

Metodi Iterativi

$$Ax = b \quad (1)$$

Metodi diretti: forniscono una **soluzione esatta** (a meno degli errori di arrotondamento) in un **numero finito di passi**. La complessità è $O(n^3)$ e non si riduce nel caso di matrici sparse (nel caso di sparsità non strutturata) a causa del fenomeno di *fill-in*. Inadatti per problemi di grandi dimensione e sparsi

Per sistemi con matrici sparse e di ordine elevato, una alternativa praticabile è offerta dai **metodi iterativi**, in cui il nucleo computazionale consiste in prodotti matrice vettore.

Generico metodo iterativo per (1)

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2)$$

$$(T \text{ Matrice di iterazione}) \quad (3)$$

Metodi Iterativi (generalità)

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$$

I metodi iterativi lasciano inalterata la struttura di A . Richiedono però di affrontare una serie di questioni:

- Costruzione della matrice T
- Stabilire ipotesi che garantiscano la convergenza della successione $\{x^{(k)}\}$ alla soluzione di (1).
- Scelta della *soluzione iniziale* $x^{(0)}$
- Analizzare la velocità di convergenza, complessità computazionale e stima dell'errore.
- Stabilire un criterio di arresto.

Metodi Iterativi (generalità)

Assegnata un'equazione

$$Ax = b; \quad (4)$$

a partire da una stima iniziale $x^{(0)}$ si costruisce una successione $\{x^{(k)}\}$, costruita mediante la formula iterativa

$$x^{(k+1)} = \varphi_k \left(x^{(k)}, x^{(k-1)}, \dots, x^{(k-m+1)} \right) \quad (5)$$

tale che $\{x^{(k)}\} \rightarrow x^*$ con x^* soluzione di (4).

- m - **ordine del metodo**;
- Se φ_k non dipende dal passo il metodo si dice **stazionario**;
- Se φ_k dipende linearmente da $x^{(k)}, x^{(k-1)}, \dots, x^{(k-m+1)}$ il metodo si dice **lineare**.
- Il metodo lineare $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$ (lineare, stazionario, di ordine 0) si dice **consistente** sse

$$x^* = Tx^* + c$$

Metodi Iterativi (generalità)

Consistenza $\not\Rightarrow$ Convergenza

Esempio. Si consideri il sistema

$$Ax = b \quad \text{con} \quad A = 2I \quad \left(x^* = \frac{1}{2}b \right)$$

Il metodo iterativo

$$x^{(k+1)} = -x^{(k)} + b$$

è chiaramente consistente. Tuttavia, per qualsiasi punto iniziale $x^{(0)} \neq x^*$ si ha

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= -x^{(0)} + b, \quad x^{(2)} = -x^{(1)} + b = x^{(0)} \dots, x^{(1)} = -x^{(0)} + b \\ x^{(2k)} &= x^{(0)}, \quad x^{(2k+1)} = -x^{(0)} + b \dots \end{aligned}$$

Convergenza di un Metodo (richiami)

ordine di convergenza

Si consideri la successione $x^{(k)}$ convergente ad $x^{(*)}$. Si dice che la successione ha ordine di convergenza $p > 0$ se esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\lim_k \frac{\|e^{(k+1)}\|}{\|e^{(k)}\|^p} = C$$

$C < 1, p = 1$ Convergenza lineare

$C = 1, p = 1$ Convergenza sublineare

$C = 0, p = 1$ Convergenza superlineare

$p = 2$ Convergenza quadratica

DEFINIZIONE: Un metodo iterativo converge **localmente** ad $x^{(*)}$ se la convergenza della successione $x^{(k)}$ da esso generata dipende dalla scelta di $x^{(0)}$. Il procedimento è **globalmente** convergente quando la convergenza non dipende dalla scelta di $x^{(0)}$.

