

1. L'equazione di evoluzione delle fluttuazioni di velocità

Dalle equazioni di conservazione della massa e di bilancio della quantità di moto per unità di massa nei flussi incompressibili¹:

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_k} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial P \delta_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} 2\nu S_{ik} \quad (1.2)$$

e, tenendo conto della decomposizione di Reynolds delle componenti di velocità U_i e di pressione P , rispettivamente in parte fluttuante e media:

$$U_i = u_i + \langle U_i \rangle; \quad P = p + \langle P \rangle$$

sottraendo l'equazione per le componenti medie di Reynolds:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \langle U_k \rangle = 0 \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} = & -\frac{\partial \langle P \rangle \delta_{ik}}{\partial x_k} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_k} (2\nu \overline{S_{ik}} - \langle u_i u_k \rangle) \end{aligned} \quad (1.4)$$

dove -per comodità- si è posto: $\overline{S_{ik}} = \langle S_{ik} \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_i} \right)$,

per le componenti fluttuanti di velocità e pressione è possibile ottenere l'equazione conservazione della massa: ossia divergenza nulla del campo delle fluttuazioni delle componenti di velocità e della loro evoluzione temporale :

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \langle U_k \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} & \stackrel{def}{=} \frac{\overline{D} u_i}{\overline{D} t} = \\ & = -u_k \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} - u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p \delta_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (2\nu s_{ik} + \langle u_i u_k \rangle) \end{aligned} \quad (1.6)$$

¹In questo contesto con P s'intende la pressione divisa per la densità più eventualmente il contributo delle forze di massa a potenziale di tipo non casuale ed inoltre si è posto $S_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right)$

dove $s_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$ e si è anche introdotto l'operatore:

$$\frac{\overline{D}}{\overline{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \langle U_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial t} + \langle \mathbf{U} \rangle \cdot \nabla$$

Talvolta si usa anche tenere conto che - grazie alla divergenza nulla del campo delle componenti fluttuanti di velocità $\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \right)$ - si può scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (2\nu s_{ik}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right). \quad (1.7)$$

Si noti, inoltre, come il tensore di Reynolds $(\langle u_i u_k \rangle)$ compaia con segno opposto nelle equazioni per le velocità medie (1.4) e quelle fluttuanti (1.5).

2. L'equazione di evoluzione delle componenti del Tensore di Reynolds

Tenendo conto delle proprietà dell'operatore di media statistica risulta agevole verificare la correttezza della relazione:

$$\left\langle u_j \frac{\overline{D} u_i}{\overline{D}t} + u_i \frac{\overline{D} u_j}{\overline{D}t} \right\rangle = \frac{\overline{D} \langle u_i u_j \rangle}{\overline{D}t} \quad (2.1)$$

pertanto l'equazione di evoluzione delle componenti del tensore di Reynolds si ottiene considerando la media statistica della somma dell'equazione 1.6 moltiplicata per u_j più la stessa equazione scritta però per la componente u_j e moltiplicata per la componente u_i .

Esaminiamo allora ciascuno dei termini che contribuiscono a tale equazione e cerchiamo, quando possibile, di scriverli in forma compatta e di fornirne qualche interpretazione rispetto al loro significato.

Oltre al termine di derivata sostanziale media già descritto nella 2.1 a secondo membro dell'equazione di evoluzione del tensore di Reynolds si possono considerare i seguenti termini:

- A

Sempre per le proprietà dell'operatore di media statistica si verifica agevolmente che:

$$\begin{aligned}
& - \left\langle u_j u_k \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k} \right\rangle = \\
& = - \langle u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} - \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k} \stackrel{def}{=} \mathcal{P}_{ij}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

In questi termini si riconoscono i contributi al mutuo scambio tra campo di moto medio e campo di moto fluttuante (quest'affermazione risulterà più chiara quando si analizzeranno l'equazione di trasporto dell'energia cinetica turbolenta -che naturalmente consegue dall'equazione di trasporto del tensore di Reynolds- e quella del trasporto dell'energia cinetica del campo medio).

