Analisi Matematica 1

Angelo Alvino

A.A.2018-19

Indice

Capitolo 1

I numeri reali

1.1 Il principio di induzione

Assumiamo per il momento che il lettore abbia dimestichezza con la struttura $\mathbb{R}$ dei numeri reali e ne conosca le proprietà. Concentriamoci su un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, l'insieme dei naturali

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}.$$

Solitamente i naturali si introducono ponendo l'accento su un numero ridotto ed essenziale di proprietà dalle quali si deducono tutte le altre. Una di tali proprietà è nota come

Principio di induzione matematica - *Sia* $\mathbb{I}$ *un sottoinsieme di* $\mathbb{N}$ *che soddisfi le seguenti due condizioni*

i) $1 \in \mathbb{I}$,

ii) *se* $n \in \mathbb{I}$ *anche il successivo di* n *appartiene a* $\mathbb{I}$.

Allora $\mathbb{I} = \mathbb{N}$.

Tale principio si rivela un importante strumento operativo in varie situazioni.

Proposizione 1.1.1. - *Per ogni intero* n *vale la seguente identità*

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,. \tag{1.1}$$

Dimostrazione. La (1.1) sussiste per $n = 1$. Se essa vale per un particolare indice n allora

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\,.\end{aligned}$$

Tale identità corrisponde alla (1.1) con l'indice $n+1$ al posto di n. Ci troviamo quindi nella seguente situazione: se $\mathbb{I}$ è l'insieme degli indici per cui la (1.1) sussiste allora $\mathbb{I}$ gode delle proprietà i) e ii). Per il principio di induzione matematica $\mathbb{I}$ coincide con $\mathbb{N}$: la (1.1) è quindi vera per ogni n. $\square$

Introduciamo ora per ricorrenza la nozione di potenza ad esponente intero.

Definizione 1.1.1. - *Sia a un numero reale; poniamo*

$$a^0 = 1\,, \quad a^n = a^{n-1}\,a\,.$$

Proposizione 1.1.2. - *Per ogni intero n si ha*

$$1 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,. \tag{1.2}$$

Dimostrazione. La (1.2) è vera per $n = 1$. Ipotizziamo che essa sussista per un certo intero n e verifichiamola per il successivo di n

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\,.\end{aligned}$$

Per il principio di induzione matematica allora la (1.2) vale per ogni n. $\square$

Proposizione 1.1.3. - *Per ogni intero n sussiste la seguente identità*

$$1 + 2^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\,. \tag{1.3}$$

Dimostrazione. Si ha

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

da cui si ottiene facilmente la (1.3) con $n+1$ al posto di n. Per il principio di induzione la formula è dimostrata. $\square$

Per la (1.1) la (1.3) si può scrivere anche nel seguente modo

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2\,.$$

Proposizione 1.1.4. - *Se n è un intero e x un numero reale diverso da 1 allora vale l'identità*

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\,. \tag{1.4}$$

Dimostrazione. Si assuma che la (1.4), ovviamente vera per $n = 1$, sussista per un certo intero n. Si ha allora

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}$$

che è la (1.4) per il successivo di n. Sempre per il principio di induzione matematica la (1.4) vale per ogni n. □

Proposizione 1.1.5. - *Se a, b sono reali e $n \in \mathbb{N}$ si ha*

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}\, b + \cdots + a\, b^{n-2} + b^{n-1})\,. \tag{1.5}$$

Dimostrazione. La (1.5) discende da (1.4) con $x = b\, a^{-1}$ e $n - 1$ al posto di n. □

Proposizione 1.1.6. - *Per ogni $x > -1$ vale la seguente "disuguaglianza di Bernoulli"*

$$(1 + x)^n \geq 1 + n\, x\,. \tag{1.6}$$

Dimostrazione. Osservato che la (1.6) è vera per $n = 1$, nell'ipotesi che essa sussista per un indice n si ha

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n\, (1 + x) \geq (1 + nx)\, (1 + x) \\ &= 1 + (n + 1)\, x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)\, x\,, \end{aligned}$$

cioè la (1.6) con $n + 1$ al posto di n. Per il principio di induzione matematica si ha l'asserto. Il lettore individui il punto della dimostrazione in cui interviene la condizione che x sia maggiore di -1.

Definizione 1.1.2. - *Posto* $0! = 1$ *il fattoriale di un intero si definisce per ricorrenza nel modo seguente*

$$n! = n\, (n - 1)!\,.$$

Fissato n poniamo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!} \tag{1.7}$$

per ogni $k = 0, 1, \cdots, n$. Il simbolo a primo membro nella (1.7) prende il nome di "coefficiente binomiale". Esso è il numero delle combinazioni di n elementi su k posti. Si verifica facilmente la seguente identità

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \tag{1.8}$$

che viene tra l'altro utilizzata per generare il triangolo di Tartaglia.

Proposizione 1.1.7. - *Sussiste la seguente formula del binomio di Newton*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k \tag{1.9}$$

con a, b reali e n intero.

Dimostrazione. Osservato che la (1.9) è soddisfatta per $n = 1$ basta dimostrare che essa è vera per l'indice $n+1$ una volta che si supponga che sussista la (1.9). Si ha

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\,(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1}\, b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1}\, b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1}\, b^k
\end{aligned}$$

e quindi, raggruppando i termini in modo opportuno,

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n-k+1}\, b^k + b^{n+1}\,.$$

Ricordando la (1.8) si ottiene

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1}\, b^k,$$

cioè la (1.9) con $n+1$ al posto di n. $\square$

1.2 Approccio assiomatico

L'inadeguatezza di $\mathbb{N}$ già in relazione alle ordinarie operazioni algebriche suggerisce il passaggio a classi numeriche via via più ampie. Una prima estensione è costituita dall'insieme dei numeri relativi

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}\,.$$

La seconda tappa consiste nel costruire in modo opportuno l'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali. Non ci soffermeremo sulle procedure che consentono di definire tali strutture algebriche; rimandiamo per esempio a [1], [5] per approfondimenti.

Limitiamoci qui ad osservare che si può pensare ai razionali come simboli

$$\frac{m}{n}\,, \tag{1.10}$$

le classiche frazioni, con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Con tali simboli è lecito operare ricorrendo alle ben note regole di calcolo.
Un modo alternativo di rappresentare i razionali consiste nel considerarli come allineamenti decimali illimitati periodici

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdots \tag{1.11}$$

dove a_0 è un intero relativo e i simboli a_n denotano cifre decimale. Il termine periodico sta a significare che un gruppo di cifre, a partire da un certo indice, si ripete indefinitamente. Per un motivo che sarà chiarito nel seguito si escludono gli allineamenti di periodo 9. Diamo per nota la regola che consente di passare da una forma all'altra delle due rappresentazioni.
I razionali costituiscono una struttura pienamente soddisfacente dal punto di vista algebrico; sui razionali cioè si può operare senza alcun problema con le ordinarie operazioni. Se si esce da tale ristretto ambito la struttura dei razionali mostra però i suoi limiti. Infatti già il semplice problema di determinare un numero il cui quadrato è 2 non ha soluzione in $\mathbb{Q}$. Verifichiamo ciò procedendo per assurdo. Se il razionale (1.10) ha per quadrato 2 si ha $m^2 = 2n^2$. Tale uguaglianza non può però sussistere in quanto il fattore 2 compare un numero pari di volte al primo membro e un numero dispari di volte al secondo.
Si può ovviare a tale inconveniente approdando alla più ampia struttura dei reali. Questa può essere definita a partire dai razionali: si pensi per esempio alla definizione di Dedekind per cui un numero reale è una "sezione" dei razionali. Preferiamo però qui proporre un approccio più diretto esibendo la lista di assiomi che caratterizzano i numeri reali. In quel che segue delineiamo in modo sintetico tale procedura.
Sia $\mathbb{R}$ un insieme e definiamo in esso due operazioni, denominate rispettivamente somma e prodotto,

$$(a,b) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow a+b \in \mathbb{R}\,, \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow a\,b \in \mathbb{R}$$

con proprietà raggruppate secondo lo schema seguente.

Assiomi di campo

(A_1) Proprietà commutative: $a+b=b+a\,, \qquad a\,b = b\,a\,.$

(A_2) Proprietà associative: $(a+b)+c = a+(b+c)\,, \qquad (a\,b)\,c = a\,(b\,c)\,.$

(A_3) Proprietà distributiva: $a\,(b+c) = a\,b + a\,c\,.$

(A_4) Esiste un elemento di $\mathbb{R}$, indicato con il simbolo 0 e detto "elemento neutro della somma", tale che

$$a + 0 = a\,, \quad \forall a \in \mathbb{R}\,.$$

(A_5) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste un elemento di $\mathbb{R}$, denotato con il simbolo $-a$ e detto "opposto" di a, tale che
$$a + (-a) = 0\,.$$

(A_6) Esiste un elemento, diverso da 0 e denotato con il simbolo 1, detto "elemento neutro del prodotto", tale che
$$1\,a = a\,, \quad \forall a \in \mathbb{R}\,.$$

(A_7) Per ogni $a \neq 0$ esiste un elemento, denotato con il simbolo a^{-1} e detto "reciproco" di a, tale che
$$a\,a^{-1} = 1\,.$$

Una struttura che verifica gli assiomi sopra elencati prende il nome di "campo".

Definizione 1.2.1. - *Sia $\mathscr{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Se*
$$(a, b) \in \mathscr{R}$$
si dice che a è in relazione $\mathscr{R}$ con b. Con il simbolo $a \leq b$ si denota una relazione d'ordine, una relazione cioè che soddisfi le seguenti condizioni

(O_1) *proprietà riflessiva:* $a \leq a\,.$

(O_2) *proprietà antisimmetrica:* $a \leq b\,, \quad b \leq a \Rightarrow a = b\,.$

(O_3) *proprietà transitiva:* $a \leq b\,, \quad b \leq c \Rightarrow a \leq c\,.$

La relazione d'ordine si dice totale se, per ogni coppia (a, b), sussiste almeno una delle relazioni $a \leq b$, $b \leq a$.

In $\mathbb{R}$ è definita una relazione d'ordine totale che interagisce con le operazioni in modo da soddisfare alle seguenti ulteriori due regole.

Assiomi d'ordine

(B_1) Se $a \leq b$ e $c \in \mathbb{R}$ allora $a + c \leq b + c$;

(B_2) se $a, b \geq 0$ allora $a\,b \geq 0\,.$

Si parla in tal caso di "campo ordinato".
In un campo ordinato tutte le note regole di calcolo, si pensi, tanto per fare degli esempi, alla legge di annullamento del prodotto o alla regola dei segni, sono conseguenza degli assiomi (cfr. [4], [8], [12]). Limitiamoci qui a richiamarne alcune

Proposizione 1.2.1. - *Sia $a < b$; se $c > 0$ allora $a\,c < b\,c$, se invece $c < 0$ allora $a\,c > b\,c$. Il quadrato di un qualsiasi numero non nullo è positivo: in particolare si ha $1 > 0$. L'inverso di un numero positivo è positivo.*

Ovviamente $\mathbb{Q}$ è un campo ordinato. Per discostarsi dai razionali in modo da caratterizzare la più ampia struttura dei reali è quindi necessario imporre qualche ulteriore condizione. A tal fine premettiamo alcune nozioni.

Definizione 1.2.2. - *Un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$ è limitato superiormente (inferiormente) se esiste un elemento m, detto maggiorante (minorante) di X, tale che*

$$x \leq (\geq)\, m\,, \qquad \forall x \in X\,.$$

Un insieme che risulti limitato sia superiormente che inferiormente dicesi limitato.

Definizione 1.2.3. - *Un maggiorante (minorante) che appartenga ad X prende il nome di massimo (minimo) di X e si denota con il simbolo* $\max X$ $(\min X)$.

Proposizione 1.2.2. - *Il massimo (minimo) di un insieme X, se esiste, è unico.*

Dimostrazione. Se m_1, m_2 sono minimi di X deve essere $m_1 \leq m_2$ e $m_2 \leq m_1$. Per la proprietà antisimmetrica si ha allora $m_1 = m_2$. □

Definizione 1.2.4. - *Se X è limitato superiormente il minimo dei suoi maggioranti, ammesso che esista, prende il nome di estremo superiore di X; esso si denota con il simbolo* $\sup X$.
Se X è limitato inferiormente il massimo dei suoi minoranti, sempre che esista, prende il nome di estremo inferiore di X e si denota con il simbolo $\inf X$.

Proposizione 1.2.3. - *L'estremo superiore di X è caratterizzato dalle seguenti proprietà*

$$x \leq \sup X \quad \forall x \in X \tag{1.12}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists x_\varepsilon \in X \,:\, \sup X - \varepsilon < x_\varepsilon\,. \tag{1.13}$$

Dimostrazione. La (1.12) esprime semplicemente il fatto che l'estremo superiore è un maggiorante. La (1.13) va letta nel modo seguente: ogni elemento più piccolo dell'estremo superiore di X non è un maggiorante per X, cosa che ovviamente equivale ad affermare che $\sup X$ è il più piccolo dei maggioranti. □

In modo analogo si procede per l'estremo inferiore.

Proposizione 1.2.4. - *L'estremo inferiore di X gode delle seguenti proprietà caratteristiche*

$$\inf X \leq x \quad \forall x \in X \tag{1.14}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in X \,:\quad x_\varepsilon < \inf X + \varepsilon. \tag{1.15}$$

Ciò premesso introduciamo il seguente

Assioma di completezza

(C) Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ limitato superiormente ha estremo superiore.

Osservazione 1.2.1. - *L'assioma di completezza comporta anche che ogni insieme X limitato inferiormente ha estremo inferiore.*

Un campo ordinato che soddisfi l'assioma di completezza prende il nome di "campo ordinato completo".

Definizione 1.2.5. - *Il sistema $\mathbb{R}$ dei numeri reale è un qualsiasi campo ordinato completo.*

L'esistenza di un campo ordinato completo, nonché la coerenza del sistema di assiomi, è demandata alla costruzione di un modello: se si postula l'esistenza della struttura dei naturali allora un modello di $\mathbb{R}$ è per esempio quello di Dedekind precedentemente richiamato. Un ulteriore modello è quello che identifica un generico numero reale con un allineamento decimale. Con tale termine si intende il simbolo (1.11) dove, questa volta non si fa alcuna ipotesi di periodicità sulla successione delle cifre decimali $\{a_n\}$. Per dettagli relativi al procedimento da seguire per verificare che un numero reale si possa rappresentare in tal modo rimandiamo a [4] e [8]. C'è da osservare che non è immediato stabilire come i simboli (1.11) possano essere sommati e moltiplicati. Fissati due allineamenti

$$a = a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots , \qquad b = b_0, b_1 b_2 b_3 \cdots$$

è però abbastanza semplice dare significato alla scrittura $a < b$: infatti o $a_0 < b_0$ oppure esiste un $n > 0$ tale che $a_k = b_k$ se $k < n$ e $a_n < b_n$.
Altra questione importante riguarda l'identificazione in $\mathbb{R}$ delle struttura dei naturali, dei relativi e dei razionali. Per far ciò si procede nel modo seguente.
Chiamiamo induttivo un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ per il quale valgono le condizioni i) e ii) del principio di induzione matematica. Si può facilmente verificare che l'intersezione di tali insiemi è induttivo e soddisfa tutti gli assiomi che caratterizzano la struttura dei naturali: esso quindi può identificarsi con $\mathbb{N}$. Una volta che si ha a disposizione $\mathbb{N}$ si possono costruire in modo standard sia $\mathbb{Z}$ che $\mathbb{Q}$.
Occupiamoci infine dell'unicità del sistema dei reali. Siano $\mathbb{R}_1$ e $\mathbb{R}_2$ due campi ordinati completi. Un'applicazione

$$\varphi \, : \, a \in \mathbb{R}_1 \longrightarrow \varphi(a) \in \mathbb{R}_2$$

di $\mathbb{R}_1$ su $\mathbb{R}_2$ tale che

- $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
- $\varphi(a\,b) = \varphi(a)\,\varphi(b)$
- $a < b \Rightarrow \varphi(a) < \varphi(b)$

è detta "isomorfismo". Si può dimostrare (cfr. [4]) che esiste un unico isomorfismo tra due diversi campi ordinati completi: la struttura dei reali è quindi da ritenersi unica a meno di isomorfismi.

Definizione 1.2.6. - *Si chiama sistema ampliato dei numeri reali l'insieme* $\overline{\mathbb{R}}$ *che si ottiene aggiungendo a* $\mathbb{R}$ *i due simboli* $+\infty$ *e* $-\infty$*. Per ogni* $a \in \mathbb{R}$ *si pone*

$$-\infty < a < +\infty\,.$$

Definizione 1.2.7. - *Se* $a < b$ *l'insieme*

$$]a, b[= \{x\,:\, a < x < b\}$$

prende il nome di intervallo aperto limitato di estremi a, b*. Per intervallo chiuso limitato di estremi* a, b*, si intende l'insieme*

$$[a, b] = \{x\,:\, a \leq x \leq b\}\,.$$

Se $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *gli insiemi*

$$]a, +\infty[= \{x\,:\, a < x\}\,, \quad]-\infty, a[= \{x\,:\, x < a\}$$

prendono il nome di intervalli aperti non limitati; gli insiemi

$$[a, +\infty[= \{x\,:\, a \leq x\}\,, \quad]-\infty, a] = \{x\,:\, x \leq a\}$$

sono gli intervalli chiusi non limitati.

Si pone

$$\sup X = +\infty\,, \tag{1.16}$$

se X non è limitato superiormente, e

$$\inf X = -\infty \tag{1.17}$$

se X non è limitato inferiormente. La (1.16) equivale alla condizione

$$\forall M \qquad \exists x_M \in X \quad : \quad x_M > M\,, \tag{1.18}$$

la (1.17) alla condizione

$$\forall M \qquad \exists x_M \in X \quad : \quad x_M < M\,. \tag{1.19}$$

Definizione 1.2.8. - *Per valore assoluto si intende la funzione*

$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow |x| = \begin{cases} x & \textit{se } x \geq 0 \\ \\ -x & \textit{se } x < 0\,. \end{cases}$$

Proposizione 1.2.5. - *Si ha*

(a) $-|x| \leq x \leq |x|$

(b) $|x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$

(c) $a \leq |x| \Leftrightarrow x \in]-\infty, a] \cup [a, +\infty[$

(d) $|x + y| \leq |x| + |y|$

(e) $|\,|x| - |y|\,| \leq |x - y|\,.$

Le proprietà (d), (e) *sono note come "disuguaglianze triangolari".*

1.3 Proprietà dei reali

Cominciamo dimostrando la seguente “proprietà di buon ordinamento” di $\mathbb{N}$.

Proposizione 1.3.1. - *Ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ ha minimo; inoltre, se esso è limitato, ha massimo.*

Dimostrazione. Un sottoinsieme S di $\mathbb{N}$ è ovviamente limitato inferiormente: sia s il suo estremo inferiore. Per la (1.15) esiste un intero $n \in S$ tale che

$$s \leq n < s + 1\,.$$

Poiché $n - 1 < s$ ogni naturale $m \leq n - 1$ non appartiene a S. Pertanto n è il minimo di S.
Sia S limitato e s il suo estremo superiore. Per la (1.13) esiste un $n \in S$ tale che

$$s - 1 < n \leq s\,.$$

Si ha allora $s < n + 1$ ovvero $n + 1 \notin S$. Ovviamente anche ogni naturale maggiore di $n + 1$ non appartiene a S. Il massimo di S è quindi n. □

Corollario 1.3.1. - *L'insieme dei naturali non è limitato superiormente.*

Dimostrazione. Se $\mathbb{N}$ fosse limitato avrebbe un massimo n. D'altra parte il successivo di n è un intero strettamente maggiore di n. L'assurdo cui siamo pervenuti prova l'asserto. □

Proviamo ora la cosiddetta “proprietà di Archimede”.

Teorema 1.3.1. - *Siano x, y due reali positivi. Esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che*

$$(n - 1)\,x \leq y < n\,x\,. \tag{1.20}$$

Dimostrazione. Dimostriamo che esiste un $k \in \mathbb{N}$ tale che $y < k\,x$. Se cosí non fosse si avrebbe $kx \leq y$ e, quindi, $k \leq y\,x^{-1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Quindi $\mathbb{N}$ risulterebbe limitato in contrasto con quanto affermato nel cor. 1.3.1.
L'insieme $S = \{k \in \mathbb{N} \,:\, y < k\,x\}$ è non vuoto e, per la prop. 1.3.1, ha minimo n; quindi $(n - 1)\,x \notin S$. Abbiamo pertanto la (1.20). □

Dimostriamo ora la seguente proprietà di densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

Teorema 1.3.2. - *Ogni intervallo aperto $]a, b[$ contiene infiniti numeri razionali.*

Dimostrazione. Per la (1.20), se poniamo $x = 1$ e $y = (b - a)^{-1}$, esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$(b - a)^{-1} < m$$

da cui

$$\frac{1}{m} < b - a\,.$$

Sempre per la (1.20), con $x = 1/m$ e $y = a$, esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{n}{m} - \frac{1}{m} \leq a < \frac{n}{m}\,.$$

In definitiva si ha

$$a < \frac{n}{m} = \left(\frac{n}{m} - \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{m} < a + (b-a) = b\,.$$

L'intervallo $]a,b[$ contiene quindi il razionale n/m. È inoltre evidente che in $]a,b[$ ci sono infiniti punti razionali. □

Proposizione 1.3.2. - *Sia $x > 1$. Allora, per ogni $\varepsilon > 1$ esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $x^n > \varepsilon$. Se $x < 1$ allora per ogni $\varepsilon \in]0,1[$ esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $x^n < \varepsilon$.*

Dimostrazione. Sia $x > 1$. Dalla (1.6) si ha

$$x^n = [1 + (x-1)]^n \geq 1 + n\,(x-1)\,.$$

Per la (1.20) è possibile determinare $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > \frac{\varepsilon - 1}{x - 1}\,.$$

Si ha allora anche $x^n > \varepsilon$.
Passando ai reciproci si ottiene l'asserto per quanto riguarda il caso $x < 1$. □

Se $x \in]0,1[$ dalla (1.4) si ottiene

$$\sum_{k=0}^{n} x^k < \frac{1}{1-x}\,. \tag{1.21}$$

Sia $\varepsilon > 0$. Per la prop. 1.3.2 esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{x^{n+1}}{1-x} < \varepsilon\,.$$

Tenendo in conto la (1.4) abbiamo allora

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} > \frac{1}{1-x} - \varepsilon$$

e quindi, per la (1.21),

$$\sup_n \left\{ \sum_{k=0}^{n} x^k\,, \quad n \in \mathbb{N} \right\} = \frac{1}{1-x}\,.$$

Tali considerazioni suggeriscono di introdurre la seguente notazione

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}\,. \tag{1.22}$$

La (1.22) è il primo esempio di serie; essa è nota come “serie geometrica”.
Con considerazioni analoghe si può identificare il numero reale (1.11) come somma della serie

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \,. \tag{1.23}$$

Tale rappresentazione, unitamente alla (1.22), consente di fornire una giustificazione per la formula della frazione generatrice di un razionale che si rappresenti mediante un allineamento decimale illimitato periodico. Limitiamoci qui a dare una motivazione della opportunità di non prendere in considerazione gli allineamenti periodici con periodo nove. Dalle (1.23) e (1.22) si ha per esempio

$$0,\overline{9} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{9}{10} \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{-1} = 1 \,.$$

Quindi il numero $0,\overline{9}$ si identifica con 1.
Consideriamo ora la successione il cui termine generale è

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \,. \tag{1.24}$$

Risulta per la (1.21)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2 \cdots (n-1) \cdot n} \\ &< 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 3 \,. \end{aligned}$$

Quindi la successione (1.24) è limitata superiormente. Il suo estremo superiore, noto come “numero di Nepero”, si denota con la lettera e. Si pone

$$e = \sup_n \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \,. \tag{1.25}$$

È possibile dare una valutazione dell'errore che si commette quando si approssima e con una delle somme (1.24). Si ha

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sup_h \left\{ \sum_{k=n+1}^{n+h} \frac{1}{k!} \right\} .$$

Risulta

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+h} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)\cdots(n+h)}\right)\\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)^{h-1}}\right)\\ &\quad \text{(per la (1.22))}\\ &< \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1}{1-(n+2)^{-1}} = \frac{1}{n!}\,\frac{n+2}{(n+1)^2}\,.\end{aligned}$$

Osservato che

$$\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$$

si ha

(1.26) $$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n\,n!}\,.$$

Proposizione 1.3.3. - *Il numero di Nepero è irrazionale.*

Dimostrazione. Si ragiona per assurdo. Sia $e = m/n$; dalla (1.26) abbiamo

$$0 < n\,n!\left(\frac{m}{n} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right) = m\,n! - n\,n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < 1\,.$$

D'altra parte

$$m\,n! - n\,n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

è un intero. Abbiamo un assurdo in quanto non esistono interi strettamente minori uno. □

Consideriamo il sottoinsieme del piano

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 0\le x\le 1\,,\ 0\le y\le x^2\}$$

noto come segmento di parabola. Vogliamo pervenire ad una definizione di area per tale insieme. Se $n\in\mathbb{N}$ decomponiamo $[0,1]$ in n intervalli di ampiezza $1/n$ e indichiamo con $x_k = k/n$ i relativi estremi. Consideriamo l'insieme contenuto nel segmento di parabola, costituito dall'unione dei rettangoli le cui basi sono gli intervalli $[x_k, x_{k+1}]$ e le cui altezze misurano ${x_k}^2$. Per la (1.2) la misura di tale insieme è

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

Si può dimostrare facilmente che l'estremo superiore di tali quantità è 1/3; è allora naturale attribuire a tale valore numerico il ruolo di rappresentare l,area dell'insieme piano considerato.
In modo analogo, facendo ricorso alla (1.3), si prova che 1/4 è la misura dell'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 1\,,\, 0 \leq y \leq x^3\}\,.$$

1.4 Potenza ad esponente reale

Premettiamo la seguente

Definizione 1.4.1. - *Due insiemi* X, Y *si dicono "separati" se* $\sup X \leq \inf Y$ *ovvero se*

$$x \leq y \qquad \forall x \in X \quad \forall y \in Y\,.$$

Se

$$\sup X = \inf Y \tag{1.27}$$

i due insiemi si dicono "contigui" e la quantità (1.27) *prende il nome di elemento di separazione dei due insiemi.*

Proposizione 1.4.1. - *Due insiemi separati* X, Y *sono contigui se e solo se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in X\,, \quad \exists y_\varepsilon \in Y \,:\, y_\varepsilon - x_\varepsilon < \varepsilon\,. \tag{1.28}$$

Dimostrazione. Siano X, Y contigui e sia s l'elemento di separazione. Per ogni ε esistono due punti $x_\varepsilon \in X$ e $y_\varepsilon \in Y$ tali che

$$x_\varepsilon > s - \varepsilon/2\,, \qquad y_\varepsilon < s + \varepsilon/2$$

e quindi $y_\varepsilon - x_\varepsilon < \varepsilon$.
Supponiamo che sussista la (1.28). Se X, Y non sono contigui si ha

$$0 < \inf Y - \sup X \leq y - x\,, \qquad \forall x \in X\,, \forall y \in Y\,.$$

Basta allora fissare $\varepsilon < \inf Y - \sup X$ per arrivare ad un assurdo. □

Proposizione 1.4.2. - *Se* $y, z \in [0, +\infty[$ *allora*

$$y < z \Leftrightarrow y^n < z^n\,. \tag{1.29}$$

Dimostrazione. Si procede per induzione su n: si assuma che

$$x < y \longrightarrow x^n < y^n\,.$$

Utilizzando la prop. 1.2.1 si ha

$$y^{n+1} = y\, y^n < y\, z^n < z\, z^n = z^{n+1}$$

cioè l'asserto. È inoltre evidente che $x < y$ se $x^n < y^n$. □

Teorema 1.4.1. - *Se $a > 0$ l'equazione*

$$x^n = a \tag{1.30}$$

ha un'unica soluzione positiva.

