

## Capitolo 8

# LA STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO ELASTICO E L'ANALISI DEL II ORDINE

### 8.1 Premessa

Solitamente le condizioni di collasso strutturale sono per semplicità classificate in due principali categorie, crisi per *esaurimento della resistenza* e crisi per *instabilità strutturale*.

Nel primo caso la crisi sopraggiunge quando la struttura raggiunge livelli di sforzo non più sopportabili dai materiali. In tali casi la struttura presenta generalmente una configurazione deformata poco discosta da quella iniziale indeformata e pertanto l'analisi delle sollecitazioni può essere effettuata scrivendo le equazioni di equilibrio rispetto alla configurazione iniziale indeformata della struttura (ipotesi di *piccoli spostamenti*), secondo le usuali metodiche della *teoria del primo ordine* ampiamente trattata nei capitoli precedenti. Nell'ambito della teoria del primo ordine si ammette, inoltre, l'ipotesi di *piccole deformazioni*, grazie alla quale la curvatura delle membrature si esprime mediante la nota relazione approssimata  $1/r \cong w''$ . Si ha così che, nell'ipotesi di comportamento elastico-lineare dei materiali, le relazioni tra i carichi esterni, gli spostamenti e le sollecitazioni interne sono lineari e risulta applicabile il principio di sovrapposizione degli effetti.

In altri casi la crisi della struttura, considerata nella configurazione iniziale, si può verificare per livelli di sforzo inferiori ai limiti di resistenza dei materiali a causa della *instabilità*, caratterizzata dal repentino cambiamento di configurazione della struttura. Questo secondo caso è caratteristico delle strutture snelle. In esse, però, per carichi anche molto inferiori a quelli di instabilità o di biforcazione dell'equilibrio, si innescano spostamenti non più trascurabili ed è in generale necessario studiare le condizioni di equilibrio della struttura tenendo conto della configurazione deformata della struttura, considerando le sollecitazioni aggiuntive prodotte ad esempio dagli sforzi assiali agenti nelle membrature in presenza di spostamenti trasversali non più trascurabili. Le equazioni di equilibrio sono in tal caso non lineari in quanto dipendenti dalla deformata incognita della struttura, dando luogo alla cosiddetta *non linearità geometrica*.

L'analisi della sollecitazioni in presenza di non linearità geometrica può essere affrontata con differenti livelli di accuratezza a seconda delle semplificazioni che si introducono. Se si ammettono ancora le ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni, pur considerando nella scrittura delle equazioni di equilibrio l'effetto non

lineare degli spostamenti, si parla di *teoria del secondo ordine*, che sarà trattata in questo capitolo con riferimento alle strutture costituite da materiale a comportamento elastico-lineare. Nel successivo capitolo 9, si tratterà anche l'analisi delle sollecitazioni in regime di *spostamenti finiti o grandi*, da considerare come una teoria di ordine superiore.

Il fenomeno dell'instabilità è spesso poco influenzato dalla resistenza del materiale, mentre dipende principalmente dalla geometria e dalla forma della struttura, che ne definiscono la *snellezza*, e dalla rigidità del materiale, rappresentata principalmente dal suo modulo elastico. Il presente capitolo è dedicato alle strutture aventi comportamento elastico-lineare, per le quali saranno affrontate essenzialmente due problematiche: a) la determinazione del *moltiplicatore critico* di instabilità, cioè di quel moltiplicatore dei carichi per il quale si presenta il fenomeno dell'instabilità elastica; b) l'analisi strutturale in presenza di *effetti del secondo ordine*, cioè delle sollecitazioni aggiuntive prodotte dai carichi assiali per gli spostamenti trasversali delle membrature. Le suddette problematiche saranno dapprima sviluppate con riferimento all'asta singola e successivamente estese alle strutture intelaiate.

## 8.2 La stabilità dell'equilibrio della “trave di Eulero”

Il problema della stabilità dell'equilibrio di un'asta compressa incernierata alle estremità costituisce storicamente il problema base dell'instabilità dell'equilibrio, impostato e risolto da Eulero nel 1744 ([1],[2]) facendo uso dell'approccio diretto che va sotto il nome di *metodo dell'equilibrio*. L'altro approccio correntemente utilizzato per la soluzione dei problemi di instabilità è costituito dal *metodo energetico* ([2],[3],[4]). Nel prosieguo, per brevità, si applicherà soltanto il metodo dell'equilibrio.