- B

Ricordando ancora una volta che:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$$

è possibile verificare con facilità che:

$$\begin{aligned}
& - \left\langle u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle = \\
& = - \left\langle u_k \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} \right\rangle = \\
& = - \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_i u_j u_k \rangle \stackrel{def}{=} - \frac{\partial}{\partial x_k} T'_{kij}^{(u)}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Il termine $\frac{\partial}{\partial x_k} T'_{kij}^{(u)}$ evidentemente riguarda delle correlazioni triple di componenti di velocità fluttuanti ed è emblematico della *non risolubilità del problema della chiusura* delle equazioni per il campo di velocità medio utilizzando l'idea di scrivere (e risolvere) equazioni di evoluzione per le correlazioni incognite: queste equazioni, infatti, contengono a loro volta nuove correlazioni incognite e -per di più- di ordine maggiore della correlazione per cui si sta appunto scrivendo l'equazione.

- C

Tenendo conto della identità:

$$\frac{\partial u_j p \delta_{ik}}{\partial x_k} = u_j \frac{\partial p \delta_{ik}}{\partial x_k} + p \frac{\partial u_j \delta_{ik}}{\partial x_k} = u_j \frac{\partial p}{\partial x_i} + p \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

si verifica agevolmente che il termine relativo al contributo delle interazioni tra le fluttuazioni di pressione e quelle di velocità nella equazione di evoluzione del tensore di Reynolds, si può scrivere:

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} &\stackrel{def}{=} - \left(\left\langle u_j \frac{\partial p}{\partial x_k} \delta_{ik} \right\rangle + \left\langle u_i \frac{\partial p}{\partial x_k} \delta_{jk} \right\rangle \right) = \\ &= \left\langle p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle - \left(\frac{\partial \langle p u_j \rangle}{\partial x_k} \delta_{ik} + \frac{\partial \langle p u_i \rangle}{\partial x_k} \delta_{jk} \right) \quad (2.4) \\ &\stackrel{def}{=} \mathcal{R}_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} T_{kij}'^{(p)} \end{aligned}$$

In questa decomposizione il termine $\mathcal{R}_{ij}$ (che è a traccia nulla) mette in evidenza un effetto di redistribuzione dell'energia cinetica turbolenta da quella relativa ad una particolare direzione alle altre (*effetto di isotropizzazione*), come verrà discusso meglio più avanti.

Il termine $T_{kij}'^{(p)}$ indica il contributo al trasporto (*diffusivo* in senso generalizzato) dovuto alle correlazioni tra fluttuazioni di pressione e fluttuazioni di velocità.

- D

Per quanto concerne, poi, i termini connessi alla viscosità molecolare, posto $s_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$, si verifica facilmente che:

$$\begin{aligned} 2\nu \left\langle u_j \frac{\partial}{\partial x_k} s_{ik} + u_i \frac{\partial}{\partial x_k} s_{jk} \right\rangle &= \\ &= 2\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_j s_{ik} + u_i s_{jk} \rangle + \\ &\quad - 2\nu \left\langle \frac{\partial u_j}{\partial x_k} s_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} s_{jk} \right\rangle \quad (2.5) \\ &\stackrel{def}{=} \frac{\partial}{\partial x_k} T_{kij}'^{(\nu)} - \varepsilon_{ij} \end{aligned}$$

dove $\frac{\partial}{\partial x_k} T_{kij}'^{(\nu)}$ indica il contributo della parte fluttuante del lavoro delle forze viscosi al bilancio del tensore di Reynolds, mentre ε_{ij} rappresenta un contributo da cui, poi, scaturisce la

dissipazione dell'energia cinetica turbolenta².