Metodi Iterativi (CONVERGENZA)

Teorema - convergenza di un metodo consistente (tale cioè che $x^* = Tx^* + c$)

$$x^{(k+1)} \rightarrow x^* \Leftrightarrow \rho(T) < 1$$

Dimostrazione. Si osservi che, posto $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$, si ha

$$\begin{aligned} e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x^* &= Tx^{(k)} + c - x^* \\ Tx^{(k)} + c - (Tx^* + c) &= T(x^{(k)} - x^*) = Te^{(k)}, \end{aligned}$$

e quindi, per un metodo consistente si ha in generale

$$e^{(k+1)} = Te^{(k)} = T^k e^{(0)} \quad (6)$$

\Rightarrow Da $T^k e^{(0)} \rightarrow 0$ segue che $T^k \rightarrow 0$; se $\lambda \in \text{spec}(T)$ con $Tv = \lambda v$ allora $T^k v = \lambda^k v$ da cui $\lambda^k \rightarrow 0$ e quindi $|\lambda| < 1$ da cui la tesi

\Leftarrow Poiché $\rho(T) < 1$, essendo $\rho(T) = \inf_{\|\cdot\|} \|T\|$, Esiste una norma consistente tale che $\|T\| < \rho(T) + \varepsilon < 1$. $\|T^k\| \leq \|T\|^k$ e quindi $\|T^k\| \rightarrow 0$ e da (6) segue la tesi.

Metodi Iterativi (CONVERGENZA)

Corollario - Nelle ipotesi del teorema precedente

Se $\|T\| < 1$ per una qualsiasi norma naturale, allora la successione $\{x^{(k)}\}$ generata dal metodo iterativo

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$$

converge a x^* e valgono le seguenti maggiorazioni per l'errore:

$$\|x^* - x^{(k)}\| \leq \|T\|^k \cdot \|x^* - x^{(0)}\|$$

$$\|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

Il corollario offre una condizione molto piú "operativa" per studiare la convergenza di un metodo iterativo.

- $\|T^k\|$ - **fattore di riduzione** dopo k iterazioni
- σ - **fattore medio di riduzione** sulle prime k iterazione: è quel numero tale che

$$\sigma^k = \frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|}$$

In media l'errore è moltiplicato per σ a ciascuna iterazione.

$$\sigma \leq \|T^k\|^{1/k}$$

- $R_k(T) = -\frac{1}{k} \ln (\|T^k\|)$ - **velocità media di convergenza**.
Quante iterazioni sono necessarie per avere

$$\frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|} < \varepsilon$$

Osserviamo che è $\frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|} < \|T^k\|$, e

$$\|T^k\| < \varepsilon \Leftrightarrow \ln (\|T^k\|^{1/k}) < (1/k) \ln \varepsilon \Leftrightarrow k > \frac{-\ln \varepsilon}{-\ln (\|T^k\|^{1/k})} = \frac{-\ln \varepsilon}{R_k(T)}$$

"La velocità media di convergenza è inversamente proporzionale al numero di iterazioni"

Metodi Iterativi (CONVERGENZA)

Quante iterazioni per "guadagnare m cifre significative sull'errore"?

$$\|e^{(k)}\| \leq 10^{-m} \|e^{(0)}\| \quad (7)$$

Ricordiamo che, per ogni norma naturale $\|\cdot\|$ si ha $\|e^{(k)}\| = \|T^k e^{(0)}\| \leq \|T\|^k \|e^{(0)}\|$, ed essendo $\rho(T^k) = \rho(T)^k$, si avrà in particolare che (7) vale per k tale che

$$\rho(T)^k \leq 10^{-m} \Leftrightarrow k \geq \frac{-m}{\log(\rho(T))}$$

Esempio $m = 6$

$m = 6$	
$\rho(T)$	$k \geq$
0.9	132
0.5	20
0.1	6
0.05	5

$R = -\log(\rho(T))$ è la **velocità asintotica di convergenza**. Al crescere di R si riduce il numero di iterazioni.

Metodi Iterativi (splitting di A)

$A = P - N$ e quindi $Ax = b; \Leftrightarrow (P - N)x = b \Leftrightarrow Px = Nx + b$
 $x = P^{-1}(Nx + b)$ suggerisce il metodo iterativo

$$x^{(k+1)} = P^{-1}Nx^{(k)} + P^{-1}b \quad (8)$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + P^{-1}r^{(k)} \quad (9)$$

dove $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ è il residuo nell'iterata $x^{(k)}$.