### 8.2.1 La “trave di Eulero” caricata assialmente

La “trave di Eulero” è una trave perfettamente rettilinea, incernierata alle estremità, soggetta ad un carico assiale perfettamente centrato ed eventualmente a carichi trasversali (Fig. 8.1), cui è associato un diagramma dei momenti flettenti del I ordine  $M_I(x)$ .

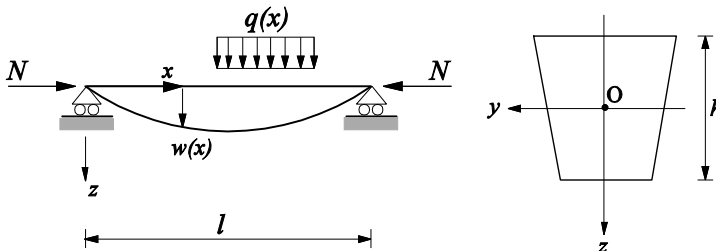


Fig. 8.1: La trave di Eulero

Si ritengono, inoltre, valide le ipotesi della teoria tecnica della trave di Bernoulli.

Considerando la trave soggetta al solo carico assiale, la configurazione della trave senza inflessioni trasversali è di equilibrio stabile fino ad un particolare valore del carico per il quale la configurazione indeformata diventa instabile e sono quindi possibili configurazioni deformate di equilibrio. L'equilibrio della membratura nella configurazione deformata è espresso dalla seguente equazione, che rappresenta l'uguaglianza tra i momenti flettenti interni  $M = -EI \cdot w''$ , ricavati dall'usuale relazione valida per la trave di Bernoulli nell'ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni<sup>(1)</sup>, ed i momenti esterni  $M = N \cdot w$  prodotti dal carico assiale  $N$  per gli spostamenti trasversali  $w$  della trave:

$$-EI \cdot w'' = N \cdot w \Rightarrow EI \cdot w'' + N \cdot w = 0 \quad (8.1)$$

da cui:

$$w'' + k^2 w = 0 \quad \text{con } k = \sqrt{\frac{N}{EI}} \quad (8.2)$$

In sostanza nell'ambito della *teoria del secondo ordine* gli spostamenti sono considerati piccoli, talché sia ancora possibile esprimere il momento in funzione delle derivate seconde degli spostamenti, ma pur sempre tali da influenzare l'equilibrio tramite i momenti flettenti  $M = N \cdot w$ : ciò equivale a rimuovere parzialmente l'ipotesi di piccoli spostamenti, mentre nella *teoria del primo ordine* tale ipotesi viene applicata nella sua interezza.

L'equazione differenziale (8.2) per  $N > 0$  (sforzo normale di compressione) ammette la seguente soluzione generale

$$w(x) = C_1 \cdot \sin kx + C_2 \cos kx \quad (8.3)$$

le cui costanti  $C_1$  e  $C_2$ , per la trave vincolata come in figura 8.1, si ricavano dalle ovvie condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} w(x=0) = 0 &\Rightarrow C_2 = 0 \\ w(x=l) = 0 &\Rightarrow C_1 \cdot \sin kl = 0 \end{aligned} \quad (8.4)$$

<sup>(1)</sup> Come è noto, la curvatura di una membratura inflessa viene espressa in generale dal numeratore della seguente relazione, trascurando nell'ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni ( $dw/dx \ll 1$ ) il quadrato della derivata prima rispetto all'unità:

$$\frac{1}{r} = -\frac{w''}{\sqrt{1 - (w')^2}} \cong -w''$$

Dalle (8.4) si deduce che sono possibili spostamenti non nulli se e solo se

$$kl = n\pi \quad (n = 1, \dots, \infty) \quad (8.5)$$

che, sfruttando la definizione (8.2), corrisponde ai seguenti valori del carico assiale:

$$N_{cr,n} = n^2 \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (n = 1, \dots, \infty) \quad (8.6)$$