• E

Infine -ancora per le proprietà delle medie statistiche- risulta:

$$\left\langle u_j \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_i u_k \rangle \right\rangle = \left\langle u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_j u_k \rangle \right\rangle = 0 \quad (2.6)$$

◇ ◇ ◇

In conclusione l'equazione di evoluzione del tensore di Reynolds si può scrivere nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{D}}{\overline{D}t} \langle u_i u_j \rangle &\stackrel{def}{=} \frac{\partial}{\partial t} \langle u_i u_j \rangle + \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} T'_{kij} + \mathcal{P}_{ij} + \mathcal{R}_{ij} - \varepsilon_{ij} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dove -ricordiamo- si è posto:

$$\begin{aligned} T'_{kij} &= T'^{(u)}_{kij} + T'^{(p)}_{kij} + T'^{(\nu)}_{kij} = \\ &= -\langle u_i u_j u_k \rangle - (\langle p u_j \rangle \delta_{ik} + \langle p u_i \rangle \delta_{jk}) + 2\nu \langle u_j s_{ik} + u_i s_{jk} \rangle \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{P}_{ij} = - \left(\langle u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k} \right)$$

²Si noti come, tenendo conto dell'indivergenza del campo delle componenti fluttuanti $\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) = 0$, sia agevole verificare l'uguaglianza:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} T'^{(\nu)}_{kij} - \varepsilon_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \widetilde{T'^{(\nu)}_{kij}} - \widetilde{\varepsilon_{ij}}$$

dove $\frac{\partial}{\partial x_k} \widetilde{T'^{(\nu)}_{kij}} = \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k}$ indica in modo evidente il contributo diffusivo al trasporto del tensore di Reynolds e $\widetilde{\varepsilon_{ij}} = 2\nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle$ rappresenta il contributo da cui poi scaturisce la cosiddetta *pseudodissipazione* dell'energia cinetica turbolenta opportunamente definita in una nota più avanti.

$$\mathcal{R}_{ij} = \left\langle p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle$$

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \left\langle \frac{\partial u_j}{\partial x_k} s_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} s_{jk} \right\rangle$$

3. L'Equazione dell'Energia Cinetica (per unità di massa)

In un campo di velocità casuale, tenendo conto della decomposizione in valori medi e fluttuazioni e facendo uso della convenzione di somma per gli indici ripetuti, l'Energia Cinetica per unità di massa è data da:

$$E \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = \frac{1}{2} U_i U_i = \frac{1}{2} \langle U_i \rangle \langle U_i \rangle + u_i \langle U_i \rangle + \frac{1}{2} u_i u_i \quad . \quad (3.1)$$

Naturalmente la media di tale Energia Cinetica relativa al campo di velocità casuale considerato, per le proprietà dell'operazione di media, è data da:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} \langle U_i \rangle \langle U_i \rangle + \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle \stackrel{def}{=} \bar{E} + K \quad (3.2)$$

il che evidenzia che essa è costituita dalla somma dell'Energia Cinetica del Campo Medio ($\bar{E}$) e dell'Energia Cinetica del Campo Turbolento (K).

Ricordiamo che per ottenere l'Equazione dell'Energia Cinetica del campo casuale considerato si moltiplica scalarmente l'Equazione del Bilancio della Quantità di Moto per unità di massa per la velocità stessa. Se, poi, si tengono presenti le identità:

$$U_i \frac{\partial}{\partial x_k} (-P \delta_{ik}) = \frac{\partial}{\partial x_k} (-P U_k) + \underbrace{P \frac{\partial U_k}{\partial x_k}}_{=0} \quad (3.3)$$

e

$$U_i \frac{\partial}{\partial x_k} (2\nu S_{ik}) = 2\nu \frac{\partial}{\partial x_k} (U_i S_{ik}) - 2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_k} S_{ik} \quad (3.4)$$

si perviene alla seguente forma dell'Equazione dell'Energia Cinetica la quale evidenzia il contributo dissipativo:

$$\begin{aligned} \frac{DE}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_k} (-P U_k + 2\nu U_i S_{ik}) - 2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_k} S_{ik} \\ &\stackrel{def}{=} \frac{\partial}{\partial x_k} T_k - \Phi \end{aligned}$$

dove si è posto:

$$T_k \stackrel{def}{=} T_k^{(P)} + T_k^{(\nu)} \stackrel{def}{=} -P U_k + 2\nu U_i S_{ik}$$

e poi si è definito il tasso di dissipazione Φ^3 :

$$\Phi = 2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_k} S_{ik} = 2\nu S_{ik} S_{ik} \quad .$$

Se, inoltre, si tiene conto del fatto che il campo di velocità associato è a divergenza nulla, è agevole verificare⁴ che gli effetti connessi al lavoro degli sforzi viscosi ed alla dissipazione a livello molecolare $\frac{\partial}{\partial x_k} T_k^{(\nu)} - \Phi$ possono anche essere valutati come:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \tilde{T}_k^{(\nu)} - \tilde{\Phi} \stackrel{def}{=} \nu \frac{\partial^2 E}{\partial x_k^2} - \nu \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}$$

da interpretare rispettivamente come diffusione viscosa dell'Energia Cinetica e *pseudodissipazione* (anche se, per quest'ultima, rimane abbastanza diffuso l'uso del semplice termine *dissipazione*).