- $T = P^{-1}N = I - P^{-1}A$ (matrice di iterazione), $c = P^{-1}b$
- P matrice di **precondizionamento** (non singolare e facilmente invertibile)
- Consistenza? (*)

(*) Si consideri $x^{(0)} = x^* = A^{-1}b$; applicando (8) si ha

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= P^{-1}NA^{-1}b + P^{-1}b = P^{-1}(P - A)A^{-1}b + P^{-1}b \\ &= A^{-1}b - P^{-1}b + P^{-1}b = A^{-1}b = x^{(0)} \end{aligned}$$

Metodi Iterativi (splitting di A)

Teorema

Metodi Iterativi (splitting di A)

Lo splitting

$$(A = D - L - U) \quad (10)$$

con D diagonale, L triangolare inferiore e U triangolare superiore suggerisce i seguenti schemi iterativi per il sistema $Ax = b$:

$$\begin{array}{l}
 Dx = (L + U)x + b \\
 (D - L)x = Ux + b \\
 (D - U)x = Lx + b
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b \\
 x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k)} + (D - L)^{-1}b \\
 x^{(k+1)} = (D - U)^{-1}Lx^{(k)} + (D - U)^{-1}b
 \end{array}$$

Metodo di Jacobi (J)

$$Ax = b \quad T = (D)^{-1}(L + U), \quad c = (D)^{-1}b$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + (D)^{-1}b \quad (11)$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + D^{-1}r^{(k)} \quad (12)$$

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} + D^{-1}Ar^{(k)} = (I + D^{-1}A)r^{(k)} \quad (13)$$

Metodo di Jacobi (J)

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j^{(k)} \right)$$

Metodo di Jacobi: convergenza

Poiché $T_J = D^{-1}(L + U)$, si ha che

$$\|T_J\|_\infty = \max_i \sum_{j \neq i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|$$

e quindi, condizione sufficiente perché il metodo sia convergente è che sia

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

Analogamente si può ragionare utilizzando la norma $\|\cdot\|_1$, pervenendo al seguente risultato:

Convergenza per matrici diagonali dominanti (J)

Il metodo di Jacobi converge per matrici a **dominanza diagonale** stretta, per righe o per colonne.

Metodo di Gauss Seidel (GS)

$$Ax = b \quad T = (D - L)^{-1}U, \quad c = (D - L)^{-1}b \quad (14)$$

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k)} + (D - L)^{-1}b \quad (15)$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + b) \quad (16)$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + (D - L)^{-1}r^{(k)} \quad (17)$$

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} + A(D - L)^{-1}r^{(k)} \quad (18)$$

Metodo di Gauss Seidel

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j < i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j > i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Metodo di GS (convergenza)

Dimostriamo che se A è strettamente diagonale dominante allora gli autovalori di T_{GS} sono < 1 . Osserviamo che gli autovalori di T_{GS} sono le soluzioni di

$$\det(\lambda I - T_{GS}) = 0$$

$$\det(\lambda I - T_{GS}) = \det(\lambda I - (D - L)^{-1}U) = \det((D - L)^{-1}(\lambda D - \lambda L - U))$$

Osserviamo che $(D - L)^{-1}$ è non singolare (una matrice a dominanza diagonale stretta è non singolare (teorema di Gershgorin)); se la matrice $A = D - L - U$ è a dominanza diagonale stretta, a maggior ragione lo è la matrice $\lambda D - \lambda L - U$ per $\lambda > 1$, e da questo segue che gli autovalori di T devono essere minori di 1 in modulo.

Convergenza per matrici diagonali dominanti (GS)

Il metodo di Gauss Seidel converge per matrici a **dominanza diagonale** stretta, per righe o per colonne.

Convergenza: Metodo di Gauss Seidel e Jacobi

Non è possibile, in generale, affermare che uno dei due metodi è superiore all'altro. Tuttavia, in alcuni casi (significativi per le applicazioni) è possibile affermare che GS è superiore rispetto a J.

Teorema (Stein-Rosemberg)

Se $a_{ii} > 0$ e $a_{ij} < 0$ se $i \neq j$, allora, per le matrici di iterazione dei metodi di Jacobi e Gauss Seidel si verifica una e una sola delle condizioni seguenti:

- ❶ $\rho(T_J) = \rho(T_{GS}) = 1$;
- ❷ $\rho(T_J) = \rho(T_{GS}) = 0$;
- ❸ $1 < \rho(T_J) < \rho(T_{GS})$;
- ❹ $1 > \rho(T_J) > \rho(T_{GS})^a$;

^aYoung, D. M., Iterative solution of large linear systems, Academic Press, New York, 1971.

Teorema (matrici tridiagonali)

Se A è una matrice tridiagonale, allora $\rho(T_J)^2 = \rho(T_{GS})$

Convergenza: Metodo di Gauss Seidel e Jacobi

Teorema di Householder-John(HJ)

Se P e Q sono matrici reali tali che P e $P - Q - Q^T$ sono simmetriche e definite positive, allora il raggio spettrale della matrice $H = -(P - Q)^{-1}Q$ è strettamente minore di 1.