Dimostrazione. Consideriamo gli insiemi

$$Y = \{y \geq 0 \,:\, y^n < a\}\,, \quad Z = \{z \geq 0 \,:\, a < z^n\}\,.$$

Essi sono non vuoti: se per semplicità assumiamo $a > 1$ allora si verifica facilmente che $1 \in Y$ e $a \in Z$. Essi sono inoltre separati per la (1.29). Proviamo che sono contigui. In caso contrario tutti i punti di $]\sup Y, \inf Z[$ risolvono l'equazione (1.30) in quanto essi non appartengono né a Y né a Z; ciò è in contrasto con la (1.29). Sia quindi x l'elemento di separazione di Y e Z. Tale elemento non può appartenere né a Y né a Z. Se $x \in Y$ allora x è il massimo di Y; inoltre $x^n < a$. D'altra parte, se $\varepsilon \in]0,1[$, per la (1.5) si ha

$$\begin{aligned}(x+\varepsilon)^n - x^n &= \varepsilon\left[(x+\varepsilon)^{n-1} + (x+\varepsilon)^{n-2}\,x + \cdots + x^{n-1}\right] \\ &\leq n\varepsilon(x+\varepsilon)^{n-1} < n\varepsilon(x+1)^{n-1}\end{aligned}$$

da cui

$$(x+\varepsilon)^n < a + (x^n - a) + n\varepsilon(x+1)^{n-1}\,.$$

Se

$$\varepsilon < \frac{a - x^n}{n\,(x+1)^{n-1}}$$

si ha $(x+\varepsilon)^n < a$; quindi $x + \varepsilon \in Y$ contro il fatto che x è il massimo di Y.
Proviamo che $x \notin Z$. Se $x \in Z$ allora x è il minimo di Z e $x^n > a$, Sia $\varepsilon < x$; si ha

$$x^n - (x-\varepsilon)^n = \varepsilon\left[x^{n-1} + x^{n-2}(x-\varepsilon) + \cdots + (x-\varepsilon)^{n-1}\right] \leq n\varepsilon x^{n-1}$$

da cui

$$(x-\varepsilon)^n \geq a + (x^n - a) - n\varepsilon x^{n-1}\,.$$

Se

$$\varepsilon < \frac{x^n - a}{n\,x^{n-1}}$$

si ha $(x-\varepsilon)^n > a$; quindi $(x-\varepsilon) \in Z$ in contrasto col fatto che x è il minimo di Z.
In definitiva x è l'unica soluzione positiva dell'equazione (1.30). □

Definizione 1.4.2. - *La soluzione dell'equazione* (1.30) *prende il nome di radice $n-$ma aritmetica di a e si denota con il simbolo $\sqrt[n]{a}$.*

Riportiamo le principali proprietà della funzione ad esponente $n \in \mathbb{N}$

$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow x^n \,.$$

Se n è pari il codominio della funzione è $[0, +\infty[$ per il teo. 1.4.1. Inoltre la sua restrizione a $[0, +\infty[$ strettamente crescente: l'inversa prende il nome di funzione radice n-ma. La restrizione a $]-\infty, 0]$ è invece strettamente decrescente.
Se n è dispari il codominio è $\mathbb{R}$. La funzione inoltre è strettamente crescente: la sua inversa è

$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} \sqrt[n]{x} & \text{se } x \geq 0 \\ -\sqrt[n]{|x|} & \text{se } x < 0\,. \end{cases} \tag{1.31}$$

Nel caso in cui $x < 0$ il valore assunto dalla funzione (1.31) si denota più semplicemente con il simbolo $\sqrt[n]{x}$.
Altro simbolo usato per denotare la radice $n-$ma di a è $a^{\frac{1}{n}}$; il motivo di una tale scelta è legato al fatto che ci accingiamo a definire l'operazione di potenza ad esponente reale ed essa deve obbedire alle seguenti regole

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta} \tag{1.32}$$

e

$$a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta \,. \tag{1.33}$$

con α, β reali. Essendo $(\sqrt[n]{a})^n = a$, la (1.32) è rispettata se appunto si pone $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.
Ricapitoliamo ora i vari passi che consentono di dare significato alla scrittura

$$a^\alpha \tag{1.34}$$

con $a > 0$ e α reale. Ricordiamo che a tale simbolo è stato già dato significato nel caso di esponente intero non negativo (cfr. def. 1.1.1). Se l'esponente è un intero negativo si adotta la seguente convenzione

$$a^{-n} = (a^{-1})^n$$

dove a^{-1} è il reciproco di a. Nel caso in cui l'esponente sia un numero razionale della forma (1.10) si pone

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \,.$$

Si verifica che le proprietà (1.32) e (1.33) sussistono quando α e β sono razionali.
Resta da fare l'ultimo passo che consiste nel definire il simbolo (1.34) nel caso in cui α è irrazionale.
A tal fine supponiamo che sia $a > 1$. Si può dimostrare allora, utilizzando la (1.29) (cfr. anche [4]), che la funzione

$$x \in \mathbb{Q} \longrightarrow a^x$$

è crescente. Pertanto gli insiemi

$$A^- = \{a^r \,:\, r \in \mathbb{Q}\,, \quad r < \alpha\}\,, \quad A^+ = \{a^r \,:\, r \in \mathbb{Q}\,, \quad r > \alpha\}$$

sono separati. Verifichiamo che sono contigui.
Se $n \in \mathbb{N}$, per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, esiste un razionale r tale che

$$\alpha - \frac{1}{n} < r < \alpha\,.$$

Si ha quindi

$$r < \alpha < r + \frac{1}{n}\,;$$

pertanto $a^r \in A^-$ e $a^{r+1/n} \in A^+$. Per dimostrare l'asserto dobbiamo far vedere che, fissato $\varepsilon > 0$, è possibile scegliere n, e di conseguenza r, in modo tale che

$$a^{r+1/n} - a^r < \varepsilon\,.$$

Posto $a^{1/n} = 1 + \sigma$ per la disuguaglianza (1.6) si ha

$$a = (1+\sigma)^n \geq 1 + n\sigma = 1 + n(a^{1/n} - 1)\,.$$

Risulta quindi

$$a^{1/n} - 1 \leq \frac{a-1}{n}\,. \tag{1.35}$$

Si ha quindi

$$a^{r+1/n} - a^r = a^r \left(a^{1/n} - 1\right) \leq \left(\sup A^-\right) \frac{a-1}{n}\,.$$

Facendo ricorso alla proprietà di Archimede è possibile determinare n in modo tale che la quantità a secondo membro risulti minore di ε.
Possiamo quindi attribuire per definizione al simbolo (1.34) il valore rappresentato dall'elemento di separazione degli insiemi A^- e A^+.
Nel caso infine in cui $a \in]0, 1[$ si assume che

$$a^\alpha = (a^{-1})^{-\alpha}\,.$$

Si può facilmente verificare sono soddisfatte le proprietà (1.32) e (1.33).
Siamo ora in grado di definire la funzione potenza ad esponente reale α

$$x \longrightarrow x^\alpha\,.$$

Essa è definita in $[0, +\infty[$ se α è positivo, in $]0, +\infty[$ se α è negativo. Nel primo caso essa è strettamente crescente, nel secondo strettamente decrescente.
Per quanto riguarda la funzione esponenziale

$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow a^x$$

essa è intanto strettamente crescente se $a > 1$, strettamente decrescente se $a < 1$. Verifichiamo che il suo codominio è $\mathbb{R}^+$. Bisogna dimostrare che l'equazione $a^x = b$ ammette un'unica soluzione per ogni $b > 0$.
Si verifica facilmente che gli insiemi

$$A = \{y \in \mathbb{R} : a^y < b\}, \qquad B = \{z \in \mathbb{R} : a^z > b\},$$

sono non vuoti; essi sono separati per la proprietà di monotonia sopra ricordata. Poiché al più un numero reale non appartiene né ad A né a B essi sono contigui: sia x l'elemento di separazione. Se $x \in A$ esso ne è anche il massimo; inoltre si ha $a^x < b$. D'altra parte, se $n \in \mathbb{N}$, per la (1.35) abbiamo

$$a^{x+1/n} - a^x = a^x \left(a^{1/n} - 1\right) \leq a^x \, \frac{a-1}{n} \,.$$

Si ha quindi

$$a^{x+1/n} < b + (a^x - b) + a^x \, \frac{a-1}{n} \,.$$

Scelto n in modo che risulti

$$a^x \, \frac{a-1}{n} < b - a^x$$

si ha $a^{x+1/n} < b$. Ciò implica che $x + 1/n$ appartiene ad A contro l'ipotesi che x è il massimo di A.
In modo analogo si dimostra che $x \notin B$. Si ha infatti

$$a^x - a^{x-1/n} = a^{x-1/n} \left(a^{1/n} - 1\right) \leq a^x \, \frac{a-1}{n}$$

da cui

$$a^{x-1/n} \geq b + (a^x - b) - a^x \, \frac{a-1}{n} \,;$$

quindi $a^{x-1/n} > b$ se si sceglie n tale che

$$a^x - b > a^x \, \frac{a-1}{n} \,.$$

Deve allora essere $a^x = b$.
La funzione esponenziale è dotata di inversa, il logaritmo in base a. Tale funzione è definita in $\mathbb{R}^+$ e ha per codominio $\mathbb{R}$

$$x \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow \log_a x \in \mathbb{R} \,.$$

Se la base è il numero di Nepero e il logaritmo di b si denota più semplicemente con $\log b$.
La funzione logaritmo, in quanto inversa della funzione esponenziale, eredita dalla funzione esponenziale le relative proprietà di monotonia.
Infine, facendo uso delle proprietà (1.32) e (1.33) si possono dimostrare le seguenti identità

$$\log_a b^c = c \log_a b \,, \quad \log_a (b\, c) = \log_a b + \log_a c \,.$$

1.5 Potenza di un insieme

Se è evidente cosa vuol dire che due insiemi finiti hanno lo stesso numero di elementi la questione è più delicata per insiemi infiniti. Per operare correttamente in tale ambito bisogna ricorrere alla seguente nozione.

Definizione 1.5.1. - *Due insiemi si dicono "equipotenti" se esiste un'applicazione biunivoca tra essi.*
In particolare un insieme X dicesi "numerabile" se è equipotente ad $\mathbb{N}$. Esiste cioè un'applicazione biunivoca

$$n \in \mathbb{N} \to x_n \in X\,.$$

La potenza del numerabile viene denotata con il simbolo $\aleph_0$.

Sussistono i seguenti risultati.

Proposizione 1.5.1. - *L'insieme $\mathbb{Q}$ è numerabile.*

Dimostrazione. Basta ovviamente dimostrare che tale è l'insieme $\mathbb{Q}^+$ dei razionali positivi. Inseriamo tali numeri in una tabella in modo che nell'$n-$ma riga siano presenti le frazioni, ridotte ai minimi termini, con n a numeratore e con denominatori via via crescenti

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \to & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \to & \frac{1}{4} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
2 & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{5} & & \frac{2}{7} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
3 & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & \cdots \\
 & & & & & & & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Se si ordinino gli elementi di tale tabella come indicato dalle frecce, si ottiene un'applicazione biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}^+$. $\square$

Proposizione 1.5.2. - *L'insieme $\mathbb{R}$ non è numerabile.*

Dimostrazione. Basta verificare che non è numerabile l'intervallo $[0,1]$. Per assurdo supponiamo che sia $[0,1] = \{x_n\}$. Diviso l'intervallo $[0,1]$ in tre intervalli di uguale ampiezza denotiamo con $[a_1, b_1]$ uno di tali tre intervalli che non contenga x_1. Operiamo ora allo stesso modo sull'intervallo $[a_1, b_1]$ determinando un secondo intervallo $[a_2, b_2]$ che non ha x_2 come elemento. Cosí procedendo si genera una successione di intervalli $[a_n, b_n]$ con le seguenti caratteristiche

(i) $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$

(ii) $b_n - a_n = 3^{-n}$

(iii) $x_n \notin [a_n, b_n]$

La (i) comporta che gli insiemi $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono separati mentre la (ii) assicura che essi sono contigui. L'unico elemento di separazione s appartiene ovviamente a tutti gli intervalli $[a_n, b_n]$. D'altra parte deve esistere un indice n tale che $s = x_n$ in contrasto con la (iii).
Riportiamo un'ulteriore dimostrazione in cui si fa uso di un metodo noto come "procedimento diagonale" di Cantor. Supponiamo ancora una volta che sia $[0, 1] = \{x_n\}$. Usiamo la rappresentazione dei reali in base due e inseriamo le cifre dopo la virgola di x_n nella $n-$ma riga della seguente tabella

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \tag{1.36}$$

Non preoccupiamoci del fatto che ci possano essere più rappresentazioni dello stesso numero razionale, quelle per intenderci con la cifra 1 periodica: si aggiungono infatti dei simboli che appartengono ad un insieme numerabile. Conveniamo di rappresentare il numero 1 come $0, \overline{1}$.
Per ogni n indichiamo con a_n la cifra binaria diversa da a_{nn}; allora l'allineamento

$$0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdots$$

rappresenta un elemento dell'intervallo $[0, 1]$ che però non compare nella tabella (1.36). Infatti se le sue cifre occupassero la $k-$ma riga si perverrebbe ad un assurdo essendo $a_k \neq a_{kk}$. $\square$

In definitiva l'insieme $\mathbb{R}$ ha una potenza maggiore di quella di $\mathbb{N}$ e di $\mathbb{Q}$. Si parla in tal caso di "potenza del continuo" per la quale si usa il simbolo c.

Osservazione 1.5.1. - *Anche $\mathbb{R}^2$ ha la potenza del continuo. Se si conviene di rappresentare un qualsiasi numero dell'intervallo $[0, 1]$ in base due come nella dimostrazione della prop.* 1.5.2 *allora ad ogni coppia di tali allineamenti si può associare quello che ha le cifre del primo numero nei posti dispari e quelle del secondo nei posti pari. Si crea in tal modo un'applicazione biunivoca tra $[0, 1]^2$ e $[0, 1]$.*

1.6 Il teorema di Bolzano-Weierstrass

Richiamiamo alcune nozioni.

Definizione 1.6.1. - *Per "intorno" di x_0 si intende un qualsiasi intervallo aperto contenente x_0. Il simbolo $\mathcal{I}(x_0)$ denota la famiglia degli intorni di x_0.*

Definizione 1.6.2. - *Si dice che x_0 è "punto di accumulazione" per X se*

$$I \cap X \backslash \{x_0\} \neq \emptyset$$

per ogni $I \in \mathcal{I}(x_0)$. In altri termini ogni intorno di x_0 contiene punti di X diversi da x_0.

Definizione 1.6.3. - *Per intorno di $+\infty$ si intende un qualsiasi intervallo non limitato $]a, +\infty[$. La famiglia degli intorni di $+\infty$ si denota con $\mathcal{I}(+\infty)$. Analogamente con il simbolo $\mathcal{I}(-\infty)$ si denota la famiglia degli intorni di $-\infty$ ovvero degli intervalli $]-\infty, a[$.*

Osservazione 1.6.1. - *In un certo senso $+\infty$ e $-\infty$ possono considerarsi punti di accumulazione per insiemi che siano, o non limitati superiormente o non limitati inferiormente. Se infatti un insieme X non è superiormente limitato la condizione* (1.18) *afferma che ogni intorno di $+\infty$ contiene punti di X. Discorso analogo vale per insiemi non limitati inferiormente se si fa riferimento alla* (1.19).

Una importante conseguenza dell'assioma di completezza è costituito dal seguente risultato.

Teorema 1.6.1. (Teorema di Bolzano-Weierstrass) - *Un insieme X infinito e limitato ha almeno un punto di accumulazione.*

Dimostrazione. Sia $[a, b]$ un intervallo contenente X. Dividiamo tale intervallo in due intervalli di uguale ampiezza. Di questi almeno uno contiene infiniti punti di X: indichiamo tale intervallo con $[a_1, b_1]$. Si può a questo punto operare su tale intervallo come abbiamo fatto per $[a, b]$: si determina un secondo intervallo $[a_2, b_2]$, di ampiezza pari alla metà dell'intervallo $[a_1, b_1]$, contenente infiniti punti di X. È ovviamente possibile iterare il procedimento; si ottiene quindi una successione di intervalli $[a_n, b_n]$ con le seguenti caratteristiche

- $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$
- $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$
- $[a_n, b_n]$ contiene infiniti punti di X

Ragionando come nella dimostrazione del teo. 1.5.2 si ha che i due insiemi $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono contigui. Indichiamo con c il loro elemento di separazione. Se I è un intervallo aperto contenente c si dimostra facilmente che esiste un n tale che $[a_n, b_n] \subset I$. Quindi c è punto di accumulazione per X dal momento che l'intervallo $[a_n, b_n]$, e quindi I, contiene infiniti punti di X. $\square$

Capitolo 2

Numeri complessi

2.1 Forma algebrica

Abbiamo visto nel cap.1 che è possibile strutturare $\mathbb{R}$ come campo; ci chiediamo se è possibile fare altrettanto con $\mathbb{R}^2$. In quanto spazio vettoriale, $\mathbb{R}^2$ è dotato di una operazione di somma

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \tag{2.1}$$

e di una di prodotto esterno tra un vettore e uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\,(x, y) = (\alpha\, x, \alpha\, y)\,. \tag{2.2}$$

Più complessa è la questione relativa all'operazione di prodotto interno. Cominciamo a definire tale operazione per i due vettori della base naturale

$$e_1 = (1, 0)\,, \quad e_2 = (0, 1)\,.$$

Poniamo

$$e_1\, e_1 = e_1^2 = e_1\,, \quad e_1\, e_2 = e_2\, e_1 = e_2\,, \quad e_2\, e_2 = e_2^2 = -e_1\,. \tag{2.3}$$

Le (2.3) sono sufficienti per definire il prodotto tra due generici elementi di $\mathbb{R}^2$. In accordo con le (2.1) e (2.2) si ha

$$z = (x, y) = x\, e_1 + y\, e_2\,, \quad z' = (x', y') = x'\, e_1 + y'\, e_2\,.$$

Facendo ricorso alle (2.3) abbiamo

$$z\, z' = (x\, x' - y\, y')\, e_1 + (x\, y' + x'\, y)\, e_2$$

e quindi

$$z\, z' = (x\, x' - y\, y', x\, y' + x'\, y)\,. \tag{2.4}$$

Si verifica facilmente che $\mathbb{R}^2$ con le operazioni (2.1) e (2.4) è un campo; sono soddisfatti cioè gli assiomi $(A_1), \cdots, (A_7)$ del par.1.2. Limitiamoci ad osservare che $(0,0)$ è l'elemento neutro rispetto alla somma e $(1,0)$ quello rispetto al prodotto. Inoltre, se $z = (x,y) \neq (0,0)$ il vettore

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

è il reciproco di z.
È lecito chiedersi se le posizioni (2.3) che hanno permesso di definire il prodotto siano una scelta arbitraria o obbligata. La risposta sta nel seguente risultato la cui dimostrazione è ripresa da [13].

Proposizione 2.1.1. - *Oltre all'operazione di somma* (2.1) *in* $\mathbb{R}^2$ *sia definita una moltiplicazione in modo che risultino soddisfatti gli assiomi di campo. Allora esistono due elementi* f_1, f_2 *di* $\mathbb{R}^2$*, linearmente indipendenti, tali che*

$$f_1^2 = f_1\,, \quad f_1\,f_2 = f_2\,f_1 = f_2\,, \quad f_2^2 = -f_1\,. \tag{2.5}$$

Dimostrazione. Sia f_1 l'elemento neutro rispetto al prodotto. Se g_1 non dipende linearmente da f_1 per ogni $\gamma \in \mathbb{R}$ risulta

$$g_2 = g_1 + \gamma\,f_1 \neq 0\,. \tag{2.6}$$

Sia inoltre

$$g_1^2 = \alpha\,f_1 + \beta\,g_1\,. \tag{2.7}$$

Per le (2.6) e (2.7) si ha

$$g_2^2 = g_1^2 + 2\,\gamma\,g_1 + \gamma^2\,f_1 = (\alpha+\gamma^2)\,f_1 + (\beta + 2\,\gamma)g_1\,.$$

Quindi se $\gamma = -\beta/2$ abbiamo

$$g_2^2 = \left(\alpha + \frac{\beta^2}{4}\right)\,f_1 = \delta\,f_1\,. \tag{2.8}$$

Si ha $\delta \neq 0$ per la (2.7). Se $\delta > 0$ la (2.8) diventa

$$(g_2 - \sqrt{\delta}\,f_1)(g_2 + \sqrt{\delta}\,f_1) = 0\,.$$

Per la legge di annullamento del prodotto g_2 è allora proporzionale a f_1; quindi, per la (2.6), anche g_1 è proporzionale a f_1 contro l'ipotesi che i due vettori sono linearmente indipendenti. Deve allora essere $\delta < 0$. Se

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{-\delta}}\,g_2$$

per la (2.8) si ha $f_2^2 = -e_1$. I vettori f_1, f_2 soddisfano quindi le (2.5). $\square$

Se quindi in $\mathbb{R}^2$ coesistono due differenti strutture di campo esse possono essere "identificate" facendo corrispondere f_1 ad e_1 e f_2 ad e_2. In tal modo infatti si viene a costruire un'applicazione biunivoca φ di $\mathbb{R}^2$ su se stesso che verifica le seguenti condizioni

$$\varphi(z+z') = \varphi(z) + \varphi(z')\,, \quad \varphi(z\,z') = \varphi(z)\,\varphi(z')\,;$$

abbiamo per semplicità usato gli stessi simboli di somma e prodotto per le operazioni definite nelle due diverse strutture algebriche. L'applicazione φ è un isomorfismo. Possiamo quindi concludere che, a meno di isomorfismi, $\mathbb{R}^2$ può essere in modo unico strutturato come campo.

