i dati delle benzine grezze, cioè il numero di ottani, la quantità (in ettoltri) che si può produrre al giorno e il costo (in migliaia di lire) di un ettolitro di ciascuna benzina.

	\mathbf{B}_1	\mathbf{B}_2	\mathbf{B}_3	\mathbf{B}_4
n. ottani	90	73	79	86
ettoltri	3500	6000	4500	5200
costo	260	210	190	220

Nella seguente tabella sono riportate le caratteristiche che devono avere le miscele cioè il minimo numero di ottani e il prezzo di vendita di un ettolitro di carburante (in migliaia di lire)

	\mathbf{C}_1	\mathbf{C}_2
min. n. ottani	80	85
prezzo	350	520

Inoltre il mercato è in grado di assorbire non più di 25000 ettoltri al giorno del carburante \mathbf{C}_1 , mentre richiede almeno 10000 ettoltri al giorno di carburante \mathbf{C}_2 . Infine, i quantitativi di benzine grezze prodotti ma non utilizzati nella preparazione delle miscele sono rivenduti al prezzo di 280 migliaia di lire per ettolitro se il numero di ottani è non inferiore a 80, e a 250 migliaia di lire per ettolitro altrimenti. Occorre pianificare la produzione giornaliera della raffineria, cioè le quantità e le composizioni delle due miscele, massimizzando il profitto ottenuto dalla vendita dei prodotti. Assumere che il numero di ottani di ciascuna miscela dipenda in modo lineare dalle gradazioni delle benzine componenti.

Formulazione.

- *Variabili.* È conveniente scegliere come variabili di decisione le quantità (in barili) di benzina grezza \mathbf{B}_i utilizzate nella miscela \mathbf{C}_j che indichiamo con x_{ij} , $i = 1, \dots, 4$, $j = 1, 2$. Inoltre denotiamo con y_i , $i = 1, \dots, 4$ le quantità di benzine grezze prodotte ma non utilizzate nelle miscele.
- *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da massimizzare è data dal ricavo ottenuto dalla vendita dei prodotti sottratto dei costi di produzione. Quindi è data da

$$\begin{aligned}
 z &= 350(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}) + 520(x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}) + \\
 &+ 280(y_1 + y_4) + 250(y_2 + y_3) + \\
 &- 260(x_{11} + x_{12} + y_1) - 210(x_{21} + x_{22} + y_2) + \\
 &- 190(x_{31} + x_{32} + y_3) - 220(x_{41} + x_{42} + y_4).
 \end{aligned}$$

- *Vincoli.* I vincoli sulla capacità produttiva sono

$$x_{11} + x_{12} + y_1 \leq 3500$$

per quanto riguarda la benzina \mathbf{B}_1 e analoghi per le altre benzine. Tuttavia tali vincoli possono essere imposti, senza perdere generalità, come vincoli di uguaglianza considerando che non vi è alcuna convenienza a sotto-utilizzare le capacità produttive della raffineria:

$$x_{11} + x_{12} + y_1 = 3500$$

$$x_{21} + x_{22} + y_2 = 6000$$

$$x_{31} + x_{32} + y_3 = 4500$$

$$x_{41} + x_{42} + y_4 = 5200.$$

Analizziamo ora i vincoli dovuti al minimo numero di ottani che devono avere le miscele; essi sono dati da

$$\begin{aligned} 90x_{11} + 73x_{21} + 79x_{31} + 86x_{41} &\geq 80(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}) \\ 90x_{12} + 73x_{22} + 79x_{32} + 86x_{42} &\geq 85(x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

A queste espressioni si può anche arrivare considerando che il numero degli ottani di ciascuna miscela, per ipotesi, dipende linearmente dalle gradazioni delle benzine componenti e quindi è dato dalla media pesata dei numeri di ottani delle benzine componenti, con pesi costituiti dalle quantità di ciascun componente; quindi il numero di ottani della j -esima miscela è dato da

$$\frac{90x_{1j} + 73x_{2j} + 79x_{3j} + 86x_{4j}}{x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + x_{4j}}.$$