Teorema (Convergenza di J e GS per Matrici simmetriche definite positive)

- 1 Se A è reale simmetrica definita positiva (sdp), allora Gauss Seidel converge.
- 2 Se A è reale simmetrica definita positiva, e tale è anche la matrice $2D - A$, allora il metodo di Jacobi converge.

dimostrazione. Si utilizza il teorema di HJ. Si osservi che, stante la simmetria, la partizione $A = D - L - U$ può essere scritta come $A = D - U^T - U$.

- 1 $T = (D - U^T)^{-1}U$; in THJ, sia $P = A$, $Q = -U$. Essendo la matrice $A + U + U^T = D$ sdp, le ipotesi del teorema valgono, e $\rho(-(A + U)^{-1}(-U)) = \rho((D - L)^{-1}(U)) < 1$;
- 2 $T = (D)^{-1}(U^T + U)$; in THJ, sia $P = A$, $Q = A - D$. Essendo la matrice $A - (A - D) - (A - D) = 2D - A$ sdp, le ipotesi del teorema valgono, e $\rho(-(A - A + D)^{-1}(A - D)) = \rho(-D^{-1}(-L - U)) < 1$;

Convergenza: Metodo di Gauss Seidel e Jacobi

Nelle ipotesi del teorema di Stein Rosenberg, e in caso di matrici tridiagonali:

- I due metodi hanno lo stesso comportamento: se converge uno, converge anche l'altro;
- Il metodo di Gauss Seidel converge più velocemente di quello di Jacobi;
- nelle ipotesi del secondo teorema, in particolare Jacobi richiede (orientativamente) un numero di iterazioni doppio rispetto a GS.

Le ipotesi del teorema di SR si verificano, ad esempio nel caso discretizzazione di PDE di tipo ellittico.

Matrici definite positive si presentano di frequente, ad esempio, nella minimizzazione di funzioni convesse.

Tecniche di Rilassamento

Obiettivo: **Ridurre il raggio spettrale della matrice.**

Metodo di Jacobi rilassato (JOR)

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega D^{-1} r^{(k)}$$

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \omega D^{-1} (L + U - D)x^{(k)} + \omega D^{-1} b = \\ \omega D^{-1} \left(Dx^{(k)} \frac{1}{\omega} \right) &+ \omega D^{-1} (L + U - D)x^{(k)} + \omega D^{-1} b = \\ &+ \omega D^{-1} \left(L + U + \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) D \right) x^{(k)} + \omega D^{-1} b \end{aligned}$$

(JOR)

$$\begin{aligned} x_{JOR}^{(k+1)} &= \omega x_J^{(k+1)} + (1 - \omega)x^{(k)} \\ x_i^{(k+1)} &= \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right) + (1 - \omega)x_i^{(k)} \end{aligned}$$

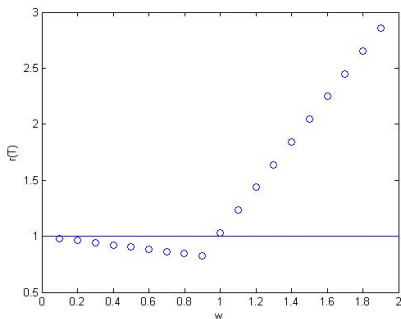
$\omega \in (0, 1) \Rightarrow$ **sottorilassamento**; $\omega > 1 \Rightarrow$ **sovrarilassamento**

(JOR)

$$Ax = b \quad T = \omega D^{-1} \left(L + U + \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) D \right), \quad c = \omega D^{-1} b$$

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c; \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega D^{-1} r^{(k)}$$

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} + \omega D^{-1} Ar^{(k)} = (I + \omega D^{-1} A)r^{(k)}$$

**ESEMPIO**

$$A = \begin{pmatrix} 2.8 & 2 & 1 \\ 2 & 2.2 & 1 \\ 1 & 1 & 3.5 \end{pmatrix}$$

$$w = 0.1, 0.2, \dots, 1.9, 2$$

Metodi di Gauss Seidel rilassato (SOR)

$$Ax = b \quad T = \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1} \left[\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D + U\right], \quad c = \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1} b$$