Definizione 2.1.1. - *Lo spazio* $\mathbb{R}^2$ *con le operazioni* (2.1) *e* (2.4) *prende il nome di "campo complesso". Esso si denota con il simbolo* $\mathbb{C}$. *I suoi elementi si chiamano numeri complessi.*

Osservazione 2.1.1. - *È possibile introdurre in* $\mathbb{C}$ *una relazione d'ordine in modo che* $\mathbb{C}$ *possa considerarsi un campo ordinato? La risposta a tale domanda è negativa. Infatti in un campo ordinato il quadrato di un qualsiasi numero è positivo* (*cfr. prop.* 1.2.1)*, cioè maggiore strettamente dell'elemento neutro. Ciò non può verificarsi in* $\mathbb{C}$ *dal momento che il quadrato di* e_2 *è* $-e_1$*; quest'ultimo numero non è positivo perché in un campo ordinato l'elemento neutro del prodotto è positivo e il suo opposto negativo.*

L'applicazione

$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow (x,0)$$

è un isomorfismo tra $\mathbb{R}$ e il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ costituito dalle coppie la cui seconda coordinata è zero. Ciò comporta che è possibile identificare le due strutture; possiamo considerare quindi $\mathbb{R}$ come una sottocampo di $\mathbb{C}$. In definitiva e_1 va ad identificarsi con 1, unità di $\mathbb{R}$, l'origine con lo zero di $\mathbb{R}$ e, più in generale, $(x,0)$ con il numero reale x. Denotiamo inoltre con il simbolo i il numero complesso e_2. Ciò premesso, essendo

$$z = (x,y) = (x,0) + (y,0)\,(0,1)\,,$$

possiamo scrivere

$$z = x + i\,y = \Re(z) + i\,\Im(z)\,. \tag{2.9}$$

La (2.9) è nota come "forma algebrica" di z: $\Re(z)$ è la parte reale di z mentre $\Im(z)$ ne è la parte immaginaria. La forma (2.9) è particolarmente utile perché con essa si può operare con le ordinarie regole del calcolo letterale; bisogna solo ricordarsi di inserire al posto di i^2 il numero reale -1.
Per modulo di z si intende la quantità

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Il complesso coniugato di z è

$$\overline{z} = x - i\,y = \Re(z) - i\,\Im(z)\,.$$

Proposizione 2.1.2. - *Valgono le seguenti proprietà:*

(a) $z = \overline{z} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$

(b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

(c) $\overline{z\,w} = \overline{z}\,\overline{w}$

(d) $z\,\overline{z} = |z|^2$

(e) $|z + w| \leq |z| + |w|$

(f) $|z - w| \geq ||z| - |w||$.

2.2 Forma trigonometrica

Rappresentiamo il piano $\mathbb{R}^2$ e quindi $\mathbb{C}$ in coordinate polari. Ciò vuol dire che ogni numero complesso diverso dallo zero è individuato da una nuova coppia di coordinate. La prima, che indichiamo con ρ, è il modulo di z, la seconda, che indichiamo con θ, è una delle determinazioni, in radianti, dell'angolo che il vettore orientato, i cui estremi sono l'origine e z, forma con il semiasse reale positivo. L'applicazione che a z associa tali determinazione costituisce un primo esempio di funzione a più valori nota come "argomento". Solitamente si sceglie la determinazione compresa nell'intervallo $]-\pi, \pi]$ detta "argomento principale". Usiamo la scrittura $[\rho, \theta]$ per denotare z; essa prende il nome di forma trigonometrica. Si ha

$$[\rho, \theta] = [\rho', \theta'] \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho = \rho' \\ \theta' - \theta = 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases} \tag{2.10}$$

Per passare dalla forma algebrica a quella trigonometrica bisogna tener conto della seguente identità

$$z = x + i\,y = \rho\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)\,.$$

La forma trigonometrica si presta bene per rappresentare il prodotto di due o più numeri complessi. Infatti se $z = [\rho, \theta]$ e $z' = [\rho', \theta']$, si ha

$$\begin{aligned} z\,z' &= \rho\rho'\,[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i\,(\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta)] \\ &= \rho\rho'\,[\cos(\theta + \theta') + i\,\sin(\theta + \theta')] = [\rho\rho', \theta + \theta']\,. \end{aligned}$$

Per n complessi $[\rho_k, \theta_k]$ si ha ovviamente

$$z_1\,z_2 \cdots z_n = \prod_{k=1}^{n} z_k = \left[\prod_{k=1}^{n} \rho_k, \sum_{k=1}^{n} \theta_k\right]$$

e, in particolare,

$$z^n = [\rho^n, n\,\theta]\,. \tag{2.11}$$

Utilizziamo la (2.11) per introdurre l'operazione di estrazione di radice n-ma nel campo complesso. Sia $z = [\rho, \theta]$ un numero complesso non nullo. Determiniamo $w = [r, \phi]$ in modo tale che si abbia $w^n = z$ ovvero $[r^n, n\,\phi] = [\rho, \theta]$. Dalla (2.10) si ha

$$r^n = \rho\,, \qquad n\,\phi - \theta = 2k\,\pi \tag{2.12}$$

per un opportuno $k \in \mathbb{Z}$. I complessi

$$w_k = \left[\rho^{1/n}, \frac{\theta + 2k\,\pi}{n}\right]\,,$$

con $k \in \mathbb{Z}$, sono le radici n-me di z. Per la (2.10) si ha

$$\left[\rho^{1/n}, \frac{\theta + 2k_1\,\pi}{n}\right] = \left[\rho^{1/n}, \frac{\theta + 2k_2\,\pi}{n}\right]$$

se e solo se esiste $h \in \mathbb{Z}$ tale che

$$k_2 - k_1 = n\,h$$

il che equivale a dire che k_1 e k_2 sono congruenti modulo n. Quindi le radici n-me distinte di z sono n tante quante le classi di congruenza modulo n. In definitiva, mentre in $\mathbb{R}$ ogni numero reale positivo ha una sola radice n-ma, in $\mathbb{C}$ ogni numero diverso da zero ha n radici n-me: esse si ottengono dalla formula (2.12) attribuendo all'indice k i valori interi da 0 fino a $n-1$ o più in generale n valori consecutivi. In particolare le radici n-me dell'unità sono

$$w_k = \left[1, \frac{2k\,\pi}{n}\right]\,, \quad k = 0, \cdots n-1\,. \tag{2.13}$$

Esse sono i vertici del poligono regolare a n lati inscritto nella circonferenza con centro nell'origine e raggio unitario; uno dei suoi vertici è $(1, 0)$. I numeri complessi (2.13) sono le n soluzioni dell'equazione $z^n - 1 = 0$. Si ha anche

$$z^n - 1 = \prod_{k=1}^{n} (z - w_k)\,.$$

Più in generale consideriamo il polinomio

$$P(z) = a_0\,z^n + a_1\,z^{n-1} + \cdots + a_n$$

con $a_k \in \mathbb{R}$. Si può dimostrare che esso può essere fattorizzato nel modo seguente

$$P(z) = a_0(z - z_1)^{m_1}(z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_k)^{m_k} = a_0 \prod_{h=1}^{k} (z - z_h)^{m_h}\,; \tag{2.14}$$

m_h sono interi positivi tali che

$$\sum_{h=1}^{k} m_h = n \,.$$

I numeri complessi z_h sono le uniche radici del polinomio, cioè le soluzione dell'equazione $P(z) = 0$. Gli interi m_h indicano la "molteplicità" di ciascuna radice. Pertanto, se ogni radice z_h viene contata m_h volte, il polinomio P ha n radici. Ricordiamo infine che in $\mathbb{R}$ non sempre è possibile ottenere una fattorizzazione come la (2.14).

Capitolo 3

Limiti di funzioni e successioni

3.1 Definizioni

Se

$$f : x \in X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

è una funzione numerica e x_0 è un punto di accumulazione per X la definizione di limite di f per x che tende a x_0, in simboli

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell\,,$$

si struttura in una delle seguenti tre modalità:

(1) se $\ell \in \mathbb{R}$,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta : \forall x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\,;$$

(2) se $\ell = +\infty$,

$$\forall K \quad \exists \delta : \forall x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) > K\,;$$

(3) se $\ell = -\infty$,

$$\forall K \quad \exists \delta : \forall x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) < K\,.$$

Definizione 3.1.1. - *Se $x_0 \in X$ e*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

si dice che f continua in x_0. La funzione f dicesi continua in X se essa è continua in ogni punto di X.

Sia X non limitato superiormente. Per quanto detto nell'oss. 1.6.1 in un certo senso $+\infty$ si comporta come punto di accumulazione per X. La definizione di limite di f per x che diverge positivamente, in simboli

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell\,,$$

si struttura in una delle seguenti tre modalità:

(4) se $\ell \in \mathbb{R}$,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta\,:\, \forall x \in X \cap]\delta, +\infty[\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\,;$$

(5) se $\ell = +\infty$,

$$\forall K \quad \exists \delta\,:\, \forall x \in X \cap]\delta, +\infty[\Rightarrow f(x) > K\,;$$

(6) se $\ell = -\infty$,

$$\forall K \quad \exists \delta\,:\, \forall x \in X \cap]\delta, +\infty[\Rightarrow f(x) < K\,.$$

In particolare esaminiamo il caso di una successione

$$n \in \mathbb{N} \to a_n \in \mathbb{R}$$

denotata anche con il simbolo $\{a_n\}$. Allora, in luogo di (4), (5) e (6), per

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell\,,$$

si usano le seguenti definizioni:

(4_S) se $\ell \in \mathbb{R}$,
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N}\,:\, \forall n > \nu \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon\,;$$

(5_S) se $\ell = +\infty$,
$$\forall K \quad \exists \nu \in \mathbb{N}\,:\, \forall n > \nu \Rightarrow a_n > K\,;$$

(6_S) se $\ell = -\infty$,
$$\forall K \quad \exists \nu \in \mathbb{N}\,:\, \forall n > \nu \Rightarrow a_n < K\,.$$

Sia X non limitato inferiormente. La definizione di limite di f per x che diverge negativamente, in simboli

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell\,,$$

si struttura in una delle seguenti tre modalità:

(7) se $\ell \in \mathbb{R}$,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta\,:\, \forall x \in X \cap]-\infty, \delta[\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\,;$$

(8) se $\ell = +\infty$

$$\forall K \quad \exists \delta \, : \, \forall x \in X \cap]-\infty, \delta[\Rightarrow f(x) > K\,;$$

(9) se $\ell = -\infty$,

$$\forall K \quad \exists \delta \, : \, \forall x \in X \cap]-\infty, \delta[\Rightarrow f(x) < K\,.$$

Nei casi (1), (4), (4_S), (7) si parla di convergenza. Se $\ell = +\infty\,(-\infty)$ si dice che la funzione o la successione diverge positivamente (negativamente). In ogni caso si parla di funzione o successione regolare.

Definizione 3.1.2. - *Sia $x_0 \in I$ con I intervallo aperto e sia f una funzione definita in $I \setminus \{x_0\}$. Per "limite sinistro" di f in x_0 si intende il limite della restrizione di f a $I \cap]-\infty, x_0[$. Esso si denota con il simbolo*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)\,.$$

Il "limite destro" di f in x_0, in simboli

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)\,,$$

è il limite della restrizione di f a $I \cap]x_0, +\infty[$.

Sussiste il seguente risultato di semplice verifica.

Proposizione 3.1.1. - *Una funzione è regolare in x_0 se e solo se i limiti sinistro e destro in x_0 sono uguali.*

La funzione

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \sin(1/x)\,. \tag{3.2}$$

non è regolare in zero. Si usa in tal caso anche il termine "oscillante".

3.2 Primi risultati

È possibile dare una definizione unificata di limite che abbracci tutti i casi sopra esposti.

Definizione 3.2.1. - *Si dice che f tende a $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ per x che tende a $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ se*

$$\forall J \in \mathcal{I}(l) \quad \exists I \in \mathcal{I}(x_0) \, : \, \forall x \in X \cap I \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in J \tag{3.3}$$

dove $\mathcal{I}(x_0)$ e $\mathcal{I}(\ell)$ indicano le famiglie di intorni di x_0 e ℓ.

Una immediata conseguenza della def. 3.2.1 è costituita dal seguente risultato.

Teorema 3.2.1. (Teorema di unicità del limite) - *Sia f regolare in x_0. Allora il limite di f è unico.*

Dimostrazione. Siano $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ due differenti limiti di f. Fissati $J_1 \in \mathcal{I}(\ell_1)$ e $J_2 \in \mathcal{I}(\ell_2)$, a intersezione vuota, siano I_1 e I_2 gli intorni di x_0 che si vengono a determinare in corrispondenza di J_1, J_2 secondo quanto indicato nella (3.3). Si ha allora che $f(x)$ appartiene sia a J_1 che a J_2 se $x \in I_1 \cap I_2$; ma ciò è assurdo essendo $J_1 \cap J_2 = \emptyset$. □

La funzione (3.1) dicesi limitata superiormente, inferiormente o limitata se il suo codominio $f(X)$ è, rispettivamente, limitato superiormente, inferiormente o limitato. I simboli

$$\sup_X f = \sup f(X)\,, \quad \inf_X f = \inf f(X)$$

denotano rispettivamente l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f in X. Per massimo di f in X, in simboli $\max_X f$, si intende il massimo, se esiste, di $f(X)$. Ogni punto in cui la funzione assume il valore massimo prende il nome di punto di massimo. Per minimo di f in X, in simboli $\min_X f$, si intende il minimo, se esiste, di $f(X)$. Punto di minimo è un qualsiasi punto in cui la funzione f assume il valore minimo. Talvolta, quando non c'è possibilità di equivoco, nei simboli sopra introdotti si può fare a meno di indicare l'insieme in cui f è definita.

Teorema 3.2.2. - *Ogni successione convergente è limitata.*

Dimostrazione. Sia ℓ il limite della successione $\{a_n\}$. Per la definizione (4_S), fissato $\varepsilon > 0$, esiste un indice ν tale che per $n > \nu$ risulti

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon\,.$$

Basta a questo punto osservare che si ha

$$\min\{a_1, \cdots, a_\nu, \ell - \varepsilon\} \leq a_n \leq \max\{a_1, \cdots, a_\nu, \ell + \varepsilon\}$$

per ogni n, il che comporta la limitatezza della successione. □

La versione del teo. 3.2.2 per funzioni assume la seguente veste.

Teorema 3.2.3. - *Sia f convergente in x_0. Esiste allora un intorno I di x_0 e una costante M tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in X \cap I$. La funzione dicesi "definitivamente limitata".*

Dimostrazione. È banale conseguenza della (3.3). □

Riportiamo alcuni importanti risultati per le cui dimostrazioni rimandiamo per esempio a [4].

Teorema 3.2.4. (Teorema della permanenza del segno) - *Sia f definita in X. Se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell > 0\,(< 0)$$

esiste un intorno I di x_0 tale che

$$f(x) > 0\,(< 0) \qquad \forall x \in I \cap X \backslash \{x_0\}\,.$$

Teorema 3.2.5. (Teorema del confronto) - *Siano f, g definite in X.*

(a) *Se*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) < \lim_{x\to x_0} g(x)$$

esiste un intorno I di x_0 tale che

$$f(x) < g(x) \qquad \forall x \in I \cap X \backslash \{x_0\}\,.$$

(b) *Se $f(x) \leq g(x)$ in un intorno di x_0 e f, g sono regolari in x_0 allora*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)\,.$$

In particolare, se f diverge positivamente allora anche g diverge positivamente. Se invece g diverge negativamente allora anche f diverge negativamente.

Teorema 3.2.6. (Teorema dei carabinieri) - *Siano f, g, h definite in X.*
Se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

e se esiste un intorno I di x_0 tale che

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in I \cap X \backslash \{x_0\}$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \ell\,.$$

3.3 Funzioni monotone

Definizione 3.3.1. - *Si dice la funzione* (3.1) *è monotona in X se, al variare di x_1, x_2 in X, si verifica uno dei seguenti casi:*

- $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ (f *crescente*)
- $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (f *strettamente crescente*)
- $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ (f *decrescente*)
- $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (f *strettamente decrescente*).

Teorema 3.3.1. - *Sia f monotona in $]a, b[$. Se f è crescente si ha*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \inf f\,, \quad \lim_{x\to b} f(x) = \sup f\,. \tag{3.4}$$

Se f è decrescente si ha

$$\lim_{x\to a} f(x) = \sup f\,, \quad \lim_{x\to b} f(x) = \inf f\,. \tag{3.5}$$

Dimostrazione. Verifichiamo la seconda delle (3.4). Sia f limitata superiormente. Per la seconda proprietà dell'estremo superiore, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un x_ε tale che

$$\sup f - \varepsilon < f(x_\varepsilon)\,.$$

Se $x \in]x_\varepsilon, b[$, per l'ipotesi di crescenza e per la prima proprietà dell'estremo superiore, abbiamo

$$\sup f - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq \sup f$$

da cui l'asserto.
Sia f non limitata superiormente. Fissato K, esiste un x_K tale che

$$K < f(x_K)\,.$$

Per l'ipotesi di crescenza, se $x \in]x_K, b[$, si ha

$$K < f(x_K) \leq f(x)$$

da cui la divergenza di f.
In modo analogo si dimostrano le altre relazioni di limite. □

La stessa procedura utilizzata per dimostrare il teo. 3.3.1 può ovviamente essere utilizzata per il seguente risultato.

Teorema 3.3.2. - *Ogni successione $\{a_n\}$ monotona è regolare. Se essa è crescente si ha*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup a_n\,;$$

se essa è decrescente si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf a_n\,.$$

Definizione 3.3.2. - *Sia f definita in un intervallo I e sia x_0 un punto di I.*

- *Se f converge in x_0 ad un valore diverso da $f(x_0)$ si dice che f presenta in x_0 una "singolarità eliminabile".*

- *Se in x_0, interno ad I, esistono finiti il limite destro e sinistro di f e se essi sono distinti si dice che x_0 è un "punto di discontinuità di prima specie" per f.*

- *In tutti gli altri casi si parla di "discontinuità di seconda specie".*

Proposizione 3.3.1. - *Sia f monotona in un intervallo I. Se x_0 è un punto interno ad I allora o f è continua in x_0 o in tale punto f presenta una discontinuità di prima specie. Se x_0 è un estremo di I allora o f è continua in x_0 o in x_0 è presente una discontinuità eliminabile.*

Dimostrazione. Supponiamo f crescente. Se x_0 è interno ad I per le (3.4) si ha

$$\ell_- = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x<x_0} f(x) \leq f(x_0) \leq \inf_{x>x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_+ \,. \tag{3.6}$$

Se x_0 è un estremo dell'intervallo, per esempio quello destro, la (3.6) diventa

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x<x_0} f(x) \leq f(x_0) \,.$$

Si ottiene in tal modo l'asserto. □

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente importante criterio di continuità, noto anche come "teorema inverso di Bolzano".

Teorema 3.3.3. - *Sia f monotona in un intervallo $[a, b]$. Se f assume tutti i valori dell'intervallo di estremi $f(a)$ e $f(b)$ allora f è continua.*

Dimostrazione. Per fissare le idee supponiamo f crescente: il suo codominio è allora $[f(a), f(b)]$. Sia f discontinua in $x_0 \in]a, b[$. Nella (3.6) bisogna quindi imporre $\ell_- < \ell_+$. Scegliamo un valore $\ell \in]\ell_-, \ell_+[$ con $\ell \neq f(x_0)$; ovviamente $\ell \in [f(a), f(b)]$. Dalla (3.6) si evince anche che in nessun punto dell'intervallo $[a, b]$ la funzione f assume il valore ℓ; pertanto ℓ non appartiene al codominio di f. Siamo pervenuti ad un assurdo: f deve allora essere continua in x_0. Se x_0 è un estremo di $[a, b]$ si ragiona in modo analogo. □

Per quanto detto nel primo capitolo in relazione alle proprietà dell'operazione di potenza ad esponente reale il teo. 3.3.3 consente di pervenire alle seguenti conclusioni.

Proposizione 3.3.2. - *Le funzioni potenza ad esponente reale, esponenziale e logaritmo sono continue nei rispettivi insiemi di definizione.*

Osservazione 3.3.1. - *In modo del tutto analogo si può dimostrare che anche le funzioni trigonometriche sono continue. Il teo.* 3.3.3 *va applicato alle restrizioni di tali funzioni ad intervalli in cui esse siano monotone. Ovviamente sono anche continue le relative funzioni inverse.*

3.4 Limite di una funzione composta

Assegnate due funzioni

$$f \,:\, x \in X \to f(x) \in Y \,, \quad g \,:\, y \in Y \to g(y) \in \mathbb{R}$$

consideriamo la funzione composta

$$g \circ f \,:\, x \in X \to (g \circ f)(x) = g(f(x)) \,.$$

Proposizione 3.4.1. - *Sia*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \in \overline{\mathbb{R}}\,. \tag{3.7}$$

Supponiamo inoltre che esista un intorno I' di x_0 tale che

$$f(x) \neq y_0 \quad \forall x \in I' \cap X\backslash\{x_0\} \tag{3.8}$$

e che

$$\lim_{y\to y_0} g(y) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}\,. \tag{3.9}$$

Si ha allora

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \ell\,. \tag{3.10}$$

In particolare se f è continua in x_0 e g in y_0 allora $g\circ f$ è continua in x_0.

Dimostrazione. Verifichiamo innanzitutto che ha senso la scrittura (3.9). Se $y_0 \in \mathbb{R}$ un uso combinato delle condizioni (3.7), (3.8) porta a concludere che y_0 è punto di accumulazione per Y. Se $y_0 = +\infty$ la (3.7), unita al fatto che $f(x) \in Y$, assicura che Y non è limitato superiormente. In modo analogo si prova che, se $y_0 = -\infty$, l'insieme Y non è limitato inferiormente.. La (3.9) implica che, in corrispondenza di un intorno I_ℓ di ℓ, è possibile determinare un intorno I_{y_0} di y_0 tale che

$$y \in I_{y_0} \cap Y\backslash\{y_0\} \Longrightarrow g(y) \in I_\ell\,.$$

Per la (3.7), in corrispondenza dell'intorno I_{y_0} di y_0, è possibile determinare un intorno I_{x_0} di x_0 tale che

$$x \in I_{x_0} \cap X\backslash\{x_0\} \Longrightarrow f(x) \in I_{y_0}\,.$$

Tenendo in conto la (3.8), posto $I = I' \cap I_{x_0}$, si ha

$$x \in I \cap X\backslash\{x_0\} \Longrightarrow g(f(x)) \in I_\ell\,.$$

Abbiamo in tal modo dimostrato la (3.10). Si osservi infine che, nel caso in cui le funzioni siano continue, si può prescindere dalla condizione (3.8). $\square$

Osservazione 3.4.1. - *Per la prop.* 3.4.1 *e per la continuità della funzione valore assoluto si ha*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|\,. \tag{3.11}$$

Da sottolineare che l'implicazione inversa non vale.

Proposizione 3.4.2. - *Sia $\{x_n\}$ una successione di punti di $X\backslash\{x_0\}$ che tende a $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Se f è regolare in x_0 si ha*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x)\,. \tag{3.12}$$

Dimostrazione. La successione $\{f(x_n)\}$ si ottiene componendo le funzioni

$$n \in \mathbb{N} \to x_n\,, \qquad x \in X \to f(x)\,.$$

Basta allora applicare la prop. 3.4.1. □

Osservazione 3.4.2. - *Si può utilizzare la* (3.12) *per dedurre la non regolarità di una funzione. Basta infatti trovare due successioni* $\{x'_n\}$, $\{x''_n\}$ *con le caratteristiche indicate nell'enunciato tali che le corrispondenti successioni* $\{f(x'_n)\}$, $\{f(x''_n)\}$ *abbiano limiti differenti. Si usi tale procedura per verificare che la funzione* (3.2) *non è regolare in zero.*

Definizione 3.4.1. - *Sia* $\{a_n\}$ *una successione e sia* $\{n_k\}$ *una successione strettamente crescente di naturali. Allora la successione*

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots\,, \tag{3.13}$$

denotata anche con il simbolo $\{a_{n_k}\}$, *prende il nome di sottosuccessione di* $\{a_n\}$ *o di successione estratta da* $\{a_n\}$.

Proposizione 3.4.3. - *Se* ℓ *è il limite di* $\{a_n\}$ *allora ogni sottosuccessione di* $\{a_n\}$ *tende a* ℓ.

Dimostrazione. La successione (3.13) si ottiene componendo le funzioni

$$k \in \mathbb{N} \to n_k \in \mathbb{N}\,, \quad n \in \mathbb{N} \to a_n \in \mathbb{R}\,.$$

Il risultato segue allora dalla prop. 3.4.1. □

Di semplice verifica è il seguente risultato.

Proposizione 3.4.4. - *Se le due sottosuccessioni* $\{a_{2k}\}$, $\{a_{2k+1}\}$ *tendono allo stesso limite* ℓ *allora anche* $\{a_n\}$ *tende a* ℓ.

Teorema 3.4.1. - *Sia* x_0 *punto di accumulazione per* X. *Esistono successioni di punti di* $X\backslash\{x_0\}$ *convergenti a* x_0. *Se* X *non è limitato superiormente* (*inferiormente*) *esistono successioni di punti di* X *divergenti positivamente* (*negativamente*).

Dimostrazione. Per ogni n scegliamo un punto $x_n \in X\backslash\{x_0\}$ tale che

$$x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}\,.$$

La successione $\{x_n\}$ ha le caratteristiche richieste. In modo analogo si procede negli altri due casi. □

Vogliamo ora dedurre il comportamento di una funzione f in x_0 semplicemente testando il comportamento delle restrizioni della funzione alle successioni che tendono a x_0. Sussiste infatti il seguente risultato noto come "teorema ponte".