Il più piccolo valore tra quelli definiti dalla (8.6), ottenibile per  $n = 1$ , rappresenta il *carico critico euleriano*

$$N_{cr} \equiv N_{cr,1} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (8.7)$$

definibile come il carico critico di instabilità di una colonna elastica perfetta caricata assialmente, in corrispondenza del quale sono possibili configurazioni deformate di equilibrio diverse da quella rettilinea. Per questo motivo si parla anche di *biforcazione dell'equilibrio*, in quanto il carico critico così definito segna il passaggio dalla deformata rettilinea di equilibrio stabile a deformate flessionali caratterizzate da condizioni di equilibrio indifferente, nel senso che per  $N=N_{cr}$  l'ampiezza della deformata può essere qualsiasi. Infatti la deformata associata al carico critico è fornita dalla seguente relazione:

$$w(x) = C_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \quad (8.8)$$

essendo  $C_1$  una costante arbitraria, che, stanti le (8.4) e (8.5), rimane indefinita. Il relativo diagramma carico-spostamento trasversale ( $N-w$ ) è costituito dal segmento rettilineo lungo l'asse delle ordinate per  $N < N_{cr}$ , e dal semiasse orizzontale passante per  $N=N_{cr}$ , rappresentato in Fig. 8.2 ( $w_{o/l=0}$ ).

Dividendo per l'area  $A$  della sezione retta il primo ed il secondo membro della (8.7), si ricava la *tensione critica*

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \frac{1}{A} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (8.9)$$

dove la quantità dimensionale  $\lambda = l/i$  rappresenta la *snellezza dell'asta*, essendo  $i$  il raggio di inerzia della sezione retta nel piano di inflessione ( $i = \sqrt{I/A}$ ). Pertanto, la tensione critica  $\sigma_{cr}$  diminuisce proporzionalmente al quadrato della snellezza  $\lambda$ , per cui appare evidente che al crescere della lunghezza  $l$  della membratura ed al diminuire della rigidezza flessionale, rappresentata dal raggio d'inerzia  $i$  della sezione e dal modulo elastico  $E$  del materiale, diventa sempre più pericoloso il fenomeno della instabilità (Fig. 8.3).

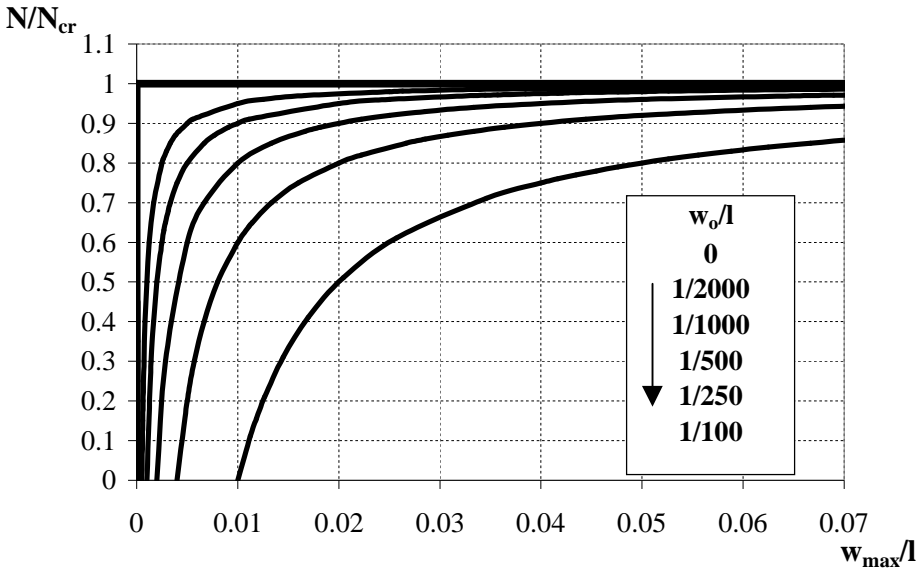


Fig. 8.2: Diagramma  $N-w$  al variare della freccia iniziale

D'altro canto i materiali strutturali hanno valori finiti di resistenza, per cui l'iperbole di Eulero è limitata superiormente dalla resistenza a compressione o dalla tensione di snervamento del materiale. Il valore  $\lambda_0$  della snellezza per cui la tensione critica euleriana eguaglia il limite di resistenza del materiale, indicato genericamente con  $f_y$ , vale:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_0^2} = f_y \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (8.10)$$

che, utilizzando valori tipici della resistenza e del modulo elastico, assume per il calcestruzzo e l'acciaio strutturale i seguenti valori