Questa espressione è valida solamente se la miscela è prodotta in quantità non nulla, perché in questo caso il denominatore è non nullo. Esprimendo con una disequazione la richiesta che il numero di ottani di tale miscela sia non inferiore al rispettivo limite minimo e moltiplicando entrambi i membri della disequazione per il denominatore della frazione si ottengono i vincoli richiesti nella forma data dalle (3.5) che valgono anche nel caso di produzione nulla delle miscele. Svolgendo i calcoli nelle (3.5) si ottengono i seguenti vincoli

$$10x_{11} - 7x_{21} - x_{31} + 6x_{41} \geq 0$$

$$5x_{12} - 12x_{22} - 6x_{32} + x_{42} \geq 0.$$

Si devono inoltre esprimere vincoli di mercato, cioè

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq 25000$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \geq 10000$$

e i vincoli di non negatività sulle variabili

$$x_{ij} \geq 0, \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4; \quad j = 1, \dots, 3.$$

Quindi, la formulazione completa è

$$\left\{ \begin{array}{l} \max(90x_{11} + 140x_{21} + 160x_{31} + 130x_{41} + 260x_{12} + 310x_{22} + \\ \quad + 330x_{32} + 300x_{42} + 20y_1 + 40y_2 + 60y_3 + 60y_4) \\ x_{11} + x_{12} + y_1 = 3500 \\ x_{21} + x_{22} + y_2 = 6000 \\ x_{31} + x_{32} + y_3 = 4500 \\ x_{41} + x_{42} + y_4 = 5200 \\ 10x_{11} - 7x_{21} - 1x_{31} + 6x_{41} \geq 0 \\ 5x_{12} - 12x_{22} - 6x_{32} + 1x_{42} \geq 0 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq 25000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \geq 10000 \\ x_{ij} \geq 0, \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4; \quad j = 1, 2. \end{array} \right.$$

□

3.2.3 Modelli di trasporto

Si tratta di problemi in cui si hanno un certo numero di località (origini) ciascuna delle quali ha una quantità fissata di merce disponibile e un certo numero di clienti residenti in altre località (destinazioni) i quali richiedono quantitativi precisi di merce. Quindi conoscendo il costo unitario del trasporto della merce da ciascuna località origine a ciascuna località destinazione è necessario pianificare i trasporti, cioè la quantità di merce che deve essere trasportata da ciascuna località origine a ciascuna località destinazione in modo da soddisfare l'ordine dei clienti minimizzando il costo complessivo derivante dai trasporti.

Esempio introduttivo

Esempio 3.2.11 *Un'industria dell'acciaio dispone di due miniere M_1 e M_2 e di tre impianti di produzione P_1 P_2 P_3 . Il minerale estratto deve essere giornalmente trasportato agli impianti di produzione soddisfacendo le rispettive richieste. Le miniere M_1 e M_2 producono giornalmente rispettivamente 130 e 200 tonnellate di minerale. Gli impianti richiedono giornalmente le seguenti quantità (in tonnellate) di minerale*

P_1	P_2	P_3
80	100	150

Il costo (in migliaia di lire) del trasporto da ciascuna miniera a ciascun impianto di produzione è riportato nella seguente tabella

	P_1	P_2	P_3
M_1	10	8	21
M_2	12	20	14

Formulare un modello che descriva il trasporto dalle miniere agli impianti di produzione in modo da minimizzare il costo globale del trasporto.

Analisi del problema.

È un problema di trasporti con 2 origini (M_1 , M_2) e 3 destinazioni (P_1 P_2 P_3). Poiché risulta $a_1 + a_2 = 130 + 200 = 330$ e $b_1 + b_2 + b_3 = 80 + 100 + 150 = 330$, è soddisfatta l'ipotesi di ammissibilità richiesta dal Teorema 3.2.14

Formulazione.

– *Variabili.* Associamo le variabili di decisione alle quantità di minerale che deve essere trasportato; indichiamo con x_{ij} $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$, le quantità (in tonnellate) di minerale da trasportare giornalmente da ciascuna miniera M_i a ciascun impianto di produzione P_j .