Teorema 3.4.2. - *Se $\{f(x_n)\}$ è regolare per ogni successione $\{x_n\}$ di punti di $X\backslash\{x_0\}$ tendente a x_0 allora f è regolare in x_0.*

Dimostrazione. Verifichiamo innanzitutto che tutte le successioni $\{f(x_n)\}$ hanno lo stesso limite. Siano $\{x_{n,1}\}$ e $\{x_{n,2}\}$ due successioni, entrambe tendenti a x_0, tali che le corrispondenti successioni $\{f(x_{n,1})\}$ e $\{f(x_{n,2})\}$ abbiano limiti distinti. Assembliamo le due successioni $\{x_{n,1}\}$ e $\{x_{n,2}\}$ in un'unica successione $\{y_n\}$ inserendo i termini della prima nei posti con indice dispari, quelli dell'altra nei posti con indice pari. Per quanto detto nella prop. 3.4.4 la successione $\{y_n\}$ tende a x_0, quindi $\{f(y_n)\}$ deve essere regolare. D'altra parte quest'ultima successione non è regolare per la prop. 3.4.3 in quanto le sottosuccessioni $\{f(x_{n,1})\}$ e $\{f(x_{n,2})\}$ tendono a limiti diversi. Siamo pervenuti ad un assurdo; pertanto tutte le successioni $\{f(x_n)\}$, con $\{x_n\}$ tendente a x_0, hanno lo stesso limite ℓ. Verifichiamo che ℓ è il limite di f. Per semplicità supponiamo che x_0 sia punto di accumulazione per X. Se ℓ non è il limite di f allora

$$\exists I \in \mathcal{I}(\ell) \, : \, \forall n \quad \exists x_n \in X \cap]x_0 - 1/n, x_0 + 1/n[\backslash \{x_0\} \, : \, f(x_n) \notin I \, .$$

La successione $\{x_n\}$ tende a x_0 mentre ℓ non è il limite di $\{f(x_n)\}$: siamo quindi pervenuti ad un assurdo. Ciò prova l'asserto. □

3.5 Limiti e operazioni

Elenchiamo alcuni risultati relativi al limite di somme, prodotti e quozienti di funzioni regolari; per le dimostrazioni rimandiamo ad un qualsiasi testo di Analisi Matematica 1.
Poniamo

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \ell_1 \, , \quad \lim_{x\to x_0} f_2(x) = \ell_2 \, . \tag{3.14}$$

Proposizione 3.5.1. - *Se $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ si ha*

$$\lim_{x\to x_0} [f_1(x) + f_2(x)] = \ell_1 + \ell_2 \, . \tag{3.15}$$

In particolare, se f_1, f_2 sono continue in x_0, allora $f_1 + f_2$ è continua in x_0.

La formula (3.15) è suscettibile delle seguenti estensioni:

- se uno dei due limiti (3.14) è $+\infty$ e l'altro è diverso da $-\infty$ il limite della funzione $f_1 + f_2$ è $+\infty$;
- se uno dei due limiti (3.14) è $-\infty$ e l'altro è diverso da $+\infty$ il limite della funzione $f_1 + f_2$ è $-\infty$.

Si può dare quindi significato alla somma di due elementi di $\overline{\mathbb{R}}$ nei seguenti ulteriori casi

(E_1) $a + (+\infty) = +\infty \quad$ se $a \neq -\infty$;

(E_2) $a + (-\infty) = -\infty \quad$ se $a \neq +\infty$.

La formula (3.15) non si applica solo nel caso in cui a secondo membro compare la seguente espressione

(I_1) $(+\infty) + (-\infty)$.

La (I_1) costituisce il primo caso di "forma indeterminata".

Proposizione 3.5.2. - *Se $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ si ha*

$$\lim_{x \to x_0} [f_1(x)\, f_2(x)] = \ell_1\, \ell_2 \, . \tag{3.16}$$

In particolare, se f_1, f_2 sono continue in x_0, allora $f_1\, f_2$ è continua in x_0.

La formula (3.16) è suscettibile delle seguenti estensioni:

- se uno dei due limiti (3.14) è $+\infty$ e l'altro è un elemento di $\overline{\mathbb{R}}$ positivo il limite della funzione $f_1\, f_2$ è $+\infty$;
- se uno dei due limiti (3.14) è $+\infty$ e l'altro è un elemento di $\overline{\mathbb{R}}$ negativo il limite della funzione $f_1\, f_2$ è $-\infty$;
- se uno dei due limiti (3.14) è $-\infty$ e l'altro è un elemento di $\overline{\mathbb{R}}$ positivo il limite della funzione $f_1\, f_2$ è $-\infty$;
- se uno dei due limiti (3.14) è $-\infty$ e l'altro è un elemento di $\overline{\mathbb{R}}$ negativo il limite della funzione $f_1\, f_2$ è $+\infty$.

Si può dare quindi significato al prodotto di due elementi di $\overline{\mathbb{R}}$ nei seguenti ulteriori casi

(E_3) $a\,(+\infty) = +\infty \quad$ se $a > 0$;

(E_4) $a\,(+\infty) = -\infty \quad$ se $a < 0$;

(E_5) $a\,(-\infty) = -\infty \quad$ se $a > 0$;

(E_6) $a\,(-\infty) = +\infty \quad$ se $a < 0$.

La formula (3.16) non si applica solo nel caso in cui a secondo membro compare l'espressione

(I_2) $0\,(\pm\infty)$.

La (I_2) è una ulteriore "forma indeterminata".

Osservazione 3.5.1. - *Dai precedenti risultati si deduce che*

$$\lim_{x \to x_0} [a_1\, f_1(x) + a_2\, f_2(x)] = a_1\, \ell_1 + a_2\, \ell_2$$

con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. In particolare si ha

$$\lim_{x \to x_0} [f_1(x) - f_2(x)] = \ell_1 - \ell_2 \, .$$

Occupiamoci infine del limite del quoziente di f_1 e f_2.

Proposizione 3.5.3. - *Se $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ con $\ell_2 \neq 0$ si ha*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}\,. \tag{3.17}$$

Se le funzioni f_1, f_2 sono continue in x_0 e $f_2(x_0) \neq 0$, la funzione f_1/f_2 è continua in x_0.

Limitiamoci a sottolineare che la condizione $\ell_2 \neq 0$, via il teo. 3.2.4, implica che f_2 è diversa da zero in un intorno di x_0; ciò comporta che la funzione f_1/f_2 è ben definita in un intorno di x_0.

La formula (3.17) è suscettibile delle seguenti estensioni:

- se $\ell_1 \in \mathbb{R}$ e $\ell_2 = \pm\infty$ il limite della funzione f_1/f_2 è zero;
- se $\ell_1 = +\infty$ e ℓ_2 è un numero reale positivo il limite di f_1/f_2 è $+\infty$;
- se $\ell_1 = +\infty$ e ℓ_2 è un numero reale negativo il limite di f_1/f_2 è $-\infty$;
- se $\ell_1 = -\infty$ e ℓ_2 è un numero reale positivo il limite di f_1/f_2 è $-\infty$;
- se $\ell_1 = -\infty$ e ℓ_2 è un numero reale negativo il limite di f_1/f_2 è $+\infty$.

Si può dare quindi significato al quoziente di due elementi di $\overline{\mathbb{R}}$ nei seguenti ulteriori casi

(E_7) $\dfrac{a}{\pm\infty} = 0\,;$

(E_8) $\dfrac{+\infty}{a} = +\infty \quad$ se $a \in \mathbb{R}^+\,;$

(E_9) $\dfrac{+\infty}{a} = -\infty \quad$ se $a \in \mathbb{R}^-\,;$

(E_{10}) $\dfrac{-\infty}{a} = -\infty \quad$ se $a \in \mathbb{R}^+\,;$

(E_{11}) $\dfrac{-\infty}{a} = +\infty \quad$ se $a \in \mathbb{R}^-\,.$

Analizziamo ora il caso in cui ℓ_2 è nullo. Supponiamo che esista un intorno I di x_0 tale che

- $f_2(x) > 0 \quad \forall x \in I \cap X \backslash \{x_0\} \qquad$ (f_2 definitivamente positiva);
- $f_2(x) < 0 \quad \forall x \in I \cap X \backslash \{x_0\} \qquad$ (f_2 definitivamente negativa).

Il limite della funzione f_1/f_2 è

- $+\infty$ se $\ell_1 > 0$, $\ell_2 = 0$ e f_2 è definitivamente positiva;
- $-\infty$ se $\ell_1 > 0$, $\ell_2 = 0$ e f_2 è definitivamente negativa;

- $-\infty$ se $\ell_1 < 0$, $\ell_2 = 0$ e f_2 è definitivamente positiva;
- $+\infty$ se $\ell_1 < 0$, $\ell_2 = 0$ e f_2 è definitivamente negativa.

La formula (3.17) non si applica nel caso in cui il secondo membro assume una delle seguenti espressioni

(I_3) $\dfrac{0}{0}$;

(I_4) $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Le $(I_3), (I_4)$ sono ulteriori casi di "forme indeterminate".

Esempio 3.5.1. - *Assegnati due polinomi*

$$P(x) = a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + \cdots + a_n\,, \quad Q(x) = b_0\, x^m + b_1\, x^{m-1} + \cdots + b_m\,,$$

con $a_0, b_0 \neq 0$, *si ha*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = x^{n-m}\, \frac{a_0}{b_0}\, \frac{1 + \dfrac{a_1}{a_0}\dfrac{1}{x} + \cdots + \dfrac{a_n}{a_0}\dfrac{1}{x^n}}{1 + \dfrac{b_1}{b_0}\dfrac{1}{x} + \cdots + \dfrac{b_m}{b_0}\dfrac{1}{x^m}}\,. \tag{3.18}$$

Si ha allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0} & \text{se } n = m \\[2ex] +\infty & \text{se } n > m \text{ e } \dfrac{a_0}{b_0} > 0 \\[2ex] -\infty & \text{se } n > m \text{ e } \dfrac{a_0}{b_0} < 0 \\[2ex] 0 & \text{se } n < m\,. \end{cases}$$

Per quanto riguarda il limite per x che diverge negativamente del rapporto (3.18) *bisogna tener conto che il comportamento della funzione* x^{n-m} *dipende dalla parità dell'esponente.*

Occupiamoci ora di stabilire il limite della funzione

$$x \longrightarrow f_1(x)^{f_2(x)} \tag{3.19}$$

con f_1 strettamente positiva.

Proposizione 3.5.4. - *Sussistano le* (3.14) *con* $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. *Se* $\ell_1 > 0$ *si ha*

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x)^{f_2(x)} = {\ell_1}^{\ell_2}\,. \tag{3.20}$$

In particolare se le funzioni f_1, f_2 *sono continue in* x_0 *e* $f_1(x_0) > 0$ *la funzione* (3.19) *è continua in* x_0.

Dimostrazione. Per la continuità delle funzioni esponenziale e logaritmo (cfr. teo. 3.3.2), ricordando le prop. 3.5.2 e 3.4.1, abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f_1(x)^{f_2(x)} &= \lim_{x\to x_0} e^{f_2(x)\log f_1(x)} \\ &= e^{\lim_{x\to x_0}[f_2(x)\log f_1(x)]} = e^{\ell_2\log\ell_1} = {\ell_1}^{\ell_2}\end{aligned}$$

ovvero la (3.20). □

La formula (3.20) è suscettibile delle seguenti estensioni:

- ${\ell_1}^{+\infty} = +\infty \quad$ se $\ell_1 > 1$ oppure $\ell_1 = +\infty$;
- ${\ell_1}^{-\infty} = 0 \quad$ se $\ell_1 > 1$ oppure $\ell_1 = +\infty$;
- ${\ell_1}^{+\infty} = 0 \quad$ se $\ell_1 \in [0, 1[$;
- ${\ell_1}^{-\infty} = +\infty \quad$ se $\ell_1 \in [0, 1[$.

Si può dare quindi significato alla potenza di due elementi di $\overline{\mathbb{R}}$ nei seguenti ulteriori casi

(E_{12}) se $a > 1$ ovvero $a = +\infty$ allora $a^{+\infty} = +\infty$ e $a^{-\infty} = 0$;

(E_{13}) se $a \in [0, 1[$ allora $a^{+\infty} = 0$ e $a^{-\infty} = +\infty$.

La formula (3.20) non si applica quando il seguente limite

$$\lim_{x\to x_0} [f_2(x)\log f_1(x)]$$

si presenta nella forma indetermina (I_2). Abbiamo quindi le seguenti ulteriori "forme indeterminate".

(I_5) 0^0 ;

(I_6) $1^{\pm\infty}$;

(I_7) $(+\infty)^0$.

3.6 Il numero e

Un procedimento alternativo per definire il numero di Nepero (1.25) passa attraverso la successione il cui termine generale è

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n . \tag{3.21}$$

La quantità (3.21) rappresenta il capitale maturato a seguito di un investimento per il quale venga riconosciuto l'interesse annuale del cento per cento, nell'ipotesi ulteriore che gli interessi vengano capitalizzati n volte a periodi regolari. Si tratta ovviamente di calcolare gli interessi composti ed è ragionevole accettare l'idea che risulta più vantaggiosa quella proposta di capitalizzazione che preveda, a parità di interesse corrisposto, un numero maggiore di intervalli intermedi in cui gli interessi via via maturati si aggiungono al capitale. Tali considerazioni suggeriscono che la successione (3.21) deve essere crescente. Poiché

$$
\begin{aligned}
\frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}} &= \left(\frac{1+\dfrac{1}{n+1}}{1+\dfrac{1}{n}}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n} \\
&\qquad \text{(per la disuguaglianza (1.6))} \\
&\geq \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{n+1}{n}=1
\end{aligned}
$$

risulta infatti

$$
\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.
$$

La successione (3.21) è regolare per il teo. 3.3.2: sia ℓ il suo limite. Si ha

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2}+\frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{n!}{n^n} \\
&< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\,.
\end{aligned}
$$

Per il teo. 3.2.5 e la (1.25) abbiamo $\ell \leq e$. Fissato m, se $n > m$ risulta

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \\
&\geq \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\,.
\end{aligned}
$$

Per ogni k si ha (cfr. es. 3.5.1)

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}=1\,.
$$

Per il teo. 3.2.5 abbiamo

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\,.$$

Ancora per la (1.25) si ha $\ell \geq e$. Possiamo quindi concludere che

$$e = \sup_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n . \tag{3.22}$$

La successione il cui termine generale è

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{3.23}$$

tende ovviamente ad e. Essa è però decrescente. Bisogna verificare che

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$$

ovvero

$$1 + \frac{1}{n} < \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n .$$

Quest'ultima relazione è conseguenza della disuguaglianza (1.6); si ha infatti

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n}\,.$$

Possiamo quindi affermare che il numero di Nepero è l'estremo inferiore della successione il cui termine generale è (3.23). In definitiva abbiamo

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} , \tag{3.24}$$

da cui

$$e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{e}{n}\,.$$

Un confronto con la (1.26) porta a concludere che la successione il cui termine generale è (3.21) converge ad e meno rapidamente della successione il cui termine generale è (1.25).

3.7 La lista dei "limiti notevoli"

In tale paragrafo sono raggruppati alcuni limiti tutti in forma indeterminata.

Osserviamo innanzitutto che le seguenti diseguaglianze

$$0 < |\sin x| < |x| \,, \quad 0 < 1 - \cos x < |\sin x| \quad \forall x \in]-\pi/2, \pi/2[\setminus \{0\}$$

comportano, via il teo. 3.2.6, che

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \tag{3.25}$$

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 \,. \tag{3.26}$$

Le (3.25) e (3.26) confermano quanto già osservato in relazione alla continuità delle funzioni seno e coseno. Dalla diseguaglianza

$$\sin x < x < \tan x \,, \quad x \in]0, \pi/2[$$

discende che

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \,, \quad x \in]-\pi/2, \pi/2[\setminus \{0\} \,. \tag{3.27}$$

Per la (3.26) e per il teo. 3.26 si ha

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \,. \tag{3.28}$$

Osservato che

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) \,,$$

per la (3.28) e per le prop. 3.5.2, 3.4.1 si ha

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \tag{3.29}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \,. \tag{3.30}$$

Consideriamo la funzione

$$x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \to \frac{\arcsin x}{x} \,.$$

Essa può considerarsi come composta dalle funzione arcoseno e

$$y \in [-\pi/2, \pi/2] \setminus \{0\} \to \frac{y}{\sin y} \,.$$

Per la prop. 3.4.1 e per la (3.28) si ha allora

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \,.$$

Si verifica facilmente che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1\,, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1\,.$$

Consideriamo ora la funzione

$$x \in \mathbb{R}\backslash[-1,0] \longrightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\,.$$

La "funzione parte intera" di x è definita nel modo seguente

$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow [x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \,:\, n \le x\}\,.$$

Essendo $[x] \le x < [x]+1$ risulta

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}\,. \tag{3.31}$$

La funzione a primo membro nella (3.31) è la funzione composta della funzione parte intera e di

$$n \in \mathbb{N} \longrightarrow \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\,.$$

Utilizzando la prop. 3.4.1 abbiamo

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = e\,.$$

In modo analogo si prova che

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = e\,.$$

La (3.31) consente di applicare il teo. 3.2.5; si ha allora

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\,. \tag{3.32}$$

Sia ora $x < -1$. Risulta

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1-\frac{1}{|x|}\right)^{-|x|} = \left(1+\frac{1}{|x|-1}\right)^{|x|}$$

da cui ancora per la prop. 3.4.1

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\,. \tag{3.33}$$

Proposizione 3.7.1. - *Se $a \in \mathbb{R}$ si ha*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a \tag{3.34}$$

e, in particolare,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}\,. \tag{3.35}$$

Dimostrazione. Essendo

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right]^a\,,$$

per la prop. 3.4.2 e per la (3.32), se $a > 0$, ovvero per la (3.33), se $a < 0$, risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}} = e\,.$$

Per la continuità della funzione potenza si ottiene la (3.34). □

Consideriamo la funzione

$$x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\} \to (1+x)^{\frac{1}{x}}\,.$$

Essa è composta dalle funzioni

$$x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\} \longrightarrow \frac{1}{x}\,, \qquad y \in \mathbb{R}\setminus[-1,0] \longrightarrow \left(1+\frac{1}{y}\right)^y\,.$$

Osservato che

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty\,, \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty\,,$$

dalle (3.32) e (3.33), facendo uso della prop. 3.4.1, si ha

$$\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\,. \tag{3.36}$$

Dalla (3.36) e dalla continuità della funzione logaritmo si ha intanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \tag{3.37}$$

e quindi, in particolare,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1\,. \tag{3.38}$$

Consideriamo la funzione

$$x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \frac{a^x - 1}{x}\,.$$

Essa può considerarsi come composta da

$$x \to a^x - 1\,, \qquad y \to \frac{y}{\log_a(1+y)}\,.$$

Per la prop. 3.4.1 e la (3.37) si ha allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a\,. \tag{3.39}$$

In particolare abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,. \tag{3.40}$$

Si ha

$$\frac{(1+x)^a - 1}{x} = \frac{e^{a\log(1+x)} - 1}{x} = a\,\frac{e^{a\log(1+x)} - 1}{a\log(1+x)}\;\frac{\log(1+x)}{x}\,.$$

Per la prop. 3.4.1 e la (3.40) risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{a\log(1+x)} - 1}{a\log(1+x)} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = e\,.$$

In definitiva abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a\,. \tag{3.41}$$

3.8 Il criterio di convergenza di Cauchy

Per il teo. 3.2.2 una successione convergente è limitata. D'altra parte, come già osservato in precedenza, la limitatezza da sola non assicura la convergenza. Le successioni limitate hanno però una notevole proprietà illustrata nel seguente risultato.

Teorema 3.8.1. - *Da ogni successione limitata $\{a_n\}$ è possibile estrarre una successione convergente.*

Dimostrazione. Se il sostegno della successione è finito allora c'è un valore $\bar{a}$ che si ripete infinite volte nella successione. Basta allora considerare la sotto-successione i cui termini sono per l'appunto quelli uguali ad $\bar{a}$. Se il sostegno è infinito esso, in quanto limitato, per il teo. 1.6.1 ha un punto di accumulazione $\bar{a}$. Abbiamo già osservato (cfr. teo. 3.4.1) che $\bar{a}$ è limite di una successione di punti del sostegno di $\{a_n\}$. Dobbiamo ora riprendere la dimostrazione di detta proposizione per fare in modo che la successione convergente a $\bar{a}$ sia una sottosuccessione di $\{a_n\}$. Consideriamo l'intorno $I_1 =]\bar{a}-1, \bar{a}+1[$ e indichiamo con $\{a_{k,1}\}$ la sottosuccessione di $\{a_n\}$ costituita dai termini che appartengono a I_1. Si consideri l'intervallo $I_2 =]\bar{a}-1/2, \bar{a}+1/2[$ e indichiamo con $\{a_{k,2}\}$ la successione estratta da $\{a_{k,1}\}$ costituita dagli elementi che appartengono a I_2. Procedendo allo stesso modo per ogni intervallo $I_k =]a_0 - 1/k, a_0 + 1/k[$ viene a generarsi una tabella del tipo

$$\begin{array}{ccccc} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} & \cdots \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,k} & a_{2,k} & \cdots & a_{n,k} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} .$$

Ogni riga è estratta della successione dei termini della riga precedente. Consideriamo la successione diagonale $\{a_{k,k}\}$. Per ogni k il termine $a_{k+1,k+1}$ segue $a_{k,k}$ nella successione $\{a_n\}$. Infatti i primi k termini della successione che occupa la riga $(k+1)$-ma, possono, nella peggiore delle ipotesi, occupare i primi k posti della riga precedente: ciò implica che l'indice che compete a $a_{k+1,k+1}$ nella successione $\{a_n\}$ è strettamente maggiore dell'indice del termine $a_{k,k}$. La successione diagonale è ancora una sottosuccessione di $\{a_n\}$. Si ha

$$\bar{a} - \frac{1}{k} < a_{k,k} < \bar{a} + \frac{1}{k} \, .$$

Per il teo. 3.2.6 la sottosuccessione $\{a_{k,k}\}$ tende ad $\bar{a}$. □

Dal teo. 3.8.1 si ottiene il seguente fondamentale risultato noto come "criterio di convergenza di Cauchy".

Teorema 3.8.2. - *Condizione necessaria e sufficiente affinché una successione $\{a_n\}$ sia convergente è che sussista la seguente condizione*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \quad : \quad \forall n, m > \nu \quad |a_n - a_m| < \varepsilon \, . \tag{3.42}$$

Dimostrazione. Si verifica facilmente che la (3.42) è necessaria. Verifichiamo che essa è condizione sufficiente. Dalla (3.42), se $n > \nu$ si ha $|a_{\nu+1} - a_n| < \varepsilon$ e quindi

$$a_{\nu+1} - \varepsilon < a_n < a_{\nu+1} + \varepsilon \, .$$

Tale relazione comporta che la successione $\{a_n\}$ è limitata. Per il teo. 3.8.1 esiste quindi una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ convergente; sia ℓ il suo limite. Poiché la successione di indici $\{n_k\}$ diverge è possibile determinare un indice κ tale che $n_k > \nu$ se $k > \kappa$. Dalla (3.42), se $n > \nu$ e $k > \kappa$, si ha

$$|a_n - a_{n_k}| < \varepsilon$$

e quindi, passando al limite su k,

$$|a_n - \ell| \leq \varepsilon \qquad \forall n > \nu\,.$$

Abbiamo in tal modo ottenuto l'asserto. □

Il criterio di convergenza di Cauchy può essere formulato per le funzioni nel modo seguente.

Teorema 3.8.3. - *La funzione f è convergente in x_0 se e solo se*

$$\forall \varepsilon > o \quad \exists I \in \mathcal{I}(x_0) \,:\, |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad \forall x', x'' \in I \cap X \backslash \{x_0\} \tag{3.43}$$

con X insieme di definizione di f.

Dimostrazione. Limitiamoci anche in questo caso a verificare che la (3.43) implica la convergenza di f in x_0. Consideriamo una successione $\{x_n\}$ di punti di $X \backslash \{x_0\}$ con limite x_0. In corrispondenza dell'intervallo I riportato nella (3.43) si può determinare un indice ν tale che $x_n \in I$ per $n > \nu$. Si ha allora

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \qquad \forall n, m > \nu\,.$$

Quindi la successione $\{f(x_n)\}$ soddisfa la (3.42) ed è pertanto convergente. Basta allora applicare il teo. 3.4.2 per giungere alla conclusione. □

3.9 Massimo e minimo limite

Se $\{a_n\}$ è una successione limitata è possibile definire due successioni i cui termini generali sono

$$e'_k = \inf_{n \geq k} a_n\,, \qquad e''_k = \sup_{n \geq k} a_n\,.$$

Si ha

$$e'_k \leq e'_{k+1} \leq e''_{k+1} \leq e''_k\,.$$

Quindi le successioni $\{e'_k\}$ e $\{e''_k\}$ sono limitate, la prima crescente, la seconda decrescente. Per il teo. 3.3.2 si ha

$$\ell' = \lim_{k \to \infty} e'_k = \sup_k e'_k \leq \inf_k e''_k = \lim_{k \to \infty} e''_k = \ell''\,.$$

Definizione 3.9.1. - *Le quantità ℓ' e ℓ'', note come "minimo limite" e "massimo limite" di $\{a_n\}$, si denotano rispettivamente con i simboli*

$$\liminf_{n \to +\infty} a_n\,, \qquad \limsup_{n \to +\infty} a_n\,.$$

Sussiste il seguente risultato.