- calcestruzzo:  $f_c = 25 \text{ N/mm}^2$  ,  $E_c = 30472 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow \lambda_0 \cong 110$
- acciaio:  $f_y = 355 \text{ N/mm}^2$  ,  $E_y = 210000 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow \lambda_0 \cong 76$

In sostanza l'insorgere dell'instabilità per membrature metalliche avviene per valori della snellezza limite  $\lambda_0$  più bassi di quelli tipici delle membrature in calcestruzzo, materiale caratterizzato da un rapporto rigidezza/resistenza ( $E/f_y$ ) più favorevole rispetto all'acciaio (Fig. 8.4).

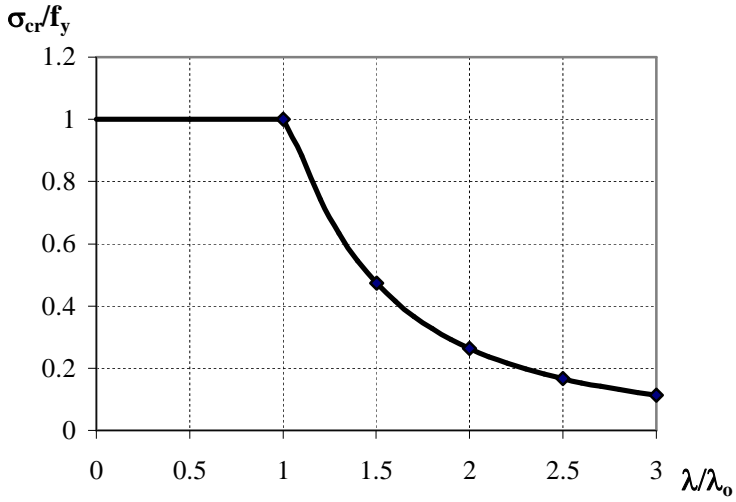


Fig. 8.3: Tensione critica in funzione del rapporto  $\lambda/\lambda_0$

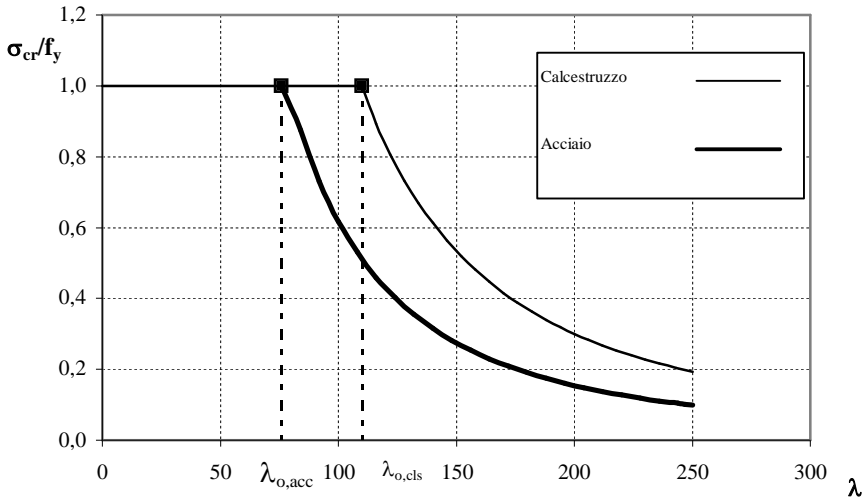


Fig. 8.4: Curve della tensione critica per elementi di acciaio e di calcestruzzo

Un altro parametro che influisce significativamente sul carico critico di un'asta è rappresentato dai vincoli alle estremità, che influenzano la forma della deformata instabile. Si può facilmente osservare che la relazione (8.9) rimane valida al mutare delle condizioni di vincolo, con l'accortezza di<sup>(2)</sup> valutare la snellezza  $\lambda$  con riferimento alla lunghezza libera di inflessione  $l_0$  (distanza tra due punti di flesso successivi della deformata):

$$\lambda = \frac{l_0}{i} = \frac{\beta l}{i} \tag{8.11}$$

Nella relazione precedente  $\beta$  rappresenta un coefficiente dipendente dalla condizione vincolare alle estremità. In Fig. 8.5 sono riportate le lunghezze di libera inflessione per i classici casi di vincoli ideali.