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare è data dalla somma dei costi dei trasporti cioè da

$$z = 10x_{11} + 8x_{12} + 21x_{13} + 12x_{21} + 20x_{22} + 14x_{23}.$$

– *Vincoli.* I vincoli di origine esprimono il fatto che la somma della quantità di minerale trasportato dalla miniera M_i deve essere uguale alla disponibilità giornaliera della miniera stessa:

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 130 \\x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 200.\end{aligned}$$

I vincoli di destinazione esprimono il fatto che la somma delle quantità di minerale trasportato all'impianto di produzione \mathbf{P}_j deve essere pari alla richiesta giornaliera di tale impianto:

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{21} &= 80 \\x_{12} + x_{22} &= 100 \\x_{13} + x_{23} &= 150.\end{aligned}$$

Infine si devono considerare i vincoli di non negatività $x_{ij} \geq 0$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$.
La formulazione completa è quindi

$$\begin{cases} \min (10x_{11} + 8x_{12} + 21x_{13} + 12x_{21} + 20x_{22} + 14x_{23}) \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 130 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 200 \\ x_{11} + x_{21} = 80 \\ x_{12} + x_{22} = 100 \\ x_{13} + x_{23} = 150 \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

□

Formulazione generale di un problema di trasporti

Sono definite m località *origini* indicate con $\mathbf{O}_1, \dots, \mathbf{O}_m$, e n località *destinazioni* indicate con $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_n$. Ogni origine \mathbf{O}_i , ($i = 1, \dots, m$) può fornire una certa disponibilità $a_i \geq 0$ di merce che deve essere trasferita dalle origini alle destinazioni

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{O}_1 & \cdots & \mathbf{O}_m \\ a_1 & \cdots & a_m. \end{array}$$

Ad ogni destinazione \mathbf{D}_j , ($j = 1, \dots, n$) è richiesta una quantità $b_j \geq 0$ di merce.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D}_1 & \cdots & \mathbf{D}_n \\ b_1 & \cdots & b_n. \end{array}$$

Supponiamo che il costo del trasporto di una unità di merce da \mathbf{O}_i a \mathbf{D}_j sia pari a c_{ij} . Tali costi nella realtà sono spesso collegati alle distanze tra origini e destinazioni.

Il problema consiste nel pianificare i trasporti in modo da soddisfare le richieste delle destinazioni minimizzando il costo del trasporto complessivo nella seguente ipotesi:

- la disponibilità complessiva uguaglia la richiesta complessiva, cioè

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j; \tag{3.6}$$

si escludono possibilità di giacenze nelle origini, cioè tutta la merce prodotta in una origine deve essere trasportata in una delle destinazioni; si escludono possibilità di giacenze nelle destinazioni, cioè la quantità totale che arriva in una destinazione \mathbf{D}_j deve uguagliare la richiesta b_j .

Formulazione.

Si vuole dare una formulazione del problema in esame in termini di un problema di programmazione lineare supponendo quindi che siano verificate le ipotesi di linearità e continuità.

– *Variabili.* Per ogni coppia di origine e destinazione \mathbf{O}_i , \mathbf{D}_j si introducono le variabili di decisione x_{ij} rappresentanti la quantità di merce da trasportare da \mathbf{O}_i , a \mathbf{D}_j . Si tratta di mn variabili

	D_1	\dots	D_j	\dots	D_n
O_1	x_{11}	\dots	x_{1j}	\dots	x_{1n}
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
O_i	x_{i1}	\dots	x_{ij}	\dots	x_{in}
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
O_m	x_{m1}	\dots	x_{mj}	\dots	x_{mn}

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare sarà data da costo totale del trasporto e quindi da

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}.$$

– *Vincoli.* Per le ipotesi fatte, si avranno due tipi di vincoli:

- vincoli di origine

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m; \quad (3.7)$$

impongono che tutta la merce prodotta in una origine sia trasportata alle destinazioni; si tratta di m vincoli;

- vincoli di destinazione

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n; \quad (3.8)$$

impongono che la quantità totale di merce che arriva in ciascuna delle destinazioni uguaglia la richiesta; si tratta di n vincoli.