Ovviamente le due espressioni vanno considerate come tra di loro alternative e prese *in blocco*.

³Avendo tenuto conto della decomposizione del gradiente di velocità in parte simmetrica e parte antisimmetrica:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_k} = S_{ik} + \Omega_{ik} \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right)$$

e del fatto che il doppio prodotto scalare tra un tensore antisimmetrico ed uno simmetrico risulta nullo.

⁴Infatti utilizzando il primo membro dell'identità 3.4 anzichè il secondo membro, si ha:

$$\begin{aligned} & 2\nu U_i \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) = \\ &= \nu \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(U_i \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right] + \nu \left(U_i \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) = \\ &= \nu \left[\frac{\partial^2 U_i^2}{\partial x_k^2} \frac{1}{2} - \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right] + \underbrace{\nu \left(U_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)}_{=0} \end{aligned}$$

La decomposizione convenzionale del campo di velocità casuale in parte media e parte fluttuante insieme all'uso abituale dell'operatore della derivata sostanziale $\frac{\overline{D}}{\overline{D}t}$ per il quale il campo di velocità trasportante è quello medio, evidentemente comporta la seguente uguaglianza:

$$\frac{D E}{D t} = \frac{\overline{D} E}{\overline{D} t} + u_k \frac{\partial E}{\partial x_k} = \frac{\overline{D} E}{\overline{D} t} + \frac{\partial (u_k E)}{\partial x_k}$$

dove, naturalmente, si è tenuto conto che il campo delle fluttuazioni di velocità ha divergenza nulla.

Allorchè si effettua l'operazione di media sull'Equazione dell'Energia Cinetica, ricordando anche la definizione di E data dalla (3.1) e della decomposizione sua media $\langle E \rangle$ in Energia Cinetica del campo medio ed Energia Cinetica Turbolenta come indicato nella (3.2), si ottiene:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{D E}{D t} \right\rangle &= \frac{\overline{D} \langle E \rangle}{\overline{D} t} + \frac{\partial \langle u_k E \rangle}{\partial x_k} = \\ &= \frac{\overline{D}}{\overline{D} t} (\overline{E} + K) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\langle u_k u_i \rangle \langle U_i \rangle + \frac{1}{2} \langle u_k u_i u_i \rangle \right) = \frac{\partial \langle T_k \rangle}{\partial x_k} - \langle \Phi \rangle \quad . \end{aligned} \tag{3.5}$$

4. L'Equazione per L'Energia Cinetica del Campo Medio

Si può ottenere l'Equazione per l'Energia Cinetica del Campo Medio moltiplicando scalarmente l'Equazione della Velocità Media per la stessa Velocità Media. Infatti partendo dall'equazione di bilancio per le componenti medie di velocità 1.3 e moltiplicando entrambi i membri per $\langle U_i \rangle$ si ottiene⁵:

$$\begin{aligned} \langle U_i \rangle \frac{\overline{D}}{\overline{D}t} \langle U_i \rangle &= \frac{\overline{D}}{\overline{D}t} \overline{E} = \\ -\frac{\partial}{\partial x_k} [\langle U_i \rangle \langle u_i u_k \rangle + \langle U_i \rangle \langle P \rangle \delta_{ik} - 2\nu \langle U_i \rangle \langle S_{ik} \rangle] + \\ &\quad \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} \langle U_i \rangle - 2\nu \langle S_{ik} \rangle \langle S_{ik} \rangle \\ &\stackrel{def}{=} -\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{T}_k - \mathcal{P} - \overline{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4.1)$$