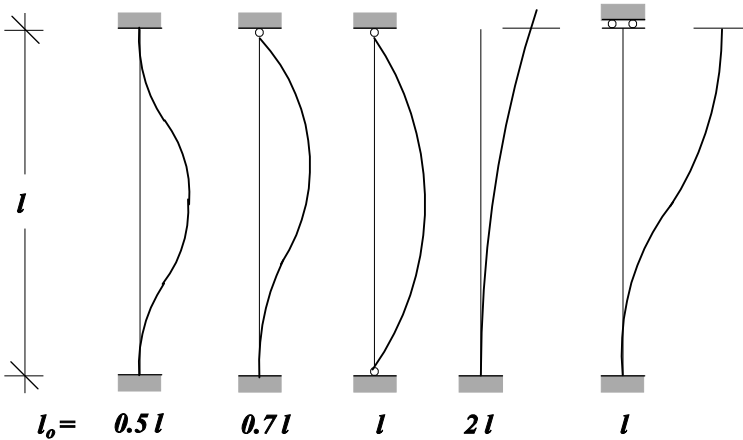


Fig. 8.5: Colonne con differenti vincoli alle estremità

### 8.2.2 La trave di Eulero in presenza di imperfezioni iniziali o di eccentricità del carico

Rispetto all'asta di Eulero, assunta perfettamente rettilinea, le membrature reali sono generalmente caratterizzate da imperfezioni della linea d'asse, dette *imperfezioni geometriche*. Inoltre, per la presenza di carichi trasversali o per l'eccentricità del carico assiale, sono generalmente presenti momenti flettenti del I ordine, che determinano

<sup>(2)</sup> Per tener conto di ciò occorre una diversa definizione delle condizioni al contorno (8.4) in dipendenza delle condizioni vincolari.

deformate flessionali della linea d'asse della membratura. Lo studio di questi due casi può essere affrontato matematicamente in maniera simile al caso già trattato, come illustrato nel seguito.

Considerando infatti un'asta caratterizzata da una deformata iniziale  $w_0(x)$ , dovuta ad imperfezioni geometriche o a momenti flettenti del I ordine indotti da carichi esterni, si ottiene che il momento complessivo, comprensivo degli effetti del II ordine, vale:

$$M(x) = M_I(x) + N \cdot w = -EI \cdot w_0'' + N \cdot w \quad (8.12)$$

da cui

$$EI \cdot w'' + N \cdot w = EI \cdot w_0'' \quad (8.13)$$

che, utilizzando la definizione di  $k$  data nella (8.2), diventa:

$$w'' + k^2 w = w_0'' \quad (8.14)$$

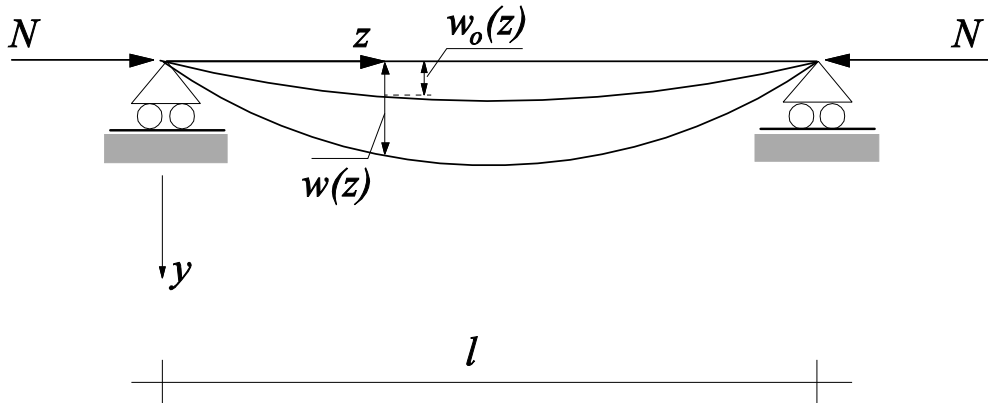


Fig. 8.6: La trave di Eulero con deformata del I ordine  $w_0(x)$

Esprimendo, senza perdita di generalità, la deformata del primo ordine  $w_0$  in serie seno di Fourier:

$$w_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{0,n} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (8.15)$$

i cui coefficienti  $a_{0,n}$  sono forniti dalla relazione

$$a_{0,n} = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l w_0(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (8.16)$$

si ottiene che anche la soluzione dell'equazione differenziale (8.14) è esprimibile in serie seno di Fourier:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (8.17)$$