Si devono infine considerare i vincoli di non negatività delle variabili

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n.$$

Si è così ottenuta una formulazione del problema dei trasporti con mn variabili e $m + n + mn$ vincoli:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \right) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Osservazione 3.2.12 È chiaro che per le ipotesi fatte dovrà risultare

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Osservazione 3.2.13 Sempre nell'ipotesi (3.6), una equazione dei vincoli di bilanciamento è ridondante e si può eliminare. Si può facilmente comprendere ciò esaminando direttamente un esempio particolare con $m = 3$ ed $n = 4$; in questo caso i vincoli possono essere scritti

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = a_1 \quad (A)$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = a_2 \quad (B)$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = a_3 \quad (C)$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = b_1 \quad (D)$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = b_2 \quad (E)$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = b_3 \quad (F)$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = b_4. \quad (G)$$

È facile osservare come sommando le equazioni (D), (E), (F), (G) e sottraendo da questa somma la somma delle equazioni (B) e (C) e tenendo presente che per ipotesi $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$, si ottiene l'equazione (A); quindi l'equazione (A) è ridondante e può essere eliminata dalla formulazione.

Ciò vale in generale e quindi gli $m + n$ vincoli di origine e di destinazione per un generico problema di trasporti possono essere ridotti a $m + n - 1$ equazioni indipendenti in mn variabili; infatti analogamente al caso particolare ora analizzato si può considerare la formulazione generale; sommando la (3.8) per $j = 1, \dots, n$ si ottiene

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j \quad (3.10)$$

e sommando la (3.7) per $i = 1, \dots, m$ con $i \neq i_o$, si ottiene

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_o}}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_o}}^m a_i. \quad (3.11)$$

Sottraendo membro a membro la (3.10) e la (3.11) e tenendo conto che per ipotesi vale $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ si ottiene l'equazione

$$\sum_{j=1}^n x_{i_o j} = a_{i_o}$$

che quindi è ridondante. □

Esaminiamo, ora, un risultato che è una condizione necessaria e sufficiente affinché un generico problema dei trasporti scritto nella forma (3.9) con $a_i \geq 0$ e $b_j \geq 0$ abbia soluzione; tale risultato chiarisce perché nella formulazione classica del problema dei trasporti si adotta l'ipotesi (3.6) cioè che la disponibilità complessiva uguagli la richiesta complessiva.

Teorema 3.2.14 *Condizione necessaria e sufficiente affinché il problema (3.9) ammetta soluzione, cioè che esista una soluzione ammissibile, è che risulti*

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (3.12)$$

Dim.: Dimostriamo innanzitutto la necessità, cioè che se esiste una soluzione ammissibile x_{ij} allora la condizione (3.12) deve essere verificata; poiché x_{ij} deve soddisfare i vincoli, dalle equazioni dei vincoli nella (3.9) si ottiene

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j,$$

e sottraendo membro a membro si ha

$$\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j = 0$$

che è la (3.12).

Dimostriamo ora la sufficienza; supponiamo quindi che valga la (3.12) e poniamo

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = A.$$

Si vuole allora dimostrare che esiste una soluzione ammissibile; infatti, sia $x_{ij} := \frac{a_i b_j}{A}$; allora x_{ij} ora definito è una soluzione ammissibile per il problema dei trasporti. Infatti risulta innanzitutto $x_{ij} \geq 0$ per ogni $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$ per la non negatività degli a_i e dei b_j ; inoltre

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{a_i b_j}{A} = \frac{a_i \sum_{j=1}^n b_j}{A} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m \frac{a_i b_j}{A} = \frac{b_j \sum_{i=1}^m a_i}{A} = b_j$$

e quindi x_{ij} soddisfacendo i vincoli del problema è una soluzione ammissibile. \square

Il teorema appena dimostrato garantisce quindi che, se è soddisfatta l'ipotesi (3.6) allora il problema dei trasporti ammette sempre soluzione.

Osservazione 3.2.15 La soluzione ammissibile del teorema, ovviamente, *non è l'unica soluzione* del problema.

Riportiamo di seguito, senza dimostrazione, un altro risultato di fondamentale importanza nella trattazione del problema dei trasporti.