dove si è scelto di definire⁶:

$$\begin{aligned} \overline{T}_k &= \overline{T}_k^{(u)} + \overline{T}_k^{(p)} + \overline{T}_k^{(\nu)} \stackrel{def}{=} \\ &\stackrel{def}{=} \langle U_i \rangle \langle u_i u_k \rangle + \langle U_i \rangle \langle P \rangle \delta_{ik} - 2\nu \langle U_i \rangle \langle S_{ik} \rangle \\ \mathcal{P} &= -\langle u_i u_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} \langle U_i \rangle \\ \overline{\varepsilon} &= 2\nu \left\langle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right\rangle \langle S_{ik} \rangle = 2\nu \langle S_{ik} \rangle \langle S_{ik} \rangle \end{aligned}$$

⁵Utilizzando l'identità:

$$\langle U_i \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} (-\langle u_i u_k \rangle) = \frac{\partial}{\partial x_k} (-\langle U_i \rangle \langle u_i u_k \rangle) + \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k}$$

⁶Osserviamo anche qui che, tenendo conto che il campo delle componenti medie ha la divergenza nulla, i contributi diffusivi e dissipativi legati alla viscosità molecolare, anzichè come $\left(-\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{T}_k^{(\nu)} - \overline{\varepsilon} \right)$ rispettivamente interpretati come lavoro degli sforzi viscosi del campo medio e dissipazione del campo medio, in blocco possono anche essere scritti:

$$-\frac{\partial}{\partial x_k} \widetilde{\overline{T}}_k^{(\nu)} - \widetilde{\overline{\varepsilon}} \stackrel{def}{=} \nu \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \overline{E} - \nu \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k}$$

rispettivamente interpretabili come trasporto diffusivo dell'energia cinetica del campo medio e *pseudodissipazione* del campo medio.

In quest'ultima relazione si è ovviamente tenuto conto della decomposizione del tensore gradiente di velocità in parte simmetrica e parte antisimmetrica:

$$\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) \stackrel{def}{=} S_{ik} + \Omega_{ik}$$

e del fatto che il doppio prodotto scalare tra un tensore antisimmetrico ed uno simmetrico è sempre nullo.

5. L'equazione per l'Energia Cinetica Turbolenta

Dalla relazione (3.2) si vede che l'equazione dell'Energia Cinetica Turbolenta ($K = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle$) si può ottenere sottraendo dall'equazione (3.5) relativa al bilancio del valore medio dell'Energia Cinetica $\langle E \rangle = \frac{1}{2} \langle U_i U_i \rangle$ l'equazione (4.1) relativa al bilancio dell'Energia Cinetica delle componenti medie di velocità $(\bar{E} \frac{1}{2} \langle U_i \rangle \langle U_i \rangle)$.

Un modo alternativo per ottenere l'equazione per l'Energia Cinetica Turbolenta $K = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle$ consiste nell'effettuare la contrazione degli indici sull'equazione di evoluzione del Tensore di Reynolds 2.7 ed infine dividere per 2:

$$\frac{\bar{D}}{\bar{D}t} K \stackrel{def}{=} \frac{\partial}{\partial t} K + \langle U_k \rangle \frac{\partial K}{\partial x_k} = \frac{\partial T'_k}{\partial x_k} + \mathcal{P} - \varepsilon \quad (5.1)$$

Dove⁷:

$$\begin{aligned} T'_k &= T_k^{(u)} + T_k^{(p)} + T_k^{(\nu)} \stackrel{def}{=} \\ &\stackrel{def}{=} -\frac{1}{2} \langle u_i u_i u_k \rangle - \langle u_k p \rangle + 2\nu \langle u_i s_{ik} \rangle \\ \mathcal{P} &= \frac{1}{2} \mathcal{P}_{ii} = -\langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} \\ \varepsilon &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ii} = 2\nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} s_{ik} \right\rangle = 2\nu \langle s_{ik} s_{ik} \rangle \end{aligned}$$

⁷Tenendo conto in questo caso dell'indivergenza del campo delle componenti fluttuanti, i contributi diffusivi e dissipativi legati alla viscosità molecolare, anzichè come $\left(-\frac{\partial}{\partial x_k} T_k^{(\nu)} - \varepsilon \right)$ rispettivamente interpretati come lavoro degli sforzi viscosi del campo fluttuante e dissipazione del campo fluttuante, in blocco possono anche essere scritti:

$$-\frac{\partial}{\partial x_k} \widetilde{T}_k^{(\nu)} - \widetilde{\varepsilon} \stackrel{def}{=} \nu \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} K - \nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle$$

rispettivamente interpretabili come trasporto diffusivo dell'energia cinetica turbolenta e *pseudodissipazione* del campo fluttuante.