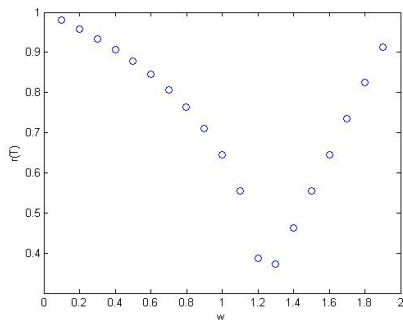
$$x^{(k+1)} = \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1} \left[\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D + U\right] x^{(k)} + \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1} b \quad (19)$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1} r^{(k)} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} x^{(k)} + \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1} r^{(k)} &= \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1} \left(\frac{1}{\omega}D - L\right) x^{(k)} + \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1} (b - Ax^{(k)}) = \\ &= \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1} \left(\frac{1}{\omega}D - L - A\right) x^{(k)} + c \quad \left[\text{con } c = \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1} b\right] \\ &= \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1} \left(\frac{1}{\omega}D - D + U\right) x^{(k)} + c = \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1} \left[\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D + U\right] x^{(k)} + c \end{aligned}$$

Metodo di Gauss Seidel rilassato (SOR)

$$Ax = b \quad T = \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1} \left[\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D + U\right], \quad c = \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1} b$$



ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 2.8 & 2 & 1 \\ 2 & 2.2 & 1 \\ 1 & 1 & 3.5 \end{pmatrix}$$

$$w = 0.1, 0.2, \dots, 1.9, 2$$

L'ordine in cui compaiono variabili ed equazioni influenza la convergenza dei metodi iterativi.

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 2.8 & 2 & 1 \\ 2 & 2.2 & 1 \\ 1 & 1 & 3.5 \end{pmatrix}$$

$$T_J = 1.0302, \quad T_{GS} = 0.6446$$

$$\text{spec}(A) = \{0.4733, 2.5147, 5.5120\}$$

Cambiando l'ordine delle righe

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2.2 & 1 \\ 1 & 1 & 3.5 \\ 2.8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_J = 3.5768, \quad T_{GS} = 6.9486$$

$$\text{spec}(A^*) = \{5.4921, -0.7460 - 0.7987i, -0.7460 + 0.7987i\}$$

$$\begin{aligned}
 x^{(k+1)} &= \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1} \left[\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D + U\right] x^{(k)} + \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1} b \Leftrightarrow \\
 \left(\frac{1}{\omega}D - L\right) x^{(k+1)} &= \left[\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D + U\right] x^{(k)} + b \Leftrightarrow \\
 (D - \omega L) x^{(k+1)} &= [(1 - \omega)D + \omega U] x^{(k)} + \omega b \Leftrightarrow \\
 Dx^{(k+1)} &= \omega(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + b) + (1 - \omega)Dx^{(k)}
 \end{aligned}$$

GS e SOR

$$x_{SOR}^{(k+1)} = \omega x_{GS}^{(k+1)} + (1 - \omega)x^{(k)}$$

Convergenza JOR e SOR

Convergenza di JOR per matrici SDP

Teorema Se la matrice A è SDP, il metodo iterativo JOR converge per

$$0 < \omega < \frac{2}{\rho(D^{-1}A)}$$

Convergenza di SOR per matrici SDP

Teorema (Ostrowski) Se la matrice A è SDP, il metodo iterativo SOR converge per

$$0 < \omega < 2$$

Criterio di di arresto

Un metodo iterativo fornisce in generale una successione infinita di iterate $\{x^{(k)}\}$; occorre fornire un criterio di arresto. Un possibile criterio è quello di considerare il residuo $r^{(k+1)} = Ax^{(k+1)} - b$ come stima dell'errore. In alternativa è possibile considerare "la distanza" $x^{(k+1)} - x^{(k)}$ fra due iterate successive.