Proposizione 3.9.1. - *Il massimo (minimo) limite gode delle proprietà*

$$(\alpha) \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \quad : \quad \forall n \geq \nu \quad a_n < \ell'' + \varepsilon \quad (a_n > \ell' - \varepsilon),$$

$$(\beta) \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad e \quad \forall \nu \quad \exists n \geq \nu \quad : \quad a_n > \ell'' - \varepsilon \quad (a_n < \ell' + \varepsilon).$$

Dimostrazione. Poiché ℓ'' è il limite della successione $\{e''_k\}$, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un indice ν tale che

$$e''_\nu = \sup_{n \geq \nu} a_n < \ell'' + \varepsilon \,.$$

Quindi, per ogni $n \geq \nu$, si ha

$$a_n \leq \sup_{n \geq \nu} a_n < \ell'' + \varepsilon$$

ovvero (α). Fissati ε e ν, essendo

$$e''_\nu = \sup_{n \geq \nu} a_n \,,$$

per la seconda proprietà dell'estremo superiore esiste un indice $n \geq \nu$ tale che

$$a_n > e''_\nu - \varepsilon \geq \ell'' - \varepsilon \,,$$

cioè (β).
In modo analogo si procede per le proprietà relative al minimo limite. □

Proposizione 3.9.2. - *Le condizioni (α) e (β) caratterizzano il massimo e il minimo limite nel senso che se esistono valori λ'' e λ' che le verificano allora deve essere $\lambda'' = \ell''$ e $\lambda' = \ell'$.*

Dimostrazione. Limitiamoci al caso del minimo limite. Se $\lambda' < \ell'$ scegliamo ε in modo tale che risulti $\lambda' + \varepsilon < \ell' - \varepsilon$. Per la proprietà (α) se $n > \nu$ deve essere $a_n > \ell' - \varepsilon$. D'altra parte, per la proprietà (β) riferita a λ', infiniti termini della successione devono essere minori di $\lambda' + \varepsilon$. L'assurdo cui siamo pervenuti implica che $\lambda' \geq \ell'$. In modo analogo si prova che $\lambda' \leq \ell'$. Deve quindi essere $\lambda' = \ell'$. □

Come conseguenza dei risultati ottenuti si ottiene la seguente caratterizzazione delle successioni convergenti.

Proposizione 3.9.3. - *Una successione $\{a_n\}$ converge se e solo se il massimo ed il minimo limite coincidono. Risulta allora*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \liminf_{n \to \infty} a_n = \limsup_{n \to \infty} a_n \,. \qquad (3.44)$$

Dimostrazione. La successione converga a ℓ. Allora ℓ soddisfa le condizioni (α) e (β) relative al massimo e minimo limite. Per la prop. 3.9.2 vale la (3.44). Viceversa, se vale la (3.44), allora dalla proprietà (α), relativa sia al massimo che al minimo limite, si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \quad : \quad \forall n > \nu \quad \ell - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \,;$$

quindi la successione converge ad ℓ. □

Vediamo come è possibile procedere se si elimina l'ipotesi di limitatezza della successione $\{a_n\}$. Distinguiamo vari casi.
1 - Supponiamo che $\{a_n\}$ sia limitata inferiormente e non limitata superiormente. In tal caso si pone

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

mentre è ancora

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} e'_k \,.$$

Ovviamente quest'ultimo limite può anche essere $+\infty$.
2 - Se $\{a_n\}$ è limitata superiormente ma non limitata inferiormente si pone

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

e, ancora,

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} e''_k \,.$$

Quest'ultimo limite può anche essere $-\infty$.
3 - Se la successione non è limitata né superiormente né inferiormente si pone

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty \,, \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty \,.$$

Vale la pena di osservare che l'enunciato della prop. 3.9.3 continua a sussistere nel senso che una successione risulta regolare se e soltanto se il minimo limite coincide con il massimo limite.
Per concludere è utile richiamare il seguente risultato che in qualche modo spiega perché ℓ' e ℓ'' assumono il nome di minimo e massimo limite.

Proposizione 3.9.4. - *Data una successione $\{a_n\}$, esistono sottosuccessioni che tendono al minimo limite e sottosuccessioni che tendono al massimo limite. Inoltre non esistono sottosuccessioni che tendono ad un limite strettamente maggiore del massimo limite o strettamente minore del minimo limite.*

Dimostrazione. Assumiamo che il massimo e il minimo limite siano finiti. La condizione (α) assicura che nessuna sottosuccessione di $\{a_n\}$ può tendere ad un valore più grande del massimo limite o più piccolo del minimo limite. Le due condizioni (α), (β) comportano che in ogni intorno del minimo e del massimo limite ci sono infiniti termini della successione. Basta allora procedere come nella dimostrazione del teo. 3.8.1 per concludere che esistono sottosuccessioni che tendono al massimo o al minimo limite. Più semplice è la verifica nel caso in cui il massimo o il minimo limite non siano finiti. □

Concludiamo osservando che la nozione di massimo e minimo limite può essere formulata anche per funzioni. Ci asteniamo per brevità dal fornire i dettagli di tale estensione.

3.10 Medie aritmetiche e geometriche

La successione di termine generale

$$A_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

è detta successione delle medie aritmetiche di $\{a_n\}$. Sussiste il seguente risultato.

Proposizione 3.10.1. - *Se* $\{a_n\}$ *è regolare anche* $\{A_n\}$ *è regolare e si ha*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} A_n\,.$$

Dimostrazione. Sia ℓ il limite di $\{a_n\}$. Se $\ell \in \mathbb{R}$, Fissato ε, determiniamo ν in modo che

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \qquad \forall n > \nu\,.$$

Se $n > \nu$ risulta pertanto

$$\begin{aligned} |A_n - \ell| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - \ell)\right| \\ &\le \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\nu}(a_k - \ell)\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=\nu+1}^{n}|a_n - \ell| \\ &\le \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\nu}(a_k - \ell)\right| + \frac{n-\nu}{n}\,\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\nu}(a_k - \ell) = 0$$

è possibile determinare un indice a partire dal quale

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\nu}(a_k - \ell)\right| < \varepsilon\,.$$

In definitiva, per n abbastanza grande si ha $|A_n - \ell| < 2\,\varepsilon$ da cui l'asserto.
Sia $\ell = +\infty$. Fissato K determiniamo ν in modo tale che

$$a_n > K\,, \qquad \forall n > \nu\,.$$

Se $n > \nu$ si ha

$$A_n = \frac{a_1 + \cdots + a_\nu}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=\nu+1}^{n} a_k > \frac{a_1 + \cdots + a_\nu}{n} + \frac{n-\nu}{n} K \, .$$

Poiché la successione di termine generale

$$\frac{a_1 + \cdots + a_\nu}{n}$$

è infinitesima è possibile scegliere un indice ν' a partire dal quale risulti

$$\frac{a_1 + \cdots + a_\nu}{n} > -\frac{K}{4} \, .$$

Se facciamo in modo che a partire da tale indice risulti anche

$$\frac{n-\nu}{n} > \frac{1}{2}$$

si ha

$$A_n > \frac{k}{4} \, , \qquad \forall n > \nu' \, ;$$

pertanto $\{A_n\}$ diverge positivamente. La dimostrazione varia di poco se $\{a_n\}$ diverge negativamente. $\square$

Se $\{a_n\}$ è a termini positivi la successione di termine generale

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \, a_2 \, \cdots \, a_n}$$

è nota come successione delle medie geometriche di $\{a_n\}$. Si può dimostrare che

$$G_n \leq A_n \, .$$

Proposizione 3.10.2. - *Se $\{a_n\}$ è regolare anche $\{G_n\}$ è regolare e si ha*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} G_n \, .$$

Dimostrazione. Sia ℓ il limite di $\{a_n\}$. Si ha allora

$$\lim_{n\to\infty} \log G_n \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log a_1 + \cdots \log a_n}{n}$$

(per la prop. 3.10.1)

$$= \quad \lim_{n\to\infty} \log a_n = \begin{cases} -\infty & \text{se } \ell = 0 \\ \log \ell & \text{se } \ell > 0 \\ +\infty & \text{se } \ell = +\infty \end{cases}$$

da cui ovviamente l'asserto. $\square$

Osservazione 3.10.1. - *La successione delle medie aritmetiche può essere regolare anche se tale non è la successione data. Ad esempio la successione* $\{(-1)^{n+1}\}$ *non è regolare mentre la successione delle medie aritmetiche è infinitesima. Un'analoga considerazione può essere fatta per la successione delle medie geometriche. Si pensi alla successione il cui termine generale è* $2^{(-1)^{n+1}}$.

Esempio 3.10.1. - *Consideriamo la successione*

$$1,\, 2,\, \frac{3}{2},\, \cdots,\, \frac{n}{n-1},\, \cdots .$$

Per la prop. 3.10.2 *si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 . \tag{3.45}$$

Dalla (3.45) *si deduce che*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0 .$$

Più in generale si ha

Proposizione 3.10.3. - *Sia* $\{a_n\}$ *una successione a termini positivi. Se la successione*

$$a_1,\, \frac{a_2}{a_1},\, \cdots,\, \frac{a_n}{a_{n-1}},\, \cdots \tag{3.46}$$

è regolare tale è anche la successione $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ *e si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} . \tag{3.47}$$

Osservazione 3.10.2. - *La successione* $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ *può essere regolare anche se tale non è la successione* (3.46)*. Un esempio è costituito dalla successione i cui termini di posto dispari sono uguali a* 1*, quelli di posto pari uguali a* 2*.*

La (3.47) è suscettibile della seguente generalizzazione (cfr. anche [12]).

Proposizione 3.10.4. - *Per ogni successione a termini positivi si ha*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} . \tag{3.48}$$

Dimostrazione. Se

$$h > \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

esiste un indice ν tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < h , \qquad \forall n \ge \nu .$$

Usando il principio di induzione si ha

$$a_n < \frac{a_\nu}{h^\nu} h^n , \qquad \forall n > \nu$$

e, quindi,

$$\sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{a_\nu}{h^\nu}}h\,, \qquad \forall n > \nu\,.$$

Si ha allora

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq h$$

ovvero, data l'arbitrarietà di h,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\,.$$

in modo analogo si dimostra l'altra disuguaglianza. □

Proposizione 3.10.5. - *Sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi. Se*

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1(> 1) \tag{3.49}$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0(= +\infty)\,.$$

Dimostrazione. Scelto $h \in]\ell, 1[$ si ha definitivamente

$$\sqrt[n]{a_n} < h \tag{3.50}$$

e, quindi, sempre definitivamente $a_n < h^n$. Poiché $h < 1$ la successione $\{h^n\}$ è infinitesima; tale è anche la successione $\{a_n\}$. Passando ai reciproci si ottiene l'asserto se $\ell > 1$ □

Osservazione 3.10.3. - *Per la* (3.47) *e per la prop.* 3.10.5*, se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1\,,$$

$\{a_n\}$ è infinitesima.

Proposizione 3.10.6. - *Si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}\,. \tag{3.51}$$

Dimostrazione. Risulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

(per la (3.47))

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n-1)^{n-1}}{n^n(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$$

da cui la (3.51) per la (3.35). □

Sia $\alpha > 0$ e $a > 1$; consideriamo le quattro successioni i cui termini generali sono

$$n^{\alpha}\,, \quad a^{n}\,, \quad n!\,, \quad n^{n}\,. \tag{3.52}$$

Per la (3.45) si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{\alpha}}{a^{n}}} = a^{-1} < 1\,;$$

quindi per la prop. 3.10.5 abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}}{a^{n}} = 0\,.$$

Si ha inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n}}{n!} = 0$$

in quanto

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^{n}}{n!}} = 0\,.$$

Infine, dalla (3.51) e dalla prop. 3.10.5 si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^{n}} = 0\,.$$

In definitiva le quattro successioni (3.52), prese nell'ordine, divergono ciascuna più rapidamente di tutte quelle che la precedono.

Capitolo 4

Funzioni continue

4.1 Il teorema di Weierstrass

Premettiamo alcune nozioni e risultati di natura topologica.

Definizione 4.1.1. - *Un insieme C si dice "chiuso" se contiene tutti i suoi punti di accumulazione. Un insieme A dicesi "aperto" se per ogni $x \in A$ esiste un intorno di x contenuto in A.*

Proposizione 4.1.1. - *Un insieme è chiuso (aperto) se e solo se il suo complementare è aperto (chiuso).*

Proposizione 4.1.2. - *L'unione di una famiglia infinita di aperti è un aperto. L'intersezione di una famiglia infinita di chiusi è un chiuso.*

Teorema 4.1.1. - *Un insieme X è chiuso se e solo se ogni successione convergente di punti di X ha per limite un punto di X.*

Dimostrazione. Sia X chiuso. Se $\{x_n\}$ è una successione di punti di X il cui limite è x_0 allora, se x_0 non appartiene al sostegno della successione, ne è un punto di accumulazione. Quindi è anche punto di accumulazione per X; poiché X è chiuso allora $x_0 \in X$. Supponiamo ora che ogni successione convergente di punti di X ha per limite un punto di X. Basta far riferimento al teo. 3.4.1 per concludere che ogni punto di accumulazione di X appartiene a X. □

Definizione 4.1.2. - *Un sottoinsieme K di $\mathbb{R}$ dicesi "compatto" se ogni successione di suoi punti ha una sottosuccessione convergente ad un punto dell'insieme.*

Molto utile è la seguente caratterizzazione dei compatti di $\mathbb{R}$.

Teorema 4.1.2. - *Un sottoinsieme K di $\mathbb{R}$ è compatto se e solo se esso è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Sia K compatto. Come conseguenza del teo. 4.1.1 esso è intanto chiuso. Dimostriamo che è limitato. Se cosí non fosse, per ogni n esisterebbe un elemento x_n di K tale che $|x_n| > n$. Sia $\{x_{n_h}\}$ una sottosuccessione di $\{x_n\}$ convergente ad un punto x di K. Per la proprietà triangolare si ha

$$|x_{n_h} - x| \geq |x_{n_h}| - |x| \geq n_h - |x| \,.$$

Quindi la successione $\{|x_{n_h} - x|\}$ diverge positivamente. Ciò è assurdo dal momento che la successione$\{x_{n_h}\}$ tende a x.
Sia K chiuso e limitato. Se $\{x_n\}$ è una successione di punti di K essa, in quanto limitata, per il teo. 3.8.1 ha una sottosuccessione $\{x_{n_h}\}$ convergente ad un numero x. Tale punto è in K essendo K chiuso. Quindi K è compatto. □

Teorema 4.1.3. (Teorema di Weierstrass) - *Sia f continua in K compatto. Allora f ha minimo e massimo.*

Dimostrazione. Sia

$$m = \inf_K f \,.$$

Se $m \in \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un elemento x_n tale che

$$m \leq f(x_n) < m + \frac{1}{n} \,. \tag{4.1}$$

Se $m = -\infty$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un elemento x_n tale che

$$f(x_n) < -n \,. \tag{4.2}$$

Le (4.1) e (4.2) assicurano che esiste una successione $\{x_n\}$ di punti di K tale che

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = m \,. \tag{4.3}$$

Per l'ipotesi di compattezza di K, dalla successione $\{x_n\}$ è possibile estrarre una successione $\{x_{n_h}\}$ convergente ad un punto $\underline{x} \in K$. Poiché f è continua, per la prop. 3.4.2 si ha

$$\lim_{h\to+\infty} f(x_{n_h}) = f(\underline{x}) \,.$$

Ricordando la (4.3) abbiamo allora $m = f(\underline{x})$; quindi m è il minimo di f e $\underline{x}$ un punto di minimo.
In modo analogo si ragiona per provare che f è dotata di massimo. □

Va rimarcato che l'ipotesi di compattezza è essenziale. Si possono esibire esempi di funzioni continue, definite in insiemi non chiusi e/o non limitati, prive di minimo e/o massimo.
Per concludere ricordiamo che il teorema ha carattere puramente esistenziale; non fornisce cioè un procedimento costruttivo che consenta di calcolare, in modo esatto o anche approssimato, il minimo e il massimo di una funzione. Vedremo più avanti che sarà possibile, in certi casi, attivare procedure per l'individuazione dei punti di minimo e massimo di una funzione; tali metodi funzionano in presenza di ulteriori ipotesi di regolarità sulla funzione.

4.2 Il teorema di Cantor

Sia f continua in un insieme X. La continuità in $x_0 \in X$ comporta che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{\varepsilon,x_0} \, : \, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in X \cap]x_0 - \delta_{\varepsilon,x_0}, x_0 + \delta_{\varepsilon,x_0}[\,.$$

Con la notazione δ_{ε,x_0} si è voluto sottolineare che il valore di δ dipende, oltre che da ε, anche dal punto x_0.
Può accadere che δ possa essere scelto in modo da risultare indipendente da x_0. Una tale proprietà può essere riformulata nel modo seguente.

Definizione 4.2.1. - *La funzione f dicesi "uniformemente continua" in X se, comunque si fissi $\varepsilon < 0$, esiste un δ tale che*

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

per ogni $x', x'' \in X$ con $|x' - x''| < \delta$.

Ovviamente una funzione uniformemente continua è continua. Il seguente risultato fornisce un criterio per riconoscere quando una funzione continua è anche uniformemente continua.

Teorema 4.2.1. (Teorema di Cantor) - *Se f è continua in un compatto K allora essa è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Neghiamo quanto affermato nella def. 4.2.1.
Esiste allora un $\varepsilon > 0$ tale che, comunque si fissi $n \in \mathbb{N}$, è possibile determinare due elementi $x'_n, x''_n \in K$, soddisfacenti le condizioni

$$|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}\,, \tag{4.4}$$

e

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon\,. \tag{4.5}$$

Essendo K compatto, da $\{x'_n\}$ si può estrarre una successione $\{x'_{n_h}\}$ convergente ad un punto $x' \in K$. Da $\{x''_{n_h}\}$ estraiamo una successione convergente ad un punto $x'' \in K$; per semplicità di notazione indichiamo ancora con $\{x''_{n_h}\}$ tale sottosuccessione. Per la (4.4) si ha

$$|x'_{n_h} - x''_{n_h}| < \frac{1}{n_h}$$

da cui, passando al limite per h che tende ad infinito, abbiamo $x' = x''$.
Per la continuità di f si ha allora

$$\lim_{h \to +\infty} f(x'_{n_h}) = \lim_{h \to +\infty} f(x''_{n_h}) = f(x')\,. \tag{4.6}$$

D'altra parte per la (4.5) deve essere

$$|f(x'_{n_h}) - f(x''_{n_h})| \geq \varepsilon\,.$$

Siamo pervenuti ad un assurdo in quanto, per la (4.6), l'espressione a primo membro è infinitesima al divergere di h. $\square$

Osservazione 4.2.1. - *Come già osservato in relazione al teorema di Weierstrass l'ipotesi di compattezza di K non può essere indebolita.*
Si pensi ad una funzione continua in $[a, b[$ e divergente in b. Se essa fosse uniformemente continua si avrebbe:

$$\forall \varepsilon \quad \exists \delta : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad \forall x', x'' \in]b - \delta, b[\,.$$

Per il criterio di convergenza di Cauchy (3.43) *la funzione f risulterebbe allora convergente in b. L'assurdo cui siamo pervenuti prova che f non è uniformemente continua.*

4.3 Il teorema degli zeri

Nei precedenti due paragrafi ha giocato un ruolo centrale l'ipotesi di compattezza dell'insieme di definizione di f. In questo paragrafo invece la proprietà che serve è nota come connessione che, nel caso dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, equivale a dire che l'insieme di definizione deve essere un intervallo.

Teorema 4.3.1. (Teorema degli zeri) - *Sia f continua in $[a, b]$. Se*

$$f(a)\, f(b) < 0 \tag{4.7}$$

esiste almeno una soluzione (*uno "zero"*) *dell'equazione $f(x) = 0$.*

Dimostrazione. Per fissare le idee assumiamo $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Illustriamo un procedimento, noto come "metodo di bisezione" che fornisce anche un algoritmo numerico per il calcolo approssimato di una soluzione. Sia c il punto medio di $[a, b]$. Se $f(c) = 0$ la procedura si arresta. Supponiamo quindi che sia $f(c) \neq 0$. Tra i due intervalli $[a, c]$ e $[c, b]$ selezioniamo quello ai cui estremi f assume valori di segno opposto. Se per esempio $f(c) < 0$ l'intervallo scelto è $[c, b]$; se invece $f(c) > 0$ la scelta cade sull'intervallo $[a, c]$. Etichettiamo come $[a_1, b_1]$ l'intervallo selezionato: si ha ovviamente $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) > 0$. Sia c_1 il punto medio di $[a_1, b_1]$. Seguiamo lo stesso procedimento appena descritto. Se $f(c_1) = 0$ abbiamo trovato la soluzione; in caso contrario si seleziona un ulteriore intervallo $[a_2, b_2]$ con lo stesso criterio utilizzato per la scelta di $[a_1, b_1]$. Ovviamente il procedimento o si arresta dopo un numero finito di passi oppure genera una successione di intervalli $[a_n, b_n]$ con le seguenti caratteristiche:

(i) $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$;

(ii) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$;

(iii) $f(a_n) < 0\,, \quad f(b_n) > 0.$

Le condizioni (i) e (ii) assicurano che le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tendono allo stesso limite x_0. Dalla (iii), per il teo. 3.2.5, si ha

$$f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \leq 0\,, \qquad f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) \geq 0\,.$$

Deve quindi essere $f(x_0) = 0$. I termini a_n e b_n vanno intesi come valori approssimati, per difetto e per eccesso, della soluzione x_0. Sia $\varepsilon_n = x_0 - a_n$ l'errore che si commette se si approssima x_0 con a_n. Per la (ii) si ha

$$\varepsilon_n \leq \frac{b-a}{2^n}\,.$$

Da osservare che ad ogni passo l'errore al più si dimezza: il procedimento ha una velocità di convergenza relativamente bassa.
Diamo ora una ulteriore dimostrazione. Sia

$$X = \{x \in [a,b] \,:\, f(x) < 0\}$$

e sia $x_0 = \sup X$. Verifichiamo intanto che x_0 è interno all'intervallo. Essendo $f(a) < 0$ risulta anche $f(x) < 0$ per x appartenente ad un intervallo $[a, a+\delta]$; quindi $x_0 > a+\delta$. Poiché $f(b) > 0$ esiste un δ tale che $f(x) > 0$ per $x \in [b-\delta, b]$; quindi $x_0 < b - \delta$.
Consideriamo un qualsiasi intorno di x_0: a destra la funzione f assume valori non negativi, a sinistra, essendo x_0 l'estremo superiore di X, c'è almeno un punto in cui f assume valore negativo. Poiché f converge in x_0 a $f(x_0)$, quanto detto si accorda solo con l'eventualità che sia $f(x_0) = 0$. $\square$

Come immediata conseguenza abbiamo il seguente risultato noto come "teorema di Bolzano".

Teorema 4.3.2. - *Una funzione f continua in un intervallo $[a,b]$ assume tutti i valori compresi tra il suo minimo e il suo massimo.*

Dimostrazione. Per il teo. 4.1.3 la funzione f ha minimo e massimo m e M. Siano $\underline{x}, \overline{x}$ due punti in cui f assume il valore minimo e massimo. Fissato $h \in]m, M[$ si applichi il teo. 4.3.1 alla restrizione all'intervallo di estremi $\underline{x}, \overline{x}$ della funzione $f(x) - h$. $\square$

Concludiamo con il seguente utile risultato.

Lemma 4.3.1. - *Sia f continua in $[a,b]$ ed iniettiva. Allora f è strettamente monotona e la sua inversa è continua.*

Dimostrazione. Per fissare le idee assumiamo che sia $f(a) < f(b)$ e dimostriamo che si ha

$$f(a) < f(x) < f(b) \tag{4.8}$$

se x è interno all'intervallo. Infatti, se per esempio fosse $f(x) < f(a)$ allora f assumerebbe nell'intervallo $[x, b]$ tutti i valori dell'intervallo $[f(x), f(b)]$ quindi anche il valore $f(a)$; ciò in contrasto con l'ipotesi di iniettività.
Siano x', x'' due punti di $[a,b]$ con $x' < x''$. Essendo $f(x') < f(b)$, la (4.8), con x' al posto di a, comporta che $f(x') < f(x'')$; quindi f è strettamente crescente.

Indicato con J l'intervallo codominio di f la funzione inversa

$$y \in J \longrightarrow f^{-1}(y) \in I \tag{4.9}$$

è continua per il teo. 3.3.3. □

Capitolo 5

Calcolo differenziale

5.1 Definizioni

In questo primo paragrafo riportiamo la definizione di derivata di una funzione numerica

$$x \in X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}\,.$$

Definizione 5.1.1. - *Se x_0 è interno a X e*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$

si dice che f è derivabile in x_0 e che $f'(x_0)$ è la "derivata" di f in x_0.
Se f è derivabile in ogni punto di X essa dicesi derivabile in X.

Il "rapporto incrementale"

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

è il coefficiente angolare della retta "secante" il grafico di f passante per i punti di coordinate $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$. La posizione limite di tali rette al tendere di x a x_0 è la retta di equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\,.$$

Essa è per definizione la "tangente" al grafico in $(x_0, f(x_0))$.