Si noti che il termine $\frac{1}{2} \mathcal{R}_{ii}$ qui si annulla a causa dell'annullarsi della divergenza delle componenti fluttuanti di velocità.

6. Lo scambio di energia tra campo medio e campo fluttuante e l'interpretazione dei cosiddetti termini di produzione e di redistribuzione nell'Equazione del Tensore di Reynolds

Il termine $\mathcal{P} = -\langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k}$ compare con segno opposto nell'equazione dell'energia cinetica del campo medio $\overline{E}$ ed in quella dell'energia turbolenta K , mentre naturalmente non compare nell'Equazione dell'Energia Cinetica media $\langle E \rangle$ (somma di $\overline{E}$ e K) e quindi evidentemente ha un *significato di scambio di energia* tra il campo medio ed il campo fluttuante.

Nulla si può dire riguardo al segno posseduto *intrinsecamente* da $\mathcal{P}$ tuttavia, seguendo una linea di pensiero riportata nel testo di A. S. Monin, A. M. Yaglom ***Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence*** The MIT Press (1973), si cercherà di mostrare qui che in taluni casi è possibile dare un'interpretazione più precisa dei termini $\mathcal{P}_{ij}$ ed $\mathcal{R}_{ij}$ che compaiono nell'equazione 2.7 ed in particolare che per l'Equazione di bilancio dell'Energia Turbolenta esso può assumere, in taluni casi, un *significato intrinseco di produzione* (significato di produzione che sovente viene esteso ad altre situazioni ma solo raramente con il conforto degli esperimenti o con motivazioni teoriche).

Infatti, se conveniamo *qui* che un indice q ripetuto ***non implica*** la convenzione di somma allora l'equazione del contributo $K_q = \frac{1}{2} \langle u_q u_q \rangle$ all'Energia Cinetica Turbolenta relativa alla componente di velocità fluttuante nella generica direzione q , utilizzando una forma conservativa, può essere scritto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} K_q + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\langle U_k \rangle K_q + \frac{1}{2} \langle u_q u_q u_k \rangle + \langle p u_q \delta_{qk} \rangle - \nu \frac{\partial}{\partial x_k} K_q \right) = \\ = \langle p \frac{\partial u_q}{\partial x_q} \rangle - \varepsilon_q - \langle u_q u_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} \langle U_q \rangle \end{aligned} \quad (6.1)$$

dove $\varepsilon_q = \nu \left\langle \frac{\partial u_q}{\partial x_k} \frac{\partial u_q}{\partial x_k} \right\rangle$ e naturalmente il termine $\left\langle p \frac{\partial u_q}{\partial x_q} \right\rangle$ in generale non è nullo.

Variazioni nell'unità di tempo del contributo all'Energia Cinetica Turbolenta relativa ad una direzione x_q possono essere, quindi, connesse a

flussi viscosi ovvero turbolenti oppure relativi al lavoro delle fluttuazioni di pressione, oltre che a scambi (in generale di segno positivo o negativo) con il campo delle velocità medie ed un termine che, come vedremo tra poco, può essere messo in relazione con un meccanismo di redistribuzione dell'Energia Cinetica Turbolenta da una direzione all'altra, infine variazioni sicuramente in diminuzione dovute alla dissipazione della parte fluttuante del campo.

