GEOMETRIA ED ALGEBRA

Docente: Prof. Giuseppe Marino

Simulazione prova n.1

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA ....

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti**. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

Se non si risponde correttamente ad almeno 6 domande del test preliminare la prova è considerata non superata.

Test preliminare

1. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali e quali no:

   a) $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; (2x + 1) + z^2 - (-y + 1) = (1 - z)^2\}$

   b) $U_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : \; p(x) + p(-x) = 0\}$

   c) $U_3 = \{A \in \mathbb{R}^{2,2} : \; A + 2A_t = I_2\}$

2. Considerato il sistema lineare

$$\Sigma_h : \begin{cases} 2x - 2y + 4z = 0 \\ (h^2 + 1)x - 5y - 3z = 0 \\ -x + (h - 1)y + 3z = 0, \end{cases}$$

   stabilire per quali valori del parametro reale h:

   - la terna $(1, 1, 0)$ è soluzione;

   - la terna $(0, 1, 1)$ è soluzione.

3. Stabilire per quale valore del parametro reale h il vettore $(2, -1)$ è autovettore della matrice

$$\begin{pmatrix} h - 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Sia Σ un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

   - Se $m = n$ allora il sistema è determinato.

   - Se $m < n$ e il sistema è compatibile allora il sistema è indeterminato.

5. Definire quando m vettori di uno spazio vettoriale $V_n(\mathbb{K})$ si dicono linearmente indipendenti.

6. Siano U e W due sottospazi dello spazio $\mathbb{R}_5[x]$ e sia $dim\, U = 3$ e $dim\, W = 4$. Si determinino il valore minimo e massimo della dimensione di $U \cap W$.

7. Scrivere le equazioni di un sottospazio di dimensione 3 dello spazio vettoriale numerico reale $\mathbb{R}^5$.

8. Sia $k \in \mathbb{R}$ e si considerino i piani dello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ rappresentati dalle seguenti equazioni:

$$kx - y + 2z = 1 - k, \qquad x - y = 0, \qquad k^2 x - z = -1.$$

Determinare, se esistono, i valori di k per cui i tre piani si intersecano in una retta.

9. Scrivere una terna di numeri direttori di una retta di $\mathbb{E}^3$ ortogonale ad entrambe le rette $r : \begin{cases} x - y - z = -1 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 2 \\ y + z = 1 \end{cases}$.

10. Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$, le rette del piano euclideo $r : x + 2hy = 0$ ed $m : hx + 2y = 1$ formano un fascio improprio.

11. Scrivere l'equazione dell'asse del segmento di estremi i punti di cordinate $(-1, 1)$ e $(3, 0)$.

12. Stabilire per quali valori del parametro reale h le seguenti rette di $\mathbb{E}^3$ sono sghembe:

$$\ell : \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ x + y - z = 0. \end{cases} \qquad m : \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + ht \\ z = 2t. \end{cases}$$

GEOMETRIA ED ALGEBRA

Docente: Prof. Giuseppe Marino

Simulazione prova n.1

PRIMA PARTE

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA ....

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

RISOLVERE ALMENO DUE DEI SEGUENTI ESERCIZI

1. Sia h un parametro reale, si consideri la seguente matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} h(h^2-1) & 0 & 0 \\ 0 & h & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Posto $h = -1$, stabilire se la matrice A_3 è diagonalizzabile, determinandone, in caso affermativo una base di autovettori.

- Studiare al variare di $h \in \mathbb{R}$ il rango della matrice A_h.

2. Stabilire, per quale valore del parametro reale λ, quando l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} \lambda x + y + 2z = \lambda - 1 \\ 2x + 2y + \lambda z = 0 \\ \lambda x + y - 2z = \lambda^2 - 1 \end{cases}$$

costituisce un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Detto U tale sottospazio, se ne determinino la dimensione e una base.

Considerato il sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ rappresentato nella base naturale dal sistema

$$W : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

se ne determinino la dimensione e una base.

Determinare la dimensione ed una base di $U \cap W$ e $U + W$, stabilendo se U e W sono supplementari.

3. Fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ si considerino le rette:

$$\ell : \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 2y = 0. \end{cases} \qquad m : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$$

1) Stabilire se le rette ℓ and m sono sghembe o complanari e, in quest'ultimo caso, determinare il piano che le contiene.

2) Determinare il simmetrico del punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (1, 0, 0)$ rispetto alla retta m.

3) Calcolare la distanza tra ℓ ed m.

GEOMETRIA ED ALGEBRA

Docente: Prof. Giuseppe Marino

Simulazione prova n.1

SECONDA PARTE

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA ....

RISPONDERE AD ALMENO UNO DEI SEGUENTI QUESITI

1. Scrivere in forma estesa il generico sistema lineare Σ di m equazioni e n incognite a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$.

Enunciare il primo criterio di compatibilità.

Enunciare il teorema di Rouché-Capelli.

Considerate le due equazioni in 3 incognite $x+2y-3z=0$ e $x-y+4z=0$, aggiungere una terza equazione che non sia proporzionale a nessuna delle precedenti e tale che il sistema costituito dalle 3 equazioni ammetta ∞^1 soluzioni.

2. Sia X un sistema di t vettori indipendenti di uno spazio vettoriale $V_n(\mathbb{K})$, con $t < n$. Dimostrare che esiste un vettore $\underline{u} \notin L(X)$ e che $X \cup \{\underline{u}\}$ è ancora linearmente indipendente.

Enunciare e dimostrare il teorema del completamento ad una base.