Osservazione 5.1.1. - *Il limite sinistro del rapporto incrementale prende il nome, se finito, di "derivata sinistra" di f in x_0 e si denota talvolta con $f'(x_0^-)$. Analogamente il limite destro, se finito, è la "derivata destra" di f in x_0 e si denota con il simbolo $f'(x_0^+)$. Ovviamente una funzione è derivabile se e solo se la derivata destra coincide con la derivata sinistra.*

Il grafico di una funzione è un primo esempio di curva piana. Con tale termine si intende un'applicazione iniettiva

$$t \in [a, b] \longrightarrow (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \tag{5.2}$$

con x, y funzioni derivabili in $[a, b]$. Si assume inoltre che

$$(x'(t), y'(t)) \neq (0,0) \qquad \forall t \in [a,b]\,. \tag{5.3}$$

Se $t \neq t_0$ la retta passante per i punti $(x(t_0), y(t_0))$ e $(x(t), y(t))$ ha numeri direttori

$$\left(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \right)\,. \tag{5.4}$$

Il vettore (5.4), al tendere di t a t_0, converge al vettore $(x'(t_0), y'(t_0))$ non nullo per la (5.3); esso è un vettore tangente alla curva in $(x(t_0), y(t_0))$. La retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(t_0) + \tau\, x'(t_0) \\ \\ y = y(t_0) + \tau\, y'(t_0) \end{cases}$$

é quindi la tangente alla curva nel punto $(x(t_0), y(t_0))$. Se si interpreta la curva come la traiettoria di un punto materiale e la funzione (5.2) come la relativa legge oraria, allora $(x'(t), y'(t))$ è il vettore velocitá. La condizione (5.3) assicura che in nessun istante il punto materiale si arresta.
Una immediata conseguenza della definizione di derivata è il seguente risultato.

Proposizione 5.1.1. - *Sia f derivabile in x_0; allora f è continua in x_0.*

Dimostrazione. Basta osservare che

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

da cui

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ovvero la continuità richiesta. □

Il rapporto incrementale di f in x_0 viene talvolta scritto nella forma

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}\,.$$

La (5.1) diventa

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

da cui

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - f'(x_0)\,\Delta x}{\Delta x} = 0\,.$$

La funzione

$$\Delta x \to \Delta f - f'(x_0)\,\Delta x\,,$$

per Δx che tende a zero, è quindi, con una terminologia che introdurremo più avanti, un infinitesimo di ordine superiore al primo, ovvero in simboli

$$\Delta f - f'(x_0)\,\Delta x = o(\Delta x)\,; \tag{5.5}$$

in tal caso $o(t)$, che si legge "o piccolo di t", è una funzione tale che

$$\lim_{t\to 0}\frac{o(t)}{t} = 0\,. \tag{5.6}$$

La funzione lineare in Δx

$$\Delta x \longrightarrow df = f'(x_0)\,\Delta x$$

prende il nome di "differenziale" di f in x_0. La (5.5) si scrive nel modo seguente

$$\Delta f = df + o(\Delta x)\,. \tag{5.7}$$

Possiamo quindi introdurre un ulteriore simbolo per denotare la derivata di una funzione. Infatti, osservato dx è il differenziale della funzione identica, si ha

$$df = f'(x_0)\,dx$$

da cui

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}\,. \tag{5.8}$$

5.2 Regole di derivazione

Le prime regole di derivazione riguardano le derivate della somma, del prodotto e del quoziente di due funzioni derivabili. Per le dimostrazioni rimandiamo ad un qualsiasi testo di Analisi Matematica 1.

Proposizione 5.2.1. - *Siano f, g derivabili in x_0.*

- *Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora $\alpha f + \beta g$ è derivabile in x_0 e si ha*

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)\,. \tag{5.9}$$

- *Il prodotto $f\,g$ è derivabile in x_0 e si ha*

$$(f\,g)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)\,. \tag{5.10}$$

- *Se $g(x_0) \neq 0$ allora il quoziente f/g è derivabile in x_0 e si ha*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}\,. \tag{5.11}$$

Abbiamo descritto in che modo l'operatore di derivazione interagisce con le operazioni algebriche. Vediamo ora come esso si comporta in relazione a due operazioni di tipo funzionale, l'inversa di una funzione e la composta di due funzioni.

Proposizione 5.2.2. - *Sia f continua in un intervallo e iniettiva. Se essa è derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$ allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e si ha*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \,. \tag{5.12}$$

Dimostrazione. Posto

$$\phi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si ha

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\phi(f^{-1}(y))} \,.$$

Per il lemma 4.3.1 f^{-1} è continua; risulta quindi

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0 \,.$$

La (5.12) discende allora dalla prop. 3.4.1. □

Occupiamoci ora della regola di derivazione delle funzioni composte.

Proposizione 5.2.3. - *Se f è derivabile in x_0 e g in $y_0 = f(x_0)$ allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e si ha*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) \,. \tag{5.13}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$\gamma(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & \text{se } y \neq y_0 \\[2ex] g'(y_0) & \text{se } y = y_0 \,. \end{cases}$$

Essa è ovviamente continua in y_0. Si ha

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \gamma(f(x)) \, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \,. \tag{5.14}$$

Per la prop. 3.4.1 si ha

$$\lim_{x \to x_0} \gamma(f(x)) = \lim_{y \to y_0} \gamma(y) = \gamma(y_0) = g'(f(x_0)) \,.$$

Passando al limite per x che tende ad x_0 nella (5.14) si ottiene la (5.13). □

Osservazione 5.2.1. - *Il simbolo g' in* (5.13) *sta ad indicare la derivata di g rispetto alla variabile y. Per non incorrere in errore si può utilizzare il simbolo* (5.8) *per denotare l'operatore di derivazione e riscrivere la* (5.13) *nel modo seguente*

$$\frac{d(g \circ f)}{dx}(x_0) = \frac{dg}{dy}(f(x_0))\,\frac{df}{dx}(x_0)\,.$$

Come applicazione delle regole esposte si può ricavare la seguente formula

$$\mathrm{D} f^g = f^g \left(g' \log f + \frac{g\,f'}{f} \right)\,.$$

5.3 Derivate delle funzioni elementari

Riportiamo l'elenco delle derivate delle funzioni elementari; è sottinteso che, per ciascuna funzione, l'insieme di derivabilità coincide con l'insieme di definizione della funzione derivata.
Per denotare l'operatore di derivazione utilizziamo il simbolo "D".

(1) $\mathrm{D}x^\alpha = \alpha\, x^{\alpha-1}\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,;$

(2) $\mathrm{D}a^x = a^x \,\log a\,, \quad a > 0 \text{ e } a \neq 1\,;$

(3) $\mathrm{D}\log_a |x| = \dfrac{\log a}{x}\,, \quad a > 0 \text{ e } a \neq 1\,;$

(4) $\mathrm{D}\sin x = \cos x\,, \quad \mathrm{D}\cos x = -\sin x\,;$

(5) $\mathrm{D}\tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x\,;$

(6) $\mathrm{D}\arcsin x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad \mathrm{D}\arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,;$

(7) $\mathrm{D}\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}\,.$

Le formule (1), (2), (3) e (4) discendono, rispettivamente, da (3.41), (3.39), (3.37) e dalle (3.28), (3.29). La (5) consegue dalle formule (4) e dalla (5.11). Le (6) e (7) sono conseguenza della (5.12).

Accenniamo brevemente ad un'altra classe di funzioni elementari note come funzioni iperboliche:

- "seno iperbolico"
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,;$$
- "coseno iperbolico"
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,;$$

- “tangente iperbolica”

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\,.$$

Per un elenco delle proprietà di tali funzioni si rimanda a [4], [10].

La funzione seno iperbolico ha inversa definita in tutto $\mathbb{R}$. Essa è nota come “settore seno iperbolico” e si rappresenta nel modo seguente

$$\mathrm{settsinh\,x} = \log(x + \sqrt{x^2+1})\,.$$

La funzione coseno iperbolico è invertibile se ristretta a $[0,+\infty[$. Si ottiene in tal modo una funzione definita in $[1,+\infty[$. Essa è nota come “settore coseno iperbolico” e ha la seguente espressione

$$\mathrm{settcosh\,x} = \log(x + \sqrt{x^2-1})\,.$$

L’inversa della funzione tangente iperbolica, nota come “settore tangente iperbolica”, è definita in $]-1,1[$ e assume la seguente espressione

$$\mathrm{setttanh\,x} = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}\,.$$

Per la (5.13) si ha

(8) $\mathrm{D}\sinh x = \cosh x\,,$

$\mathrm{D}\cosh x = \sinh x\,,$

$\mathrm{D}\tanh x = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x\,;$

(9) $\mathrm{Dsettsinh\,x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,,$

$\mathrm{Dsettcosh\,x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,,$

$\mathrm{Dsetttanh\,x} = \dfrac{1}{1-x^2}\,.$

5.4 Estremi locali

Ritorniamo sulla questione posta nel par. 4.1 relativa a possibili strategie per la determinazione del massimo e del minimo di una funzione.
Introduciamo la seguente nozione.

Definizione 5.4.1. - *Si dice che $x_0 \in X$ è "punto massimo (minimo) relativo" per f se esiste un δ tale che*

$$f(x) \leq (\geq) f(x_0)\,, \quad \forall x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\,. \tag{5.15}$$

Un punto che sia o di minimo o di massimo relativo prende il nome di "punto di estremo locale".

Definizione 5.4.2. - *Un punto in cui si annulla la derivata di f prende il nome di "punto stazionario" o "punto critico" di f.*

Una condizione necessaria perché un punto sia di estremo locale è descritta nel seguente risultato, noto come "teorema di Fermat".

Teorema 5.4.1. - *Sia f una funzione definita in un intervallo I e derivabile in x_0, punto di estremo locale per f. Allora*

(i) *se x_0 è interno ad I allora x_0 è un punto critico per f;*

(ii) *se x_0 è l'estremo sinistro di I si ha $f'(x_0) \geq 0$ ovvero $f'(x_0) \leq 0$ a seconda che x_0 sia punto di minimo o di massimo relativo;*

(iii) *se x_0 è l'estremo destro di I si ha $f'(x_0) \leq 0$ ovvero $f'(x_0) \geq 0$ a seconda che x_0 sia punto di minimo o di massimo relativo.*

Dimostrazione. Supponiamo che x_0 sia interno ad I e che esso sia punto di minimo relativo. Per la (5.15) si ha

$$\begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 & \text{se } x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0[\\[2ex] \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 & \text{se } x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta[\,. \end{cases}$$

Quindi la derivata sinistra di f in x_0 è non positiva e la derivata destra è non negativa. Essendo f derivabile in x_0 le due derivate devono coincidere: si ha allora $f'(x_0) = 0$. Nel caso in cui x_0 sia uno degli estremi dell'intervallo bisogna ovviamente limitarsi a prendere in considerazione solo la derivata destra di f nell'estremo sinistro di I, ovvero solo la derivata sinistra di f nell'estremo destro di I. Si ottiene quindi la (ii) ovvero la (iii). □

Sebbene il teorema di Fermat fornisca solo una condizione necessaria perché un punto sia di massimo o minimo, talvolta la sola determinazione dei punti critici di una funzione consente di ottenerne i valori estremi. Nel caso per esempio di una funzione continua e derivabile in un intervallo compatto i punti di minimo e massimo assoluti vanno ricercati tra i punti critici e gli estremi dell'intervallo. Riportiamo qui di seguito alcuni esempi.

a) Legge di Snell: "Determinare la traiettoria di un raggio luminoso che attraversa due mezzi omogenei ed isotropi separati da un piano."

Indichiamo con v_1 e v_2 le velocità della luce nei due mezzi; sia $v_1 > v_2$. Per il principio di Fermat un raggio luminoso segue la traiettoria cui corrisponde il tempo minimo di percorrenza. Nei singoli mezzi le traiettorie sono ovviamente rettilinee. Il raggio luminoso segue un percorso che si colloca in un piano perpendicolare al piano di separazione dei due mezzi. Con un opportuno sistema di riferimento assumiamo che la traiettoria sia una spezzata formata da due segmenti, il primo si estremi $(0,1)$, $(x,0)$ con $x \in [0,1]$, il secondo di estremi $(1,-1)$ e $(x,0)$. Il tempo di percorrenza è

$$T(x) = \frac{1}{v_1}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{v_2}\sqrt{x^2-2\,x+2}\,.$$

Per individuare la traiettoria dobbiamo determinare il minimo della funzione T al variare di x in $[0,1]$. Abbiamo

$$T'(x) = \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{v_2}\frac{1-x}{\sqrt{x^2-2\,x+2}}\,. \tag{5.16}$$

Con semplici considerazioni geometriche si prova che le funzioni

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,, \qquad \frac{1-x}{\sqrt{x^2-2\,x+2}}$$

sono strettamente monotone, la prima crescente, la seconda decrescente. Infatti la prima rappresenta il seno dell'angolo formato dal segmento di estremi $(0,1)\,,(x,0)$ e dalla semiretta normale al piano di separazione dei due mezzi orientata verso l'alto, la seconda il seno dell'angolo formato dal segmento di estremi $(1,-1)$, $(x,0)$ e dalla semiretta normale al piano di separazione orientata verso il basso. Quindi T' è strettamente crescente. Poiché

$$T'(0) = -\frac{1}{v_2\sqrt{2}}\,, \quad T'(1) = \frac{1}{v_1\sqrt{2}}$$

per il teo. 4.3.1 esiste un unico punto $\bar{x}$ tale che $T'(\bar{x}) = 0$. In $\bar{x}$ la funzione T ha il suo valore minimo dal momento che in 0 e 1 la derivata di T è rispettivamente negativa e positiva. Dalla (5.16) si ha

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2} \tag{5.17}$$

dove θ_1 e θ_2 sono rispettivamente gli angoli che il raggio forma con la normale al piano di separazione; essi si chiamano, rispettivamente, angolo di incidenza e angolo di rifrazione.

b) Un problema isoperimetrico: "Tra tutti i cilindri circolari retti di assegnata superficie totale S determinare quello di volume massimo."
Sia r il raggio del cerchio di base e h l'altezza del cilindro. Si ha $S = 2\pi\, r(r+h)$ da cui

$$h = \frac{S-2\pi\, r^2}{2\pi\, r}\,.$$

Pertanto il volume del cilindro è

$$V(r) = r\left(\frac{S}{2} - \pi\, r^2\right), \qquad r \in \left[0, \sqrt{S(2\pi^{-1}}\right].$$

La derivata di V si annulla solo in $\sqrt{S(6\pi)^{-1}}$. In tale punto la funzione V raggiunge il valore massimo.

La procedura sopra illustrata può essere adattata al caso di funzioni continue e derivabili in intervalli non compatti. Se si assume che la funzione è regolare agli estremi dell'intervallo allora l'estremo superiore e quello inferiore della funzione vanno cercati tra i valori che la funzione assume nei punti critici e i limiti agli estremi dell'intervallo. Ovviamente il più grande e/o il più piccolo tra tali valori è il minimo o il massimo solo se esso è assunto in uno dei punti critici. Nel caso in cui tale valore massimo o minimo è costituito da uno dei limiti agli estremi dell'intervallo allora tale valore costituirà solo l'estremo superiore o inferiore della funzione.

5.5 Il teorema di Lagrange

Punto di partenza è il seguente risultato.

Teorema 5.5.1. (Teorema di Rolle) - *Sia f derivabile in $]a, b[$ oltre che continua agli estremi dell'intervallo. Se*

$$f(a) = f(b) \tag{5.18}$$

esiste almeno un punto $c \in]a, b[$ tale che $f'(c) = 0$.

Dimostrazione. Per il teo. 4.1.3 la funzione f ha minimo e massimo. Se i punti di minimo e massimo si collocano agli estremi dell'intervallo la funzione è costante per la (5.18): la sua derivata è allora identicamente nulla. In caso contrario o il punto di minimo o il punto di massimo deve essere interno all'intervallo. In tale punto la derivata si annulla per il teo. 5.4.1. □

Dal teorema di Rolle discende il seguente risultato di fondamentale importanza.

Teorema 5.5.2. (Teorema di Lagrange) - *Sia f derivabile in $]a, b[$ oltre che continua agli estremi dell'intervallo. Esiste almeno un punto $c \in]a, b[$ tale che*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{5.19}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a).$$

Si ha $g(b) = g(a)$; è possibile allora applicare a g il teo. 5.5.1. Sia c il punto in cui si annulla la derivata di g. In tale punto la derivata di f assume il valore a secondo membro nella (5.19). □

Dal teorema di Lagrange si ottiene la seguente caratterizzazione delle funzioni monotone.

Proposizione 5.5.1. - *Sia f derivabile in un intervallo I. Allora*

$$f \text{ è crescente} \Longleftrightarrow f'(x) \geq 0 \qquad \forall x \in I \tag{5.20}$$

e

$$f \text{ è decrescente} \Longleftrightarrow f'(x) \leq 0 \qquad \forall x \in I\,. \tag{5.21}$$

Dimostrazione. Sia f crescente. Se $x_0 \in I$ e $x \neq x_0$ si ha

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

e quindi, facendo tendere x a x_0, abbiamo $f'(x_0) \geq 0$.
Sia f' non negativa in I. Se $x_1 < x_2$ per la (5.19) si ha

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

con $c \in]x_1, x_2[$. Poiché $f'(c) \geq 0$ abbiamo $f(x_1) \leq f(x_2)$ cioè la (5.20).
In modo analogo si ottiene la (5.21). □

È bene dare risalto alla seguente banale conseguenza della prop. 5.5.1.

Corollario 5.5.1. - *Una funzione derivabile in un intervallo è costante se e solo se la sua derivata è identicamente nulla.*

Osservazione 5.5.1. - *Se si vuole una condizione che assicuri la stretta monotonia basta imporre che f' sia o positiva o negativa. Condizione necessaria e sufficiente è che f' sia o non positiva o non negativa e che non si annulli in nessun sottointervallo di I.*

La prop. 5.5.1 fornisce anche una condizione per riconoscere se un punto critico x_0 è di massimo o di minimo relativo. Se infatti f' cambia segno quando si passa da destra a sinistra di x_0 allora x_0 è punto di estremo locale.

Esempio 5.5.1. - *Consideriamo la funzione*

$$x \in]0, +\infty[\longrightarrow x^x\,. \tag{5.22}$$

Si ha

$$\mathrm{D}\, x^x = \mathrm{D}\, e^{x \log x} = x^x(\log x + 1)\,.$$

La funzione (5.22) *è strettamente decrescente in* $]0, e^{-1}]$, *strettamente crescente in* $[e^{-1}, +\infty[$: *il punto* e^{-1} *è di minimo assoluto. La propriet̀di monotonia comporta anche che la funzione è regolare in zero per il teo.* 3.3.1. *Utilizzando la* (3.45) *si ha*

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{n \to +\infty} n^{-\frac{1}{n}} = 1\,.$$

5.6 Proprietà della funzione derivata

In tale paragrafo riportiamo alcune notevoli propritìà della derivata di una funzione. Come conseguenza del teo. 5.4.1 si ottiene il seguente risultato che costituisce una sorta di teorema degli zeri per la funzione derivata: si noti che sulla derivata non si fa l'ipotesi di continuità.

Teorema 5.6.1. (Teorema di Darboux) - *Sia f derivabile in $[a,b]$ e sia*

$$f'(a)\, f'(b) < 0\,.$$

Esiste allora un punto $c \in]a,b[$ tale che $f'(c) = 0$.

Dimostrazione. La funzione f é continua in $[a,b]$ per la prop. 5.1.1; essa ha quindi minimo e massimo per il teo. 4.1.3. Per semplicitá supponiamo che sia $f'(a) < 0$ e $f'(b) > 0$. Per il teo. 5.4.1, gli estremi a, b non possono essere punti di minimo per f. Pertanto il punto di minimo è interno; in tale punto f' si annulla per la (i) del teo. 5.4.1. □

Corollario 5.6.1. - *Se f è derivabile in un intervallo il codominio di f' è un intervallo.*

Dimostrazione. Siano $\alpha < \beta$ due punti del codominio di f'; poniamo

$$\alpha = f'(x_\alpha) \qquad \beta = f'(x_\beta)\,.$$

Se $\gamma \in]\alpha, \beta[$ si applichi il teo. 5.6.1 alla funzione

$$x \longrightarrow g(x) = f(x) - \gamma x$$

ristretta all'intervallo I di estremi x_α e x_β. Esiste quindi un punto $c \in I$ tale che $f'(c) = \gamma$. Ciò comporta che il codominio di f' è un intervallo. □

Riportiamo qui di seguito alcune conseguenze del teorema di Lagrange.

Proposizione 5.6.1. - *Sia f derivabile nell'intervallo $]a,b[$ e sia f' limitata; allora f è convergente agli estremi dell'intervallo.*

Dimostrazione. Sia M tale che

$$|f'(x)| \le M\,, \quad \forall x \in]a,b[\,.$$

Se $x_1, x_2 \in]a,b[$ per la (5.19) esiste un punto c compreso tra x_1 e x_2 tale che

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)\,.$$

Si ha quindi

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le M|x_1 - x_2|\,. \tag{5.23}$$

Fissato ϵ, se $x_1, x_2 \in]b - \delta, b[$ con $\delta = \epsilon/M$, dalla (5.23) si ha

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le M\delta = \epsilon\,.$$

Dal criterio di convergenza di Cauchy discende la convergenza di f in b.
Un discorso analogo va fatto in relazione al comportamento di f in a. □

Proposizione 5.6.2. - *Se f è derivabile nell'intervallo $]a,b[$ e se f' è convergente in b allora anche f converge in b. Se indichiamo ancora con f il prolungamento per continuità di f in b si ha*

$$f'(b) = \lim_{x\to b} f'(x)\,. \tag{5.24}$$

Dimostrazione. La convergenza della derivata in b implica la sua limitatezza in un intorno di b; allora f converge in b per la prop. 5.6.1. Se λ è il limite di f' in b, allora, fissato ε, esiste un δ tale che

$$|f'(x) - \lambda| < \varepsilon \tag{5.25}$$

per ogni x in $]b-\delta, b[$. Per la (5.19) si ha

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b} = f'(c)$$

con $c \in]x, b[$. Se $x \in]b-\delta, b[$, per la (5.25) si ha allora

$$\left|\frac{f(x)-f(b)}{x-b} - \lambda\right| < \varepsilon\,.$$

Quindi f è derivabile in b e si ha la (5.24). $\square$

La dimostrazione della prop. 5.6.2 può essere adattata al seguente caso: se f è continua in b e la derivata di f diverge in b allora diverge anche il limite del rapporto incrementale. In definitiva, alla luce della prop. 5.6.2, la funzione derivata non può presentare né discontinuità eliminabili né discontinuità di prima specie; inoltre essa non può neanche divergere. Le uniche discontinuità ammissibili contemplano il caso in cui f' è oscillante come per la funzione riportata nel seguente esempio.

Esempio 5.6.1. - *Sia*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \textit{se } x \neq 0 \\[2ex] 0 & \textit{se } x = 0\,. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che $f'(0) = 0$ e che non esiste il limite di f' per x che tende a zero.

5.7 Successioni definite per ricorrenza

Sia f un'applicazione continua di un intervallo I in sé

$$x \in I \longrightarrow f(x) \in I\,.$$

Ha senso definire allora la successione

$$u_0 \in I\,, \quad u_{n+1} = f(u_n)\,. \tag{5.26}$$

Supponiamo che essa converga a u. Per la continuità di f si ha

$$u = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(u)\,;$$

quindi u è soluzione dell'equazione

$$x = f(x)\,. \tag{5.27}$$

Osservazione 5.7.1. - *Se I è un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ la* (5.27) *ha almeno una soluzione. Posto infatti*

$$g(x) = x - f(x)\,,$$

poiché $f(a)$, $f(b) \in [a,b]$ si ha

$$g(a) = a - f(a) \leq 0\,, \qquad g(b) = b - f(b) \geq 0\,.$$

Basta allora applicare il teo. 4.3.1 *alla funzione g.*

Ma quando la successione $\{u_n\}$ è convergente? Per dare risposta a tale domanda si può utilizzare il seguente risultato.

Proposizione 5.7.1. - *Se f è derivabile e*

$$|f'(x)| \leq L < 1\,, \quad x \in [a,b] \tag{5.28}$$

la successione (5.26) *è convergente.*

Dimostrazione. Per il teo. 5.5.2 si ha

$$|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| = |f'(c_n)||u_n - u_{n-1}|$$

con c_n compreso tra u_n e u_{n-1}. Dalla (5.28) si ha

$$|u_{n+1} - u_n| \leq L|u_n - u_{n-1}|$$

e quindi induttivamente

$$|u_{n+1} - u_n| \leq L^n|u_1 - u_0|\,. \tag{5.29}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}
|u_{n+k} - u_n| &\leq |u_{n+k} - u_{n+k-1}| + \cdots + |u_{n+1} - u_n| \\
&\qquad \text{(per la (5.29))} \\
&\leq L^n(L^{k-1} + \cdots + 1)\,|u_1 - u_0| \\
&\qquad \text{(per la (1.21))} \\
&< \frac{L^n}{1-L}\,|u_1 - u_0|\,.
\end{aligned}$$

Poiché $L < 1$ la successione $\{u_n\}$ è di Cauchy ed è quindi convergente. $\square$

Diamo ora una valutazione dell'errore $\varepsilon_n = u_n - u$. Si ha

$$\varepsilon_{n+1} = u_{n+1} - u = f(u_n) - f(u) = f'(e_n)(u_n - u) = f'(e_n)\,\varepsilon_n$$

con e_n appartenente all'intervallo di estremi u e u_n; la successione $\{e_n\}$ tende quindi ad u.
Nell'ulteriore ipotesi che f' sia continua si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \lim_{n\to\infty} f'(e_n) = f'(u)\,.$$

Se $f'(u) \neq 0$ la convergenza è di tipo lineare; ad ogni passo dell'iterazione l'errore si riduce di un fattore dell'ordine di $f'(u)$. $\square$

Osservazione 5.7.2. - *Con lo stesso procedimento utilizzato per provare la prop.* 5.7.1 *si può concludere che* $\{u_n\}$ *diverge se*

$$|f'(x)| \geq L > 1$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

La successione definita per ricorrenza

$$F_0 = F_1 = 1\,, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

prende il nome di "successione di Fibonacci".
I termini della successione sono tutti positivi: i primi due sono infatti positivi e se i primi n termino sono positivi allora $F_{n+1} > 0$. Il risultato discende quindi dal principio di induzione.
Si verifica inoltre che $\{F_n\}$ è crescente e divergente positivamente.
Posto

$$R_{n+1} = \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

si ha

$$R_{n+1} = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{R_n} = f(R_n)$$

dove

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}\,.$$

Proviamo che $\{R_n\}$ converge a

$$R = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,,$$

soluzione positiva dell'equazione $x = f(x)$.
Si verifica facilmente che

(i) $x < (>) R \Longrightarrow f(x) > (<)\, R$;

(ii) $x < (>) R \Longrightarrow f(f(x)) > (<)\, x$.