Prendendo allora in considerazione un moto **statisticamente stazionario** di tipo *parallelo* (come ad esempio quello in un canale) che sia anche **statisticamente omogeneo** nella direzione, diciamo x_1 , della componente principale del moto (nell'esempio quella lungo l'asse del canale) e **statisticamente omogeneo** nella direzione trasversale (*spanwise*) x_3 , risulta agevole verificare che il moto medio è di tipo piano risultando $\langle U_2 \rangle = \langle U_3 \rangle = 0$ e $\langle U_1 \rangle = g(x_2) \neq 0$ e che $\langle u_2 u_3 \rangle = \langle u_1 u_3 \rangle = 0$ ed infine che tutte le medie delle grandezze turbolente variano solo nella direzione trasversale x_2 , per la quale si suppone, inoltre, la simmetria statistica rispetto al piano di mezzeria del canale.

Allora le equazioni 6.1 per $q = 1, 2, 3$ diventano:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{2} \langle u_1 u_1 u_2 \rangle - \nu \frac{\partial}{\partial x_2} K_1 \right) = \langle p \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \rangle - \varepsilon_1 - \langle u_1 u_2 \rangle \frac{\partial}{\partial x_2} \langle U_1 \rangle \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{2} \langle u_2 u_2 u_2 \rangle + \langle p u_2 \delta_{22} \rangle - \nu \frac{\partial}{\partial x_2} K_2 \right) = \langle p \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \rangle - \varepsilon_2 \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{2} \langle u_3 u_3 u_2 \rangle - \nu \frac{\partial}{\partial x_2} K_3 \right) = \langle p \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \rangle - \varepsilon_3 \quad (6.4)$$

Se poi si immagina che ciascuna delle equazioni 6.2, 6.3, 6.4 viene integrata ad una stessa regione $\mathcal{V}$, attraverso il cui bordo $\mathcal{BV}$ il flusso dei termini in parentesi al primo membro risulta nullo⁸, allora accade che:

⁸Ad esempio la regione compresa tra due sezioni rette del canale se si tiene conto anche della supposta simmetria statistica del campo turbolento rispetto al piano di mezzeria del canale.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{V}} \langle p \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \rangle d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}} \varepsilon_2 d\mathcal{V} > 0 \\
\int_{\mathcal{V}} \langle p \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \rangle d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}} \varepsilon_3 d\mathcal{V} > 0 \\
\int_{\mathcal{V}} -\langle u_1 u_2 \rangle \frac{\partial}{\partial x_2} \langle U_1 \rangle d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}} \varepsilon_1 - \langle p \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \rangle d\mathcal{V}
\end{aligned}$$

e considerando che, per l'annullarsi della divergenza del campo di velocità fluttuante ($\mathcal{R}_{ii} = 0$), si ha:

$$\int_{\mathcal{V}} -\langle p \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \rangle d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \left(\langle p \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \rangle + \langle p \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \rangle \right) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) d\mathcal{V}$$

e, quindi, si ottiene:

$$\int_{\mathcal{V}} -\langle u_1 u_2 \rangle \frac{\partial}{\partial x_2} \langle U_1 \rangle d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 d\mathcal{V} > 0$$

In definitiva si è mostrato come il termine $-\langle u_1 u_2 \rangle \frac{\partial}{\partial x_2} \langle U_1 \rangle$ possa rappresentare in senso lato l'Energia che il campo delle velocità medie trasferisce alla parte turbolenta del campo (nell'esempio illustrato, al contributo relativo alle fluttuazioni dell'Energia Cinetica Turbolenta nella direzione principale del moto K_1) e serva tutta a bilanciare la dissipazione dell'energia cinetica turbolenta K^9 .

Inoltre si vede come, a sua volta, questa energia in parte venga ridistribuita ai contributi K_2 e K_3 nelle due altre direzioni attraverso le correlazioni $\mathcal{R}_{ij}$ tra le fluttuazioni di pressione e del gradiente di velocità e ciò, in un certo senso giustifica gli appellativi di termine di *produzione* adottato per $\mathcal{P}_{ij}$ e di termine di *redistribuzione* dato a $\mathcal{R}_{ij}$ nell'Equazione di Evoluzione del Tensore di Reynolds.

⁹Infatti nel caso del canale K_1 , K_2 , K_3 e K risultano stazionarie ed omogenee rispetto alle direzioni x_1 ed x_3 .