Infatti l'espressione precedente soddisfa implicitamente le condizioni al contorno ( $w(x) = 0$  per  $x = 0$  e  $x = l$ ), essendo affine all'espressione (8.15) della deformata del I ordine, ed inoltre, sostituendo le (8.15) ed (8.17) nella (8.14), si ottiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( k^2 - \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right) \cdot a_n + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \cdot a_{0,n} \right] \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} = 0 \quad (8.18)$$

Poiché le funzioni  $\sin(n\pi x/l)$  per  $n=1, \dots, \infty$  sono linearmente indipendenti, il soddisfacimento dell'equazione (8.18) per ogni valore di  $x$  richiede che i coefficienti dell'equazione siano identicamente nulli, da cui si ricava l'espressione generale dell'ampiezza della  $n$ -ma armonica dello sviluppo in serie (8.17):

$$a_n = a_{0,n} \cdot \frac{n^2 \pi^2 / l^2}{n^2 \pi^2 / l^2 - k^2} = a_{0,n} \cdot \frac{1}{1 - N/N_{cr,n}} \quad (8.19)$$

Se si considera soltanto il primo termine degli sviluppi in serie (8.15) e (8.17), ammettendo una approssimazione generalmente modesta, la funzione spostamento totale si esprime nel modo seguente:

$$w(x) = \frac{a_{0,1}}{1 - N/N_{cr,1}} \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \quad (8.20)$$

e lo spostamento massimo in corrispondenza della mezzzeria dell'elemento vale:

$$w_{\max} = \frac{a_{0,1}}{1 - N/N_{cr,1}} \quad (8.21)$$

mentre l'incremento di spostamento dovuto agli effetti del secondo ordine vale:

$$w_{II} = w_{\max} - w_0 = a_{0,1} \cdot \frac{N/N_{cr,1}}{1 - N/N_{cr,1}} \quad (8.22)$$

La relazione (8.21) evidenzia che, in presenza di imperfezioni della linea d'asse, la deformata della membratura si incrementa secondo un fattore dipendente dal rapporto  $N/N_{cr}$ , con spostamenti che tendono all'infinito quando il carico assiale si avvicina al carico critico  $N_{cr} = N_{cr,1}$ .

Considerando il legame differenziale esistente tra momento flettente e deformata, le relazioni (8.21) e (8.22) precedentemente ricavate consentono di valutare le sollecitazioni del II ordine amplificando quelle del I ordine. Considerando il solo primo termine dello sviluppo in serie si ottiene:

$$M_{tot} = \frac{M_{0,1}}{1 - N/N_{cr}} = C \cdot M_1 \quad (8.23)$$

essendo  $C$  il coefficiente di amplificazione funzione del rapporto  $N/N_{cr}$ :

$$C = \frac{1}{1 - N/N_{cr}} \quad (8.24)$$

### 8.2.3 Applicazione della relazione (8.21) ad aste pressoinflesse

Un'interessante applicazione della relazione (8.21) riguarda la determinazione del carico ultimo di colonne dotate di imperfezioni iniziali  $w_0$  della linea d'asse e aventi capacità di resistenza limitata delle sezioni.

Si osserva anzitutto che le curve  $N-w_{max}$ , stante la (8.21), si discostano dall'andamento lineare in misura crescente all'aumentare dell'imperfezione iniziale  $w_0$ , come rappresentato in Fig. 8.2. La stessa figura mostra, inoltre, che il carico critico euleriano rappresenta anche in questo caso il valore del carico normale per il quale gli spostamenti trasversali tendono all'infinito.