Errore

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k+1)}\|} < \tau$$

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \tau$$

Residuo

$$\frac{\|r^{(k+1)} - r^{(k)}\|}{\|b\|} < \tau; \quad \frac{\|r^{(k)}\|}{\|r^{(0)}\|} < \tau$$

$$\|r^{(k+1)} - r^{(k)}\| < \tau$$

Relazione fra residuo $r^{(k)}$ ed errore $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$

$r^{(k)} = Ax^{(k)} - b = A(x^{(k)} - A^{-1}b) = A(x^{(k)} - x^*) = Ae^{(k)}$ da cui $e^{(k)} = A^{-1}r^{(k)}$.
Da $Ax^* = b$ segue che è $\|1/x^*\| \leq \|A\|/\|b\|$ e quindi

$$\frac{\|e^{(k)}\|}{\|x^*\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|} = \kappa(A) \frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|}$$

Matrici di Iterazione

$$\text{Jacobi } T_J = (D)^{-1}(L + U)$$

$$\text{JOR } T_{JOR} = \omega T_J + (1 - \omega)I = I - \omega D^{-1}A$$

$$\text{Gauss Seidel } T_{GS} = (D - L)^{-1}U$$

$$\text{SOR } T_{SOR} = \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1} \left[\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D + U\right]$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rho(T_J) = 1.5000$$

$$\rho(T_{GS}) = 0.4578$$

$$\rho(T_{JOR}) = \begin{matrix} 4.0000 & 1.5000 & 0.7500 & 0.8750 & 0.9375 \end{matrix}$$

$$\omega = \begin{matrix} 2. & 1. & 0.5 & 0.25 & 0.125 \end{matrix}$$

$$\rho(T_{SOR}) = \begin{matrix} 1.0000 & 0.4578 & 0.7181 & 0.8670 & 0.9355 \end{matrix}$$

$$\omega = \begin{matrix} 2. & 1. & 0.5 & 0.25 & 0.125 \end{matrix}$$

$$\text{spec}(A) = \{1, 1, 1, 5\}$$

$$\text{spec}(2D - A) = \{-1, 3, 3, 3\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rho(T_J) &= 1 \\ \rho(T_{GS}) &= 0.2755 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(T_{JOR}) &= 3.0000 & 1.0000 & 0.6667 & 0.8333 & 0.9167 \\ & \omega = 2 & \omega = 1 & \omega = 0.5 & \omega = 0.25 & \omega = 0.125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(T_{SOR}) &= 1.0000 & 0.2755 & 0.6366 & 0.8261 & 0.9149 \\ & \omega = 2 & \omega = 1 & \omega = 0.5 & \omega = 0.25 & \omega = 0.125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{spec}(A) &= \{2, 2, 2, 6\} \\ \text{spec}(2D - A) &= \{0, 4, 4, 4\} \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rho(T_J) &= 1.8229 \\ \rho(T_{GS}) &= 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(T_{JOR}) &= 4.6458 & 1.8229 & 0.9114 & 0.9557 & 0.9779 \\ & \omega = 2 & \omega = 1 & \omega = 0.5 & \omega = 0.25 & \omega = 0.125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(T_{SOR}) &= 1.0000 & 0.5000 & 0.8859 & 0.9504 & 0.9766 \\ & \omega = 2 & \omega = 1 & \omega = 0.5 & \omega = 0.25 & \omega = 0.125 \end{aligned}$$

$$\text{spec}(A) = \{6.5414, 1, 1, 0.4586\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\rho(T_J) = 0.6076$$

$$\rho(T_{GS}) = 0.1410$$

$$\rho(T_{JOR}) = \begin{matrix} 2.21 & 0.607 & 0.637 & 0.818 & 0.9093 \\ \omega = 2 & \omega = 1 & \omega = 0.5 & \omega = 0.25 & \omega = 0.125 \end{matrix}$$

$$\rho(T_{SOR}) = \begin{matrix} 1.00 & 0.14 & 0.59 & 0.81 & 0.907 \\ \omega = 2 & \omega = 1 & \omega = 0.5 & \omega = 0.25 & \omega = 0.125 \end{matrix}$$

$$\text{spec}(A) = \{11.54, 5.45, 5, 1, 5\}$$

Metodi di Richardson

Il generico metodo iterativo $x^{k+1} = x^k + P^{-1}r^k$, costruito a partire dallo splitting $A = P - N$ e avente matrice di iterazione $T = (I - P^{-1}A)$ può essere generalizzato dalla formula iterativa

Richardson non stazionario

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k P^{-1} r^k \text{ con matrice di iterazione } T_k = (I - \alpha_k P^{-1} A)$$

Se si sceglie $\alpha_k = \alpha$ (costante) il metodo sarà stazionario (RS). Il ruolo del parametro è quello di ridurre il raggio spettrale della matrice di iterazione.