Essendo $R_1 = 1$ tutti i termini della successione $\{R_{2k+1}\}$ sono minori di R per la (i); inoltre, per la (ii), la successione è crescente. In modo analogo, essendo $R_2 = 2$, si prova che la successione $\{R_{2k}\}$ è decrescente; inoltre i suoi termini sono maggiori di R. Tutte e due le sottosuccessioni di $\{R_n\}$ sono quindi convergenti; si vede facilmente che esse tendono a R. La successione $\{R_n\}$ converge pertanto a R.

5.8 Le regole di de l'Hôpital

Consideriamo la curva piana (5.2) con la condizione (5.3). Supponiamo che essa non sia chiusa; i suoi estremi

$$(x(a), y(a))\,, \quad (x(b), y(b)) \tag{5.30}$$

devono essere quindi distinti. È geometricamente evidente che in almeno un punto della curva la tangente è parallela alla corda che collega gli estremi della curva. Tale proprietà è analiticamente formulata nel seguente risultato.

Teorema 5.8.1. (Teorema di Cauchy) - *Siano x, y due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in $]a, b[$. Se sono soddisfatte le condizioni* (5.3) *e*

$$x(a) \neq x(b) \tag{5.31}$$

allora si ha

$$\frac{y(b) - y(a)}{x(b) - x(a)} = \frac{y'(c)}{x'(c)}\,. \tag{5.32}$$

per un opportuno punto $c \in]a, b[$.

Dimostrazione. Consideriamo il determinante

$$d(t) = \begin{vmatrix} x(t) - x(a) & y(t) - y(a) \\ \\ x(b) - x(a) & y(b) - y(a) \end{vmatrix}.$$

Essendo $d(a) = d(b) = 0$, per il teo. 5.5.1 esiste un punto $c \in]a, b[$ tale che

$$x'(c)[y(b) - y(a)] = y'(c)[x(b) - x(a)]\,. \tag{5.33}$$

Per la (5.31) deve essere $x'(c) \neq 0$ altrimenti si avrebbe $y'(c) = 0$ in contrasto la (5.3). Dalla (5.33), dividendo per $x'(c)\,[x(b) - x(a)]$, si ottiene la (5.32). La (5.33) assicura quindi che il vettore $(x'(c), y'(c))$ è parallelo alla corda che unisce gli estremi (5.30) della curva (5.2). Si può pertanto concludere che il teorema di Cauchy è la versione per le curve piane del teorema di Lagrange. □

Il teorema di Cauchy è lo strumento essenziale per dimostrare due formule utili per il calcolo di limiti che si presentino in forma indeterminata.

Teorema 5.8.2. (Prima regola di de l'Hôpital) - *Siano f, g due funzioni derivabili in un intervallo aperto X e sia x_0 uno degli estremi dell'intervallo. Se*

(i) $g'(x) \neq 0$,

(ii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$,

(iii) $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell\,. \tag{5.34}$$

Dimostrazione. Supponiamo che x_0 sia l'estremo destro dell'intervallo. Per la (i) e per il teo. 5.6.1 la derivata g' ha segno costante. Sia per esempio $g' < 0$. La funzione g è decrescente e quindi, per la (ii), positiva. Ha senso prendere in considerazione il rapporto f/g. Consideriamo il caso $\ell \in \mathbb{R}$. Per la (iii), per ogni ε esiste un intorno I di x_0 tale che

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell \right| < \varepsilon\,, \quad \forall x \in I \cap X \backslash \{x_0\}\,. \tag{5.35}$$

Se $x, \xi \in I \backslash \{x_0\}$, per la (5.32) si ha

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{g(x) - g(\xi)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{5.36}$$

dove c appartiene all'intervallo di estremi x e ξ e, quindi, a $I \cap X \backslash \{x_0\}$. Per la (5.35) si ha allora

$$\left| \frac{f(x) - f(\xi)}{g(x) - g(\xi)} - \ell \right| < \varepsilon\,. \tag{5.37}$$

Facendo tendere ξ a x_0 e ricordando le condizioni (ii) abbiamo in definitiva

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| \leq \varepsilon\,, \quad \forall x \in I \cap X \backslash \{x_0\}$$

cioè la (5.34).
Sia $\ell = +\infty$. Per ogni K esiste un intorno I di x_0 tale che

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > K\,, \quad \forall x \in I \cap X \backslash \{x_0\}\,. \tag{5.38}$$

Per la (5.36), se $x, \xi \in I \backslash \{x_0\}$, si ha allora

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{g(x) - g(\xi)} > K\,. \tag{5.39}$$

Facendo tendere ξ a x_0 e ricordando le condizioni (ii) abbiamo

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq K$$

da cui l'asserto.
Con piccole modifiche, infine, si ottiene il risultato se $\ell = -\infty$. □

Teorema 5.8.3. (Seconda regola di de l'Hôpital) - *Siano f, g due funzioni derivabili in un intervallo aperto X e sia x_0 uno degli estremi dell'intervallo. Se*

(i) $g'(x) \neq 0$,

(ii) f, g *divergono in* x_0,

(iii) $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \,. \tag{5.40}$$

Dimostrazione. Sia x_0 l'estremo destro di X. La condizione (i) comporta che g' ha segno costante. Se per esempio $g' > 0$ allora la funzione g diverge positivamente. Pertanto essa non si annulla in un intorno di x_0: in tale intorno ha senso considerare il rapporto f/g.
Supponiamo che la (5.40) non sussista. Il teo. 3.4.2 comporta che esiste una successione $\{x_n\}$ tendente a x_0 tale che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \ell' \neq \ell \,. \tag{5.41}$$

Per la (iii), se $\ell \in \mathbb{R}$, in corrispondenza di ε è possibile determinare un intorno I di x_0 tale che, per ogni $x\,, \xi \in I \cap X \backslash \{x_0\}$, sussista la (5.37) ovvero

$$\left| \frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(\xi)}{g(x)}}{1 - \dfrac{g(\xi)}{g(x)}} - \ell \right| < \varepsilon \,. \tag{5.42}$$

Poiché $\{x_n\}$ tende a x_0, se n è abbastanza grande si ha $\xi < x_n$. Quindi, essendo g crescente, abbiamo

$$\frac{g(\xi)}{g(x_n)} < 1 \,.$$

Se poniamo $x = x_n$ nella (5.42) si ha

$$\left| \frac{f(x_n)}{g(x_n)} - \frac{f(\xi)}{g(x_n)} - \ell \left(1 - \frac{g(\xi)}{g(x_n)} \right) \right| < \varepsilon \left(1 - \frac{g(\xi)}{g(x_n)} \right) < \varepsilon \,.$$

Passando al limite per n che tende ad infinito e ricordando la (ii) abbiamo

$$|\ell' - \ell| \leq \varepsilon$$

da cui, per l'arbitrarietà di ε, si ha $\ell = \ell'$. L'assurdo cui siamo pervenuti prova l'asserto.
Sia $\ell = +\infty$. Procediamo per assurdo come nel caso precedente. Sia $\{x_n\}$ una successione tale che sussista la (5.41). Fissiamo $K > \ell'$. È possibile determinare un intorno I di x_0 tale che, per ogni $x\,,\xi \in I \cap X \setminus \{x_0\}$, sussista la (5.39) e quindi, per quanto già osservato nel caso precedente,

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} - \frac{f(\xi)}{g(x_n)} > K\left(1 - \frac{g(\xi)}{g(x_n)}\right) .$$

Passando al limite su n si ha $\ell' \geq K$ cioè un assurdo.
In modo analogo si procede se $\ell = -\infty$. □

Osservazione 5.8.1. - *Poniamo*

$$f(x) = x^2 \sin(1/x)\,, \qquad g(x) = x\,.$$

Si vede facilmente che esiste il limite per x che tende a zero, del rapporto delle due funzioni mentre il rapporto delle derivate non è regolare. Un discorso analogo si può fare in relazione alle due funzioni

$$f(x) = x + \sin x\,, \qquad g(x) = x$$

divergenti al tendere di x a $+\infty$.

Esempio 5.8.1. - *La seconda regola di de l'Hôpital consente di dimostrare che*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$$

per ogni α positivo. Si ha inoltre

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \log x = 0$$

sempre per ogni α positivo.

L'uso delle due regole di de l'Hôpital può non essere risolutivo. Nel caso in cui il limite del rapporto delle derivate si presenti ancora in forma indeterminata si può ovviamente riapplicare una delle due regole confidando che non si presenti ancora in forma indeterminata il limite del rapporto delle derivate seconde

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} .$$

La procedura può essere iterata tante volte quante ne consente la regolarità delle funzioni in gioco. A tal fine è utile introdurre i simboli

$$\begin{cases} f^{(0)} = f \\ \\ f^{(n)} = \mathrm{D}\, f^{(n-1)} \quad \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

per denotare la derivate di ordine n di f.
In definitiva se il limite per x che tende a x_0 dei rapporti delle funzioni $f^{(k)}$, $g^{(k)}$ è in forma indeterminata per tutti gli interi k minori di n e

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \ell$$

allora vale la (5.34).

Esempio 5.8.2. - *La procedura sopra descritta permette di calcolare il seguente limite*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^n}\,.$$

derivando n volte le funzioni a numeratore e denominatore si ha

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty$$

da cui

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty\,.$$

La funzione esponenziale diverge più velocemente di una qualsiasi potenza ad esponente intero e, anche, reale.

5.9 Infinitesimi ed infiniti

In tale paragrafo richiamiamo alcuni risultati relativi agli infinitesimi e infiniti. Con il primo termine si indicano funzioni il cui limite, per x che tende a x_0, è zero, con il secondo funzioni che divergono al tendere di x a x_0.

Definizione 5.9.1. - *Siano f, g definite in un intorno I di x_0. Siano esse non nulle in $I\backslash\{x_0\}$ e infinitesime in x_0.*

- *Se*
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$
f è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g.

- *Se*
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$
f e g sono infinitesimi dello stesso ordine.

- *Se*
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$
f è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a g.

- *Se f/g non è regolare f e g non sono confrontabili.*

Per denotare che f è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g si usa talvolta il simbolo $f = o(g)$ già introdotto nel par. 5.1. Se invece f, g sono infinitesime dello stesso ordine si usa il simbolo $f = O(g)$.
Si può parlare anche di "ordine di un infinitesimo" una volta che si attribuisca un valore numerico ad opportuni "infinitesimi campione". Si parla infatti di infinitesimo di ordine $n \in \mathbb{N}$ in $x_0 \in \mathbb{R}$ in relazione alla funzione $(x - x_0)^n$. Se $x_0 = \pm\infty$ l'infinitesimo campione di ordine n è x^{-n}. Se $\alpha > 0$ non è intero si preferisce assumere la funzione $|x - x_0|^\alpha$ come infinitesimo campione di ordine α in x_0. Infine se $x_0 = \pm\infty$ la funzione $|x|^{-\alpha}$ è l'infinitesimo campione di ordine α all'infinito. La funzione f è infinitesima di ordine α in x_0 se il rapporto tra f e l'infinitesimo campione di ordine α ha limite finito e non nullo. Va rimarcato che non sempre si può attribuire un valore numerico all'ordine di infinitesimo di una funzione. Si pensi a

$$f(x) = x \log x \,. \tag{5.43}$$

Tale funzione è infinitesima in zero ed è $f = o(|x|^\alpha)$ per ogni $\alpha < 1$. D'altra parte il rapporto tra f e la funzione identica, infinitesimo del primo ordine in zero, diverge. Quindi f è un infinitesimo il cui ordine è più piccolo di tutti i numeri minori di uno; il suo ordine non è però uno.
Sussiste la seguente proprietà, nota come "principio di sostituzione degli infinitesimi".

Proposizione 5.9.1. - *Siano*

$$f_1, \cdots, f_n\,, \quad g_1, \cdots, g_m$$

funzioni infinitesime in x_0. Se f_1 è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a $f_2, \cdots, f_n$ e g_1 è un infinitesimo inferiore rispetto a $g_2, \cdots, g_m$ e il rapporto tra le due funzioni f_1 e g_1 è regolare allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x) + \cdots + f_n(x)}{g_1(x) + \cdots + g_m(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}\,. \tag{5.44}$$

Dimostrazione. Essendo

$$\frac{f_1(x) + \cdots + f_n(x)}{g_1(x) + \cdots + g_m(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \left(\frac{1 + \dfrac{f_2(x)}{f_1(x)} + \cdots + \dfrac{f_n(x)}{f_1(x)}}{1 + \dfrac{g_2(x)}{g_1(x)} + \cdots + \dfrac{g_m(x)}{g_1(x)}} \right)$$

si ottiene facilmente la (5.44). □

Definizione 5.9.2. - *Siano f, g due divergenti per x che tende a x_0.*

- *Se*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

  f è un infinito di ordine inferiore rispetto a g.

- *Se*
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$
f e g sono infiniti dello stesso ordine.

- *Se*
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$
f è un infinito di ordine superiore rispetto a g.

- *Se f/g non è regolare si dice che f e g non sono confrontabili.*

Si può parlare anche di "ordine di un infinito" una volta che si attribuisca un valore numerico ad opportuni "infiniti campione". Se $\alpha > 0$ la funzione $|x - x_0|^{-\alpha}$ è l'infinito campione di ordine α in x_0. La funzione f è un infinito di ordine α in x_0 se il rapporto tra f e l'infinito campione di ordine α ha limite finito e non nullo. Anche in questo caso non sempre si può attribuire un valore numerico all'ordine di infinito di una funzione. Si pensi ancora un volta alla funzione (5.43) divergente al tendere di x a infinito. Con lo stesso procedimento utilizzato per dimostrare la prop. 5.9.1 si ottiene il seguente "principio di sostituzione degli infiniti".

Proposizione 5.9.2. - *Siano*

$$f_1, \cdots, f_n\,, \quad g_1, \cdots, g_m$$

infiniti in x_0. Se f_1 è un infinito di ordine superiore rispetto a $f_2, \cdots, f_n$ e g_1 è un infinito di ordine superiore rispetto a $g_2, \cdots, g_m$ e il rapporto tra f_1 e g_1 è regolare allora
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x) + \cdots + f_n(x)}{g_1(x) + \cdots + g_m(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}\,.$$

5.10 Studio qualitativo dei grafici

Se dallo studio del segno della derivata prima di una funzione f si deducono le proprietà di monotonia, da quello della derivata seconda si ricava una proprietà geometrica nota come "convessità".

Definizione 5.10.1. - *Una funzione f dicesi "convessa" in un intervallo I se per ogni $x_1, x_2 \in I$ si ha*

$$f(tx_2 + (1-t)x_1) \le t\, f(x_2) + (1-t)\, f(x_1)\,, \quad t \in [0,1]\,. \tag{5.45}$$

Se $(-f)$ è convessa si dice che f è "concava"; la (5.45) *diventa*

$$f(tx_2 + (1-t)x_1) \ge t\, f(x_2) + (1-t)\, f(x_1)\,, \quad t \in [0,1]\,. \tag{5.46}$$

Se $x_1 < x_2$ e $t \in [0,1]$ il punto

$$x = tx_2 + (1-t)x_1 \tag{5.47}$$

descrive l'intervallo $[x_1, x_2]$. Per la (5.45) il punto $(x, f(x))$ del grafico di f è al di sotto della "corda" di estremi $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$.

Proposizione 5.10.1. - *La funzione f è convessa se e solo se vale una delle seguenti tre diseguaglianze*

$$\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}\,, \quad x_0 \in]x_1, x_2[\,. \tag{5.48}$$

Dimostrazione. Dalla (5.47) si ha

$$t = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\,, \quad 1-t = \frac{x_2-x}{x_2-x_1}\,;$$

pertanto la (5.45) assume la forma

$$f(x) \le \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2) + \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1)\,, \qquad x \in [x_1, x_2]\,. \tag{5.49}$$

È facile verificare che la (5.49) può essere trasformata in una qualsiasi delle tre diseguaglianze (5.48). □

La (5.48) mette in relazione i coefficienti angolari delle rette cui appartengono le corde del grafico di f che collegano due dei tre punti

$$(x_1, f(x_1))\,, \quad (x, f(x))\,, \quad (x_2, f(x_2))\,.$$

Tale interpretazione geometrica consente di ricavare in modo immediato la seguente fondamentale proprietà.

Proposizione 5.10.2. - *Se f è convessa in I e $x_0 \in I$ si ha*

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \le \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}\,. \tag{5.50}$$

La funzione

$$x \in I \setminus \{x_0\} \longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

è cioè crescente.

Proposizione 5.10.3. - *Sia f convessa in I e sia x_0 interno ad I. Allora f ha derivata destra e sinistra in x_0 ed è quindi continua in tale punto.*

Dimostrazione. Per la prop. 5.10.2 e per il teo. 3.3.1 abbiamo

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\sup_{x<x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$\leq \inf_{x>x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

da cui

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\leq f'(x_0^-)\leq f'(x_0^+)\leq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} \tag{5.51}$$

se $x_1<x_0<x_2$. Pertanto la derivata sinistra e quella destra di f in x_0 sono finite; quindi f è continua in x_0. □

Proposizione 5.10.4. - *Sia f convessa in $[a,b]$. Allora f converge agli estremi dell'intervallo e si ha*

$$f(a)\geq \lim_{x\to a^+}f(x)\,,\qquad f(b)\geq \lim_{x\to b^-}f(x)\,. \tag{5.52}$$

Dimostrazione. Se $x<x_1<x_2$ si ha (cfr. (5.48))

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leq\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$$

da cui

$$f'(x_1^-)=\sup_{x<x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leq \sup_{x<x_2}\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}=f'(x_2^-)\,. \tag{5.53}$$

La derivata sinistra di f è quindi crescente. Pertanto, fissato $c\in]a,b[$ la funzione

$$\varphi\,:\,x\longrightarrow f(x)-f'(c^-)(x-c)$$

ha derivata sinistra non negativa in $]c,b[$. Se $x_1,x_2\in]c,b[$, ragionando come nella dimostrazione del teorema di Lagrange, si può determinare un punto $d\in]x_1,x_2[$ tale che

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq f'(d^-)\,.$$

Ciò comporta che la funzione φ è crescente in $]c,b]$. Si deduce pertanto che f è regolare in b e che vale la seconda delle (5.53). In modo analogo si ragiona per quanto riguarda il comportamento di f nell'altro estremo. □

Se f è derivabile in x_0 dalla (5.51) discende

$$\sup_{x<x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=\inf_{x>x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{5.54}$$

da cui

$$f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\leq f(x)\,,\qquad \forall x\in I\,. \tag{5.55}$$

Il grafico di f si colloca quindi al di sopra di ogni retta ad esso tangente. Per le funzioni derivabili tale proprietà geometrica equivale alla convessità.

Proposizione 5.10.5. - *Sia f derivabile; allora f è convessa se e solo se sussiste la* (5.55) *per ogni $x_0 \in I$.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che la (5.55), ossia la (5.54), implica che f è convessa. Se $x_1 < x_0 < x_2$ dalla (5.54) si ha

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_0) \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}\,.$$

In forza della (5.48) si ottiene la convessità di f. □

Proposizione 5.10.6. - *Una funzione f derivabile è convessa se e solo se la sua derivata è crescente.*

Dimostrazione. Sia f convessa. Se f è derivabile la (5.53) comporta che f' è crescente.
Supponiamo f' crescente. Se $x_1 < x_0 < x_2$, per il teo. 5.5.2 si ha

$$f(x_0) - f(x_1) = f'(c_1)(x_0 - x_1)\,, \qquad f(x_2) - f(x_0) = f'(c_2)(x_2 - x_0) \tag{5.56}$$

con $c_1 \in [x_1, x_0]$ e $c_2 \in [x_0, x_2]$. Essendo $f'(c_1) \leq f'(c_2)$ dalle (5.56), si ha

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}\,.$$

Vale la (5.48); quindi f è convessa. □

Proposizione 5.10.7. - *Sia f è dotata di derivata seconda in I. Allora f è convessa* (*concava*) *se e solo se la derivata seconda è non negativa* (*non positiva*).

Dimostrazione. L'ipotesi di segno sulla derivata seconda si traduce in una condizione di monotonia su f'. Si applica allora la prop. 5.10.6. □

Per $t = 1/2$ la (5.45) diventa

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\,. \tag{5.57}$$

La (5.57) è suscettibile della seguente generalizzazione nota come "diseguaglianza di Jensen" (cfr. [7]).

Teorema 5.10.1. - *Sia f convessa nell'intervallo I. Se $x_1, \cdots, x_n \in I$ allora*

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}\,. \tag{5.58}$$

Dimostrazione. Dimostriamo dapprima la (5.58) nel caso in cui $n = 2^k$. Si procede per induzione. La diseguaglianza sussiste per $k = 1$ (cfr. (5.57)). Sussista la (5.58) per $n = 2^k$; verifichiamo che essa sussiste per $n = 2^{k+1}$. Si ha

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2^k} + x_{2^k+1} + \cdots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right) \\ = \quad & f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2^k}}{2^k} + \frac{x_{2^k+1} + \cdots + x_{2^{k+1}}}{2^k}\right)\right) \\ & \text{(per la (5.57))} \\ \leq \quad & \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2^k}}{2^k}\right) + f\left(\frac{x_{2^k+1} + \cdots + x_{2^{k+1}}}{2^k}\right)\right] \\ & \text{(per l'ipotesi di induzione)} \\ \leq \quad & \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_{2^k}) + f(x_{2^k+1}) + \cdots + f(x_{2^{k+1}})}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Se $n \neq 2^k$ esiste un intero m positivo tale che $n = 2^k - m$. Posto

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

osservato che $n + m = 2^k$, risulta

$$f(\bar{x}) = f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n + m\bar{x}}{n+m}\right) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n) + mf(\bar{x})}{n+m}$$

da cui si ottiene facilmente (5.58). □

Per le funzioni concave la diseguaglianza di Jensen diventa

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}. \tag{5.59}$$

Tenendo conto che la funzione $f = \log$ è concava dalla (5.59) si ha

$$\log\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \frac{\log x_1 + \cdots + \log x_n}{n}$$

da cui la diseguaglianza

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n}$$

che mette in relazione la media geometrica e quella aritmetica di n numeri positivi.

Come ultimo strumento per lo studio qualitativo dei grafici introduciamo la nozione di "asintoto".

Definizione 5.10.2. - *La retta di equazione*

$$y = mx + n \tag{5.60}$$

è asintoto a $+\infty(-\infty)$ *per* f *se la funzione*

$$x \longrightarrow f(x) - (mx + n)$$

è infinitesima per x *che tende a* $+\infty(-\infty)$*. Si parla di asintoto obliquo* $m \neq 0$*, di asintoto orizzontale se* $m = 0$*.*

Riportiamo il seguente risultato per la cui dimostrazione rimsandiamo, per esempio, a [4].

Proposizione 5.10.8. - *La retta* (5.60) *è asintoto a* $+\infty(-\infty)$ *per* f *se e solo se la funzione*

$$x \longrightarrow \frac{f(x)}{x}$$

converge a m *al tendere di* x *a* $+\infty(-\infty)$ *e la funzione*

$$x \longrightarrow f(x) - m\,x$$

converge a n *sempre al tendere di* x *a* $+\infty(-\infty)$*.*

5.11 Formule di Taylor con resto di Peano

Sia f derivabile in un intervallo I e sia x_0 un punto interno di I. Per la (5.5) in un intorno di x_0 si può approssimare il grafico di f con quello di una funzione ad andamento lineare. Proviamo ora ad approssimare il grafico di f usando polinomi di secondo grado. Ci chiediamo cioè se, fra tutte le parabole

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{a}{2}(x - x_0)^2\,,$$

ne esista una, detta "parabola osculatrice", che in qualche modo aderisca meglio delle altre al grafico di f. Si vuole in definitiva determinare il parametro a in modo che risulti

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{a}{2}(x - x_0)^2 = o\big((x - x_0)^2\big)$$

ovvero

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{a}{2}(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} = 0\,. \tag{5.61}$$

Se f è derivabile due volte in x_0, per la prima regola di de l'Hôpital la (5.61) sussiste se

$$a = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0)\,.$$

La parabola osculatrice è allora

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 .$$

Siamo pervenuti al seguente risultato

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) \tag{5.62}$$

che prende il nome di formula di Taylor di f di ordine 2, di punto iniziale x_0, con resto di Peano. La (5.62) consente di ottenere condizioni sufficienti ad assicurare che un punto critico sia punto di estremo locale.