Teorema 3.2.16 *Se nel problema dei trasporti le a_i , $i = 1, \dots, m$ e le b_j , $j = 1, \dots, n$ sono intere e se il problema ammette soluzione ottima, allora ha una soluzione ottima intera.*

Passiamo, ora, ad analizzare alcune varianti della formulazione classica del problema dei trasporti; può infatti accadere che non tutte le rotte di trasporto siano disponibili: se non è possibile il trasporto da una certa origine \mathbf{O}_i ad una destinazione \mathbf{D}_j si pone, per convenzione, $c_{ij} = \infty$. Oppure possono esistere rotte di trasporto in cui vi sono limitazioni sulle quantità massima di merci trasportabili.

Infine, si può supporre che la disponibilità complessiva possa essere superiore alla domanda cioè

$$\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j. \quad (3.13)$$

In tal caso, possono essere ammesse giacenze nelle origini e/o nelle destinazioni; se si accetta di avere giacenze nelle origini, allora i vincoli di origine diventano

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad i = 1, \dots, m;$$

se si accetta di avere giacenze nelle destinazioni, allora i vincoli di destinazione diventano

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j \quad j = 1, \dots, n.$$

nel caso in cui vale la (3.13), per porre il problema dei trasporti nella sua formulazione classica, cioè con vincoli di uguaglianza, si può introdurre una destinazione fittizia che abbia una richiesta pari a

$$\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$$

ponendo uguale a zero il costo per raggiungere questa destinazione fittizia da qualsiasi origine.

Altri esempi di modelli di trasporto

Esempio 3.2.17 *Un'industria produce un preparato chimico utilizzando due impianti di produzione $\mathbf{I1}$, $\mathbf{I2}$. Da questi impianti tutto il preparato chimico prodotto viene trasportato in due magazzini $\mathbf{M1}$, $\mathbf{M2}$ che si trovano in differenti località. In questi magazzini una parte del preparato è venduta all'ingrosso direttamente, un'altra parte viene inviata a quattro centri di distribuzione $\mathbf{D1}$, $\mathbf{D2}$, $\mathbf{D3}$, $\mathbf{D4}$ che effettuano la vendita al minuto. Questi centri necessitano rispettivamente di almeno 150, 190, 220, 170 quintali di preparato chimico che vendono rispettivamente a Lit.350000, 280000, 200000, 270000 al quintale. La tabella che segue riporta i costi (in migliaia di lire) necessari per trasportare un quintale di preparato da ciascun impianto a ciascun magazzino.*

	M1	M2
I1	21	25
I2	27	22

Nella seguente tabella si riportano i costi (in migliaia di lire) necessari per trasportare un quintale di preparato chimico da ciascun magazzino a ciascun centro di distribuzione.

	D1	D2	D3	D4
M1	33	31	36	30
M2	27	30	28	31

L'impianto di produzione $\mathbf{I1}$ può fabbricare al più 3000 quintali di preparato, l'impianto $\mathbf{I2}$ può fabbricare al più 2000 quintali di preparato. I prezzi di vendita all'ingrosso effettuati presso i magazzini $\mathbf{M1}$ e

M2 sono rispettivamente di Lit. 150000 e 170000 al quintale. Per ragioni commerciali i quantitativi di preparato chimico venduti all'ingrosso in ciascun magazzino devono essere pari ad almeno 500 quintali ed inoltre tutto il preparato contenuto nei magazzini dovrà essere o venduto o trasportato ai centri di distribuzione per non avere rimanenze non vendute. Costruire un modello lineare che permetta di determinare le quantità di preparato chimico che devono essere prodotte in ciascun impianto e come esse devono essere ripartite tra i magazzini e i centri di distribuzione in modo da massimizzare il profitto netto complessivo.

Formulazione.

Si tratta di un problema di pianificazione industriale che unisce ad un problema di trasporti dagli impianti di produzione ai magazzini e dai magazzini ai centri di distribuzione, un problema di allocazione ottima di risorse.

–*Variabili.* Si introducono le variabili x_{ij} , $i, j = 1, 2$ per rappresentare la quantità (in quintali) di preparato chimico da produrre e quindi da trasportare dall'impianto **I** i al magazzino **M** j . Inoltre si introducono le variabili y_{kh} , $k = 1, 2$, $h = 1, 2, 3, 4$, per rappresentare la quantità (in quintali) di preparato chimico da trasportare dal magazzino **M** k al centro di distribuzione **D** h . Infine si devono introdurre due variabili z_1, z_2 per rappresentare la quantità (in quintali) di preparato chimico venduto all'ingrosso rispettivamente nel magazzino **M1** e **M2**.