(Convergenza di RS)

Teorema Sia P invertibile e sia Λ lo spettro della matrice $P^{-1}A$. Allora RS converge sse

$$\frac{2\operatorname{Re}(\lambda)}{\alpha|\lambda|^2} > 1 \quad \text{per ogni } \lambda \in \Lambda$$

Dimostrazione osserviamo che $\text{RS converge} \Leftrightarrow \rho(I - \alpha P^{-1}A) < 1$

$\lambda \in \operatorname{spec}(P^{-1}A) \Leftrightarrow P^{-1}Av = \lambda v$ (per qualche vettore v). In particolare $(I - \alpha P^{-1}A)v = v - \alpha\lambda v = (1 - \alpha\lambda)v$ e quindi $1 - \alpha\lambda \in \operatorname{spec}(I - \alpha P^{-1}A)$. Per la convergenza occorre quindi che sia

$$|1 - \alpha\lambda| < 1 \quad \text{per ogni } \lambda \in \operatorname{spec}(P^{-1}A). \quad (21)$$

Poiché $1 - \alpha\lambda = (1 - \alpha\operatorname{Re}(\lambda)) + (\alpha\operatorname{Imm}(\lambda))$, allora (21) vale se e solo se

$$\begin{aligned} (1 - \alpha\operatorname{Re}(\lambda))^2 + (\alpha\operatorname{Imm}(\lambda))^2 &= 1 + \alpha^2\operatorname{Re}(\lambda)^2 - 2\alpha\operatorname{Re}(\lambda) + \alpha^2\operatorname{Imm}(\lambda)^2 = \\ 1 + \alpha^2|\lambda|^2 - 2\alpha\operatorname{Re}(\lambda) < 1 &\Leftrightarrow 2\alpha\operatorname{Re}(\lambda) > \alpha^2|\lambda|^2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{2\alpha\operatorname{Re}(\lambda)}{\alpha^2|\lambda|^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{2\operatorname{Re}(\lambda)}{\alpha|\lambda|^2} > 1 \quad \text{nota: tutti i } \lambda_i \text{ devono avere}$$

parte reale dello stesso segno

(Convergenza di RS)

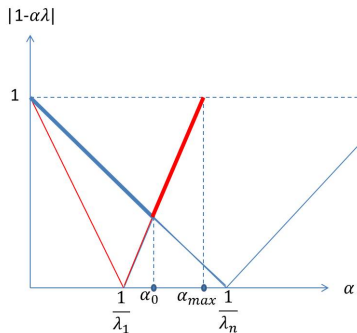
Corollario Sia P invertibile e gli autovalori di $P^{-1}A$ siano reali e positivi (con λ_{min} e λ_{max} autovalori estremi). Allora

- ❶ RS converge sse

$$\alpha < \frac{2}{\lambda_{max}}$$

- ❷ Il raggio spettrale della matrice di iterazione $I - \alpha_k P^{-1}A$ è minimo per

$$\alpha_{OPT} = \frac{2}{\lambda_{max} + \lambda_{min}}$$



Dimostrazione Si osservi che

$$\text{Spec}(I - \alpha P^{-1}A) = \{1 - \alpha\lambda_1, 1 - \alpha\lambda_2 \cdots 1 - \alpha\lambda_n\},$$

$$|1 - \alpha\lambda_i| = \begin{cases} 1 - \alpha\lambda_i & \text{se } 0 < \alpha \leq 1/\lambda_i \\ -1 + \alpha\lambda_i & \text{se } \alpha > 1/\lambda_i \end{cases}$$

con $|1 - \alpha\lambda_i| = 1$ per $\alpha = 0$ e $\alpha = \frac{2}{\lambda_i}$, e
 $|1 - \alpha\lambda_i| = 0$ per $\alpha = \frac{1}{\lambda_i}$. Quindi,

$$\rho(I - \alpha P^{-1}A) =$$

$$\max_i |1 - \alpha\lambda_i| = \begin{cases} |1 - \alpha\lambda_1| & \text{se } \alpha \geq \alpha_0 \\ |1 - \alpha\lambda_n| & \text{se } 0 \leq \alpha < \alpha_0 \end{cases}$$

dove $\alpha_0 = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$ è soluzione di $\begin{cases} 1 - \alpha\lambda_1 = y \\ -1 + \alpha\lambda_n = y \end{cases}$ e, in particolare si avrà

$$\rho(P^{-1}A) < 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{2}{\lambda_1} = \alpha_{max}, \rho(P^{-1}A) \text{ minimo per } \alpha = \alpha_0$$