Se poi si tiene conto della resistenza limitata delle sezioni è possibile ricavare il carico ultimo della colonna al variare dell'imperfezione  $w_0$ . A tal fine si assume il seguente dominio di resistenza, valido in forma semplificata per sezioni di acciaio a doppio T pressoinflesse:

$$\frac{N}{N_{pl}} + \frac{M}{M_{pl}} = 1 \quad (8.25)$$

essendo  $N_{pl}$  e  $M_{pl}$  rispettivamente lo sforzo normale plastico ed il momento plastico della sezione retta. Esprimendo nella (8.25) il momento flettente in funzione dello spostamento massimo nella sezione critica ( $M=N \cdot w_{max}$ ), si ottiene:

$$\frac{N}{N_{pl}} + \frac{N \cdot w_{max}}{M_{pl}} = 1 \Rightarrow \frac{N}{N_{pl}} = \frac{1}{1 + \frac{N_{pl}}{M_{pl}} \cdot w_{max}} \quad (8.26)$$

L'intersezione tra il dominio definito dalla (8.26) e le curve  $N-w_{max}$  di Fig. 8.2 fornisce il valore del carico ultimo che, come mostrato in Fig. 8.7, si riduce significativamente al crescere dell'imperfezione strutturale.

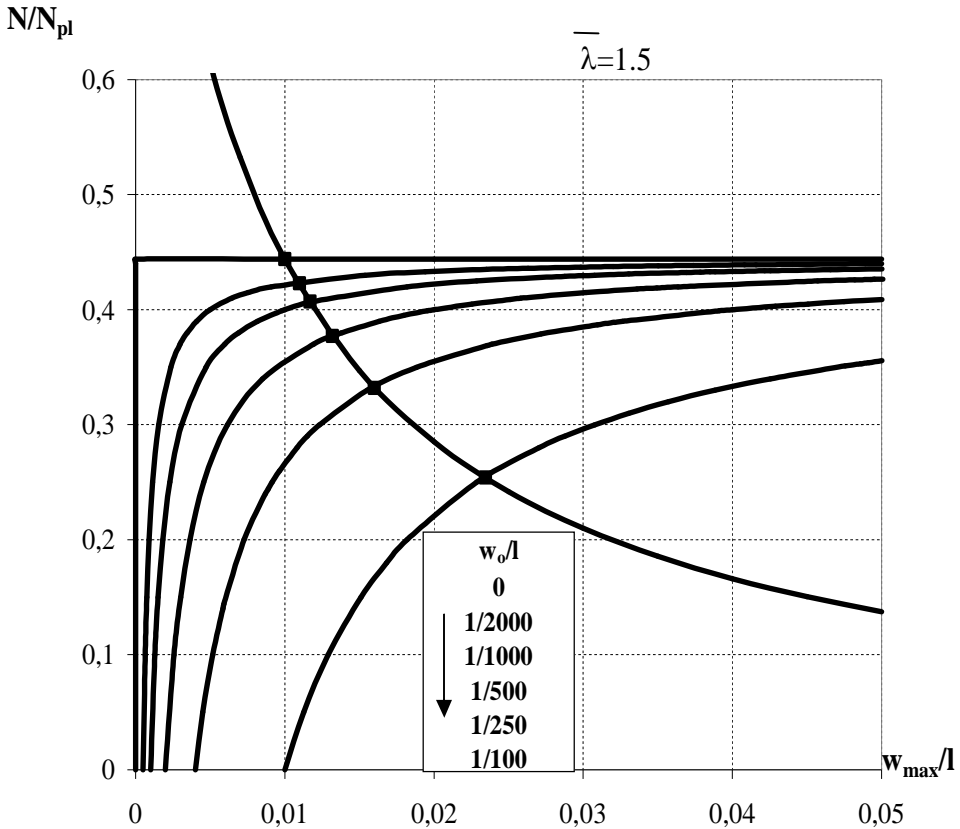


Fig. 8.7: Determinazione del carico ultimo per un'asta imperfetta

### 8.3 I coefficienti di deformabilità e le rotazioni dovute ai carichi utilizzando le funzioni di stabilità

L'analisi delle sollecitazioni per strutture intelaiate in presenza di effetti del II ordine nell'ambito del metodo degli spostamenti richiede la determinazione della matrice di