–*Funzione obiettivo.* È data dal profitto netto, quindi dalla differenza tra ricavo ottenuto dalla vendita (presso i centri di distribuzione e all'ingrosso presso i magazzini) e le spesa complessiva dei trasporti. Il ricavo è dato da

$$350(y_{11} + y_{21}) + 280(y_{12} + y_{22}) + 200(y_{13} + y_{23}) + 270(y_{14} + y_{24}) + 150z_1 + 170z_2$$

mentre la spesa complessiva dei trasporti (dagli impianti ai magazzini e dai magazzini ai centri di distribuzione) è data

$$21x_{11} + 25x_{12} + 27x_{21} + 22x_{22} + 33y_{11} + 31y_{12} + 36y_{13} + 30y_{14} + 27y_{21} + 30y_{22} + 28y_{23} + 31y_{24}.$$

La funzione obiettivo sarà quindi data dalla differenza di queste due espressioni.

–*Vincoli.* Si hanno i seguenti vincoli

- vincoli dovuti alla capacità massima produttiva dei due impianti

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} &\leq 3000 \\ x_{21} + x_{22} &\leq 2000 \end{aligned}$$

- vincoli dovuti alle richieste dei centri di distribuzione

$$\begin{aligned} y_{11} + y_{21} &\geq 150 \\ y_{12} + y_{22} &\geq 190 \\ y_{13} + y_{23} &\geq 220 \\ y_{14} + y_{24} &\geq 170 \end{aligned}$$

- vincoli derivanti dal quantitativo minimo di preparato che deve essere venduto all'ingrosso nei magazzini

$$z_1 \geq 500, \quad z_2 \geq 500$$

- vincoli dovuti al fatto che tutto il preparato contenuto nei magazzini dovrà essere o venduto all'ingrosso oppure trasportato ai centri di distribuzione in modo da non avere rimanenze non vendute; questi vincoli si esprimono imponendo che in ciascun magazzino la quantità di preparato chimico che arriva trasportato dagli impianti sia uguale alla somma del quantitativo di preparato trasportato dal magazzino ai centri di distribuzione e del quantitativo di preparato venduto all'ingrosso direttamente nel magazzino. Si hanno quindi i vincoli

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{21} &= y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + z_1 \\x_{12} + x_{22} &= y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{24} + z_2\end{aligned}$$

- vincoli di non negatività su tutte le variabili

$$x_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \quad y_{kh} \geq 0, \quad k = 1, 2, \quad h = 1, 2, 3, 4 \quad z_1 \geq 0, z_2 \geq 0.$$

Quindi la formulazione completa sarà

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \left(350(y_{11} + y_{21}) + 280(y_{12} + y_{22}) + 200(y_{13} + y_{23}) + 270(y_{14} + y_{24}) + 150z_1 + 170z_2 + \right. \\ \left. - (21x_{11} + 25x_{12} + 27x_{21} + 22x_{22} + 33y_{11} + 31y_{12} + 36y_{13} + 30y_{14} + 27y_{21} + 30y_{22} + 28y_{23} + 31y_{24}) \right) \\ x_{11} + x_{12} \leq 3000 \\ x_{21} + x_{22} \leq 2000 \\ y_{11} + y_{21} \geq 150 \\ y_{12} + y_{22} \geq 190 \\ y_{13} + y_{23} \geq 220 \\ y_{14} + y_{24} \geq 170 \\ x_{11} + x_{21} = y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + z_1 \\ x_{12} + x_{22} = y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{24} + z_2 \\ z_1 \geq 500 \\ z_2 \geq 500 \\ x_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \\ y_{kh} \geq 0, \quad k = 1, 2, \quad h = 1, 2, 3, 4 \end{array} \right.$$

I vincoli di non negatività delle variabili z_i sono ovviamente implicati dai vincoli $z_1, z_2 \geq 500$.