Proposizione 5.11.1. - *Sia x_0 un punto critico di f e sia f derivabile due volte in x_0. Se $f''(x_0) \neq 0$ allora x_0 è un punto di estremo locale. In particolare x_0 è un punto di minimo relativo se $f''(x_0) > 0$, di massimo relativo se $f''(x_0) < 0$.*

Dimostrazione. Sia $f''(x_0) > 0$. Essendo $f'(x_0) = 0$ dalla (5.62) si ha

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2} + \frac{o((x - x_0)^2)}{(x - x_0)^2}$$

da cui

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2} > 0 .$$

Per il teo. 3.2.4 risulta

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} > 0$$

in un intorno di x_0. Si ha quindi l'asserto. Il caso $f''(x_0) < 0$ si tratta in modo analogo. $\square$

Estendiamo la formula (5.62).

Teorema 5.11.1. - *Sia f derivabile $(n - 1)$ volte in I e n volte in x_0; si ha allora*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right) . \tag{5.63}$$

Dimostrazione. La (5.63) prende il nome di formula di Taylor di ordine n, di punto iniziale x_0, con resto di Peano. Si procede per induzione. La formula vale per $n = 1$: essa non è altro che la (5.5). Supponiamo che la (5.63) sussista con $n - 1$ al posto di n e per una qualsiasi funzione. Sia

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

il polinomio di Taylor di f, di punto iniziale x_0 e ordine n. Dobbiamo verificare che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \tag{5.64}$$

Per la prima regola di de l'Hôpital la (5.64) sussiste se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}}{(x-x_0)^{n-1}} = 0\,.$$

La funzione a numeratore è la differenza tra f' e il polinomio di Taylor di f' di punto iniziale x_0 e ordine $n-1$. Essa, per l'ipotesi di induzione, è infinitesima di ordine maggiore di $n-1$. Vale pertanto la (5.64). □

Dal teo. 5.11.1, ragionando come nella dimostrazione della prop. 5.11.1, si ottiene il seguente risultato.

Proposizione 5.11.2. - *Sia f derivabile $2n-1$ volte in I e $2n$ volte in x_0, punto interno di I. Se $f^{(k)}(x_0) = 0$ con $k \le 2n-1$ e $f^{(2n)}(x_0) \ne 0$ allora x_0 è punto di minimo relativo se $f^{(2n)}(x_0) > 0$ ovvero di massimo relativo se $f^{(2n)}(x_0) < 0$. Se invece f è derivabile $2n$ volte in I e $2n+1$ volte in x_0 e $f^{(k)}(x_0) = 0$ con $k \le 2n$ e $f^{(2n+1)}(x_0) \ne 0$ allora x_0 non è punto di estremo locale.*

5.12 Formule di Taylor con resto di Lagrange

La formula (5.5) fornisce solo una informazione qualitativa sul resto. È possibile pervenire ad una valutazione numerica dell'errore di approssimazione se si assume che la funzione abbia derivata seconda in tutto I. Poniamo

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{r}{2}(x-x_0)^2$$

con r costante da determinare. La funzione

$$g(t) = f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{r}{2}(x-t)^2$$

assume il valore $f(x)$ sia in x_0 che in x. Per il teo. 5.5.1 esiste un punto c, strettamente compreso tra x_0 e x, tale che $g'(c) = 0$. Poiché

$$g'(t) = [f''(t) - r]\ (x-t)$$

risulta

$$[f''(c) - r](x-c) = 0$$

da cui $r = f''(c)$ essendo $x \ne c$.. Si ha in definitiva

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x-x_0)^2\,. \tag{5.65}$$

Tale formula si presta bene ad essere utilizzata per stimare l'errore

$$\varepsilon(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$$

in termini dell'estremo superiore della derivata seconda di f. Procediamo ora con la generalizzazione della formula (5.65).

Teorema 5.12.1. - *Se f è derivabile $(n+1)$ volte in I allora*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{5.66}$$

con c appartenente all'intervallo di estremi x_0 e x.

Dimostrazione. La (5.66) è nota come formula di Taylor di f, di punto iniziale x_0, di ordine n, con resto di Lagrange. Poniamo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\, r_n$$

con r_n da determinare. Se

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}\,(x - t)^k + \frac{(x - t)^{n+1}}{(n+1)!}\, r_n$$

allora $g(x) = g(x_0) = f(x)$. È possibile applicare quindi a g, ristretta all'intervallo di estremi x e x_0, il teo. 5.5.1: esiste un punto c, strettamente compreso tra x_0 e x, tale che $g'(c) = 0$. Si ha

$$g'(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}\,(x - t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}\,(x - t)^{k-1} - \frac{(x - t)^n}{n!}\, r_n\,.$$

Osservato che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}\,(x - t)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}\,(x - t)^k$$

abbiamo

$$g'(t) = \frac{(x - t)^n}{n!}\left[f^{(n+1)}(t) - r_n\right].$$

Poiché $c \neq x$ si ha $r_n = f^{(n+1)}(c)$ da cui la (5.66). □

Ricaviamo alcuni sviluppi notevoli. Cominciamo applicando la (5.66) alla funzione esponenziale; si ha

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underbrace{\frac{e^c}{(n+1)!}\, x^{n+1}}_{R_n(x)}$$

con c appartenente all'intervallo di estremi 0 e x. Essendo

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

si ha

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,. \tag{5.67}$$

Utilizziamo lo stesso procedimento per le funzioni trigonometriche seno e coseno. Si ha

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underbrace{(-1)^{n+1} \frac{\cos c}{(2n+3)!}\, x^{2n+3}}_{R_{2n+2}(x)}$$

con c appartenente all'intervallo di estremi 0 e x. Essendo

$$\lim_{n\to\infty} R_{2n+2}(x) = 0$$

si ha

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\,. \tag{5.68}$$

Risulta anche

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underbrace{(-1)^{n+1} \frac{\cos c}{(2n+2)!}\, x^{2n+2}}_{R_{2n+1}(x)}$$

con c compreso tra 0 e x. Essendo

$$\lim_{n\to\infty} R_{2n+1}(x) = 0$$

si ha

$$\cos x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,. \tag{5.69}$$

5.13 Il metodo di Newton

Riportiamo un procedimento, noto come "metodo di Newton", utile per approssimare soluzioni dell'equazione

$$f(x) = 0 \tag{5.70}$$

con f, definita in un intervallo $[a, b]$, soddisfacente le seguenti condizioni

(i) $f(a)\, f(b) \neq 0$;

(ii) $f' \neq 0$;

(iii) $f'' \neq 0$.

Per il teorema degli zeri la condizione (i) assicura l'esistenza di una soluzione u di (5.70). Le ipotesi (ii) e (iii), per il teo. 5.6.1, comportano che f' e f'' non cambiano segno. Per semplicità assumiamo che sia

$$f'(x) > 0\,, \quad f''(x) > 0\,. \tag{5.71}$$

Quindi f è strettamente crescente e convessa. La stretta crescenza comporta che la soluzione u è unica. In questo caso il primo passo del processo di approssimazione di u consiste nel porre $u_0 = b$. La retta tangente al grafico di f nel punto $(u_0, f(u_0))$ interseca l'asse delle x nel punto di ascissa

$$u_1 = u_0 - \frac{f(u_0)}{f'(u_0)}\,.$$

Poiché f è convessa si ha $u < u_1 < u_0$. È ovviamente possibile ripetere la procedura partendo da u_1. In tal modo si costruisce per ricorrenza una successione il cui termine generale è

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}\,. \tag{5.72}$$

Essendo $u < u_{n+1} < u_n$ la successione $\{u_n\}$ è decrescente e limitata; si ha

$$v = \inf_n \{u_n\} = \lim_{n\to+\infty} u_n\,.$$

Essendo f e f' continue dalla (5.72) si ha

$$v = v - \frac{f(v)}{f'(v)}$$

e quindi $f(v) = 0$; deve ovviamente essere $u = v$.
Per valutare la velocità di convergenza di $\{u_n\}$ applichiamo a f la formula di Taylor (5.65) di punto iniziale u_n. Si ha

$$0 = f(u) = f(u_n) + f'(u_n)(u - u_n) + \frac{1}{2} f''(c_n)(u - u_n)^2$$

con $c_n \in]u, u_n[$. Sostituendo a $f(u_n)$ il valore che si ottiene dalla (5.72) si ha

$$f'(u_n)(u_{n+1} - u) = \frac{1}{2}\, f''(c_n)(u - u_n)^2\,,$$

ovvero, se $\varepsilon_n = u_n - u$ denota l'errore di approssimazione,

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{f''(c_n)}{f'(u_n)}\, \varepsilon_n^2\,.$$

In definitiva abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(u)}{f'(u)}\,;$$

quindi la convergenza è almeno "quadratica". Si tratta di un tipo di convergenza più efficace di quello relativo al metodo di bisezione illustrato nella dimostrazione del teorema degli zeri.
Se non si verificano le condizioni (5.71) si procede in modo analogo. Bisogna stare solo attenti a scegliere il punto da cui iniziare il processo di approssimazione; in certi casi infatti va posto $u_0 = a$.
Se $f(x) = x^2 - 2$ si ottiene un algoritmo per il calcolo approssimato di $\sqrt{2}$ noto come "metodo di Erone". Posto $u_0 = 2$ e

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

la successione $\{u_n\}$ converge a $\sqrt{2}$ soluzione positiva dell'equazione $f(x) = 0$. Si ha anche

$$\varepsilon_n = u_n - \sqrt{2} = \frac{1}{2\,u_{n-1}}(u_{n-1} - \sqrt{2})^2$$

da cui

$$\varepsilon_n \le \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{2\sqrt{2}}\,.$$

Capitolo 6

Calcolo integrale

6.1 Misura secondo Peano-Jordan in $\mathbb{R}$

In tale paragrafo diamo la definizione di misura per sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ prendendo le mosse dalla nozione elementare di lunghezza di un intervallo limitato I di estremi a, b

$$m(I) = b - a\,.$$

Definizione 6.1.1. - *Siano*

$$I_1, I_2, \cdots, I_n$$

n intervalli limitati a due a due privi di punti interni comuni. L'insieme

$$P = \bigcup_{k=1}^{n} I_k \tag{6.1}$$

dicesi "plurintervallo" e la quantitá

$$m(P) = \sum_{k=1}^{n} m(I_k) \tag{6.2}$$

ne è la misura.

Gli intervalli delle decomposizioni (6.1) di P possono essere anche aperti o semiaperti. In ogni caso la posizione (6.2) non si presta ad equivoci; si può dimostrare infatti che essa non dipende dalla particolare decomposizione (6.1).

Definizione 6.1.2. - *Sia X un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$. L'estremo inferiore dell'insieme delle misure dei plurintervalli contenenti X prende il nome di "misura esterna" di X e si denota con $m_e(X)$. L'estremo superiore dell'insieme delle misure dei plurintervalli contenuti in X prende invece il nome di "misura interna" di X e si denota con $m_i(X)$.*

Dati due plurintervalli P_1, P_2 è evidente che

$$P_1 \subseteq P_2 \Longrightarrow m(P_1) \leq m(P_2)\,. \tag{6.3}$$

Si ha quindi

$$m_i(X) \leq m_e(X)\,. \tag{6.4}$$

Definizione 6.1.3. - *Se $m_i(X) = m_e(X)$ l'insieme X dicesi "misurabile secondo Peano-Jordan" o semplicemente "misurabile". La "misura" di X è allora*

$$m(X) = m_i(X) = m_e(X)\,.$$

Sussiste la seguente ovvia caratterizzazione.

Proposizione 6.1.1. - *L'insieme X è misurabile se e solo se, per ogni ε, esistono due plurintervalli P_1, P_2, con $P_1 \subseteq X \subseteq P_2$, tali che*

$$m(P_2) - m(P_1) < \varepsilon\,.$$

Esempio 6.1.1. - *Con il simbolo $D = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ denotiamo il cosiddetto "insieme di Dirichlet". Consideriamo un plurintervallo P contenente D. Ovviamente P è chiuso e in quanto tale contiene tutti i suoi punti di accumulazione. Per la proprietà di densità descritta nel teo. 1.3.2 i punti di $[0,1]$ sono di accumulazione per D e, quindi, per P. Pertanto $[0,1] \subseteq P$; ciò implica che $m_e(D) = 1$. D'altra parte, essendo D privo di punti interni, gli unici plurintervalli contenuti in D sono quelli costituiti da un numero finito di punti: pertanto $m_i(D) = 0$. In definitiva D non é misurabile.*

È possibile introdurre una nozione più generale di misura. Limitiamoci per semplicità al seguente caso.

Definizione 6.1.4. - *Un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$ ha "misura nulla secondo Lebesgue" se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una successione di intervalli aperti $\{I_k\}$ tale che*

(a) $X \subseteq \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k$

(b) $\displaystyle\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} m(I_k) \right\} = \sum_{n=1}^{+\infty} m(I_n) < \varepsilon\,.$

E' evidente che un insieme di misura nulla secondo Peano-Jordan ha misura nulla secondo Lebesgue.

Proposizione 6.1.2. - *L'insieme di Dirichlet e, più in generale, gli insiemi numerabili hanno misura nulla secondo Lebesgue.*

Dimostrazione. Sia X numerabile: si ha allora $X = \{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Fissato ε poniam

$$I_k = \left]r_k - \frac{\varepsilon}{2^k}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^k}\right[.$$

È soddisfatta la condizione (a); inoltre, ricordando la (1.22), si ha

$$\sum_{k=1}^{n} m(I_k) \le \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k-1}} < 2\,\varepsilon$$

da cui la condizione (b). Quindi X ha misura nulla secondo Lebesgue. □

Esempio 6.1.2. - *Posto* $E_0 = [0,1]$ *sia*

$$E_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \tag{6.5}$$

l'insieme che si ottiene eliminando i punti dell'intervallo aperto $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$*, il cosiddetto "terzo medio". Se si elimina il terzo medio in ognuno dei due intervalli a secondo membro della* (6.5) *abbiamo l'insieme*

$$E_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] .$$

Iterando il procedimento si ottiene una successione $\{E_n\}$ *decrescente di plurintervalli. Ogni* E_n *è unione di* 2^n *intervalli di ampiezza* 3^{-n}*; si ha quindi*

$$m(E_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n . \tag{6.6}$$

L'intersezione C *della famiglia* $\{E_n\}$ *prende il nome di "insieme di Cantor".*

Per la prop. 4.1.2 l'insieme C é chiuso in quanto intersezione di chiusi; esso non é vuoto perché contiene gli estremi di tutti gli intervalli la cui unione dà E_n. Inoltre C, per la (6.6), ha misura nulla secondo Peano-Jordan.

Proposizione 6.1.3. - *L'insieme di Cantor ha la potenza del continuo.*

Dimostrazione. Per come è stato costruito a C appartengono i punti di $[0,1]$ della forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{3^n} ,$$

con $\alpha_n = 0$ oppure $\alpha_n = 2$, cioè tutti quei numeri che, rappresentati in base tre, non presentano mai dopo la virgola la cifra uno. Conveniamo di rappresentare i numeri di C che abbiano l'ultima cifra 1, come per esempio 1/3, sostituendo 1 con la cifra 0 seguita da $\overline{2}$. Quindi C è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle successioni $\{\alpha_n\}$ con α_n che può assumere solo i valori 0, 2; tale insieme ha la potenza del continuo. □

Proposizione 6.1.4. - *L'insieme di Cantor é privo di punti interni e di punti isolati.*

Dimostrazione. L'insieme C non può avere punti interni dal momento che ha misura nulla.Per dimostrare che C é privo di punti isolati procediamo per assurdo. Sia x un punto isolato di C e sia $]a,b[$ un intervallo la cui intersezione con C si riduca a x. E' ovviamente possibile, scegliendo opportunamente l'indice n, fare in modo che x appartenga ad uno degli intervalli che compongono E_n e che tale intervallo, che denotiamo con I_n, sia incluso in $]a,b[$. Allora, detto y uno dei due estremi di I_n diverso da x, risulta che $y \in C \cap]a,b[$: siamo pervenuti ad un assurdo. □

Osservazione 6.1.1. - *L'insieme di Cantor è il primo significativo esempio di frattale. Per tali insiemi si può introdurre la nozione di dimensione che non sempre è un numero intero; in particolare C ha dimensione $\log_3 2$.*

6.2 Misura secondo Peano-Jordan in $\mathbb{R}^2$

La derivata di una funzione f può essere interpretata come la velocità scalare di un punto materiale il cui moto è descritto da una legge oraria rappresentata per l'appunto da f. Il problema inverso consiste nel risalire alla legge oraria una volta che si conoscano i valori della velocità istante per istante. La soluzione di tale problema, nel caso in cui la velocitè sia positiva, richiede che si introduca la nozione di area per una opportuna classe di insiemi del piano. Poniamoci l'obiettivo di misurare un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, di associare cioè ad esso un valore numerico che si riduca all'area nel caso di figure geometriche elementari come i poligoni. Il modo tradizionale di procedere consiste nell'attribuire una misura a semplici oggetti per poi passare ad insiemi di struttura via via più complessa.

Definizione 6.2.1. - *Assegnate due coppie (x_1, y_1), (x_2, y_2) di $\mathbb{R}^2$, con $x_1 \leq x_2$ e $y_1 \leq y_2$, l'insieme*

$$I = \{(x, y)) \,:\, x_1 \leq x \leq x_2\,, \quad y_1 \leq y \leq y_2\}$$

si chiama "intervallo chiuso" di $\mathbb{R}^2$. Il diametro di I è la lunghezza della diagonale e la sua misura è

$$m(I) = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\,.$$

L'insieme dei punti interni ad un intervallo chiuso prende il nome di intervallo aperto; in modo naturale si può anche introdurre la nozione di intervallo semiaperto a destra o a sinistra. Ovviamente la definizione di misura rimane inalterata. A questo punto la def. 6.1.1 può ora essere adattata al caso bidimensionale.

Definizione 6.2.2. - *Sia*

$$\mathcal{D} = \{I_1, \cdots, I_n\} \tag{6.7}$$

una famiglia di intervalli di $\mathbb{R}^2$ *a due a due privi di punti interni comuni. Si chiama "plurintervallo" l'insieme*

$$P = \bigcup_{k=1}^{n} I_k\,.$$

La famiglia (6.7) *prende il nome di decomposizione di* P*. Il "diametro" di* $\mathcal{D}$ *è il massimo tra i diametri degli intervalli* I_k*. La misura di* P *è*

$$m(P) = \sum_{k=1}^{n} m(I_k)\,. \tag{6.8}$$

Nella definizione di plurintervallo gli intervalli della decomposizione in generale sono chiusi anche se (cfr. [6]) converrebbe utilizzare intervalli semiaperti a sinistra o a destra. Anche in questo caso la posizione (6.8) non si presta ad equivoci. Si può dimostrare infatti che la quantità (6.8) non cambia se si utilizzano differenti decomposizioni del plurintervallo. Il primo passo consiste nel verificare che

$$m(I) = \sum_{k} m(I_k) \tag{6.9}$$

se l'intervallo I è unione di un numero finito intervalli I_k a due a due privi di punti interni comuni. Tralasciamo la dimostrazione della (6.9); limitiamoci a verificare come da essa si possa dedurre l'indipendenza della misura di un plurintervallo dalla decomposizione scelta. Se $\mathcal{D}' = \{I'_k\}$ e $\mathcal{D}'' = \{I''_h\}$ sono decomposizioni di P, applicando due volte la (6.9) abbiamo

$$\begin{aligned}
\sum_k m(I'_k) &= \sum_k \left(\sum_h m(I'_k \cap I''_h) \right) \\
&= \sum_h \left(\sum_k m(I'_k \cap I''_h) \right) = \sum_h m(I''_h)\,.
\end{aligned}$$

Ricordiamo inoltre che l'unione, l'intersezione di due plurintervalli è ancora un plurintervallo. Per quanto riguarda la differenza bisogna far riferimento ai plurintervalli semiaperti a sinistra o a destra. Vale inoltre la (6.3).

Definizione 6.2.3. - *Sia* X *è un sottoinsieme limitato di* $\mathbb{R}^2$*. L'estremo superiore dell'insieme delle misure dei plurintervalli contenuti in* X*, denotato con* $m_i(X)$*, è la "misura interna" di* X*. L'estremo inferiore dell'insieme delle misure dei plurintervalli contenenti* X *prende il nome di "misura esterna" di* X *e si denota con* $m_e(X)$*.*

Si verifica facilmente che continua a valere la (6.4).

Definizione 6.2.4. - *Se $m_i(X) = m_e(X)$ l'insieme X dicesi "misurabile secondo Peano-Jordan" o semplicemente "misurabile". La sua misura è*

$$m(X) = m_i(X) = m_e(X)\,.$$

Denotiamo con $\mathcal{M}$ la famiglia dei sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^2$.

Riportiamo senza dimostrazione i seguenti risultati.

Teorema 6.2.1. - *Se $X_1, X_2 \in \mathcal{M}$ allora gli insiemi $X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2$, $X_1 \backslash X_2$ appartengono a $\mathcal{M}$. Inoltre si ha*

- $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow m(X_1) \leq m(X_2)$ (monotonia);
- $m(X_1 \cup X_2) \leq m(X_1) + m(X_2)$ (subadditività);
- *Se X_1, X_2 non hanno punti interni in comune allora*

$$m(X_1 \cup X_2) = m(X_1) + m(X_2)\,, \quad \text{(additività)}\,;$$

- $X_1 \subset X_2 \Longrightarrow m(X_2 \backslash X_1) = m(X_2) - m(X_1)\,.$

Definizione 6.2.5. - *Sia X non limitato. Si dice che esso è misurabile se, per ogni $r > 0$, è misurabile $X \cap C_r$ dove C_r è il cerchio con centro nell'origine e raggio r. Si pone allora*

$$m(X) = \lim_{r \to \infty} m(X \cap C_r)\,. \tag{6.10}$$

Nulla esclude che sia $m(X) = +\infty$.

6.3 Integrale secondo Riemann

Se $I = [a, b]$ per "decomposizione" di I si intende una collezione di punti di I

$$\mathcal{D} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \tag{6.11}$$

con

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\,.$$

Il "diametro" di $\mathcal{D}$ è

$$\delta_{\mathcal{D}} = \max_k (x_{k+1} - x_k)\,.$$

Sia f una funzione limitata in $[a, b]$. Posto

$$m_k = \inf_{[x_k, x_{k+1}]} f\,, \qquad M_k = \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f\,, \tag{6.12}$$

consideriamo le quantità

$$s(f, \mathcal{D}) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k\,(x_{k+1} - x_k)\,, \qquad S(f, \mathcal{D}) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k\,(x_{k+1} - x_k)\,.$$

Quando non c'è possibilità di equivoco porremo più semplicemente

$$s(f, \mathcal{D}) = s(\mathcal{D})\,, \qquad S(f, \mathcal{D}) = S(\mathcal{D})\,.$$

Proposizione 6.3.1. - *Gli insiemi numerici* $\{s(\mathcal{D})\}$ *e* $\{S(\mathcal{D})\}$ *sono separati. Si ha cioè*

$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}) \leq \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D})\,.$$

Dimostrazione. Se $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ sono decomposizioni di I indichiamo con $\mathcal{D}_{12}$ la decomposizione costituita dai punti che appartengono ad almeno una delle due decomposizioni $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$. Si verifica facilmente (cfr. [4]) che

$$s(\mathcal{D}_1) \leq s(\mathcal{D}_{12}) \leq S(\mathcal{D}_{12}) \leq S(\mathcal{D}_2) \tag{6.13}$$

da cui l'asserto. □

Definizione 6.3.1. - *Se*

$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D})\,, \tag{6.14}$$

la funzione f *dicesi "integrabile secondo Riemann" o, semplicemente, "integrabile" in* $[a,b]$*. L'elemento di separazione* (6.14) *delle due classi numeriche* $\{s(\mathcal{D})\}$ *e* $\{S(\mathcal{D})\}$ *si denota con il simbolo*

$$\int_a^b f(x)\,dx\,;$$

esso è detto "integrale" di f *esteso ad* $[a,b]$.

Definizione 6.3.2. - *Sia* f *integrabile e non negativa. L'insieme del piano*

$$\{(x,y)\,:\,a \leq x \leq b\,,\quad 0 \leq y \leq f(x)\} \tag{6.15}$$

si chiama "rettangoloide" di base $[a,b]$ *relativo a* f.

Proposizione 6.3.2. - *Se* f *è una funzione non negativa e integrabile allora la misura di* (6.15) *è l'integrale di* f.

Dimostrazione. Basta osservare che $s(\mathcal{D})$ e $S(\mathcal{D})$ rappresentano le aree di due plurintervalli il primo contenuto, il secondo contenente il rettangoloide (6.15). L'integrabilità di f equivale ad affermare che l'insieme (6.15) è misurabile. □

Dimostriamo il seguente criterio di integrabilità.

Teorema 6.3.1. - *Se* f *è continua allora* f *è integrabile.*

Dimostrazione. Fissato ε, per il teo. 4.2.1 è possibile determinare δ_ε in modo tale che

$$|x-y| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon\,. \tag{6.16}$$

Scegliamo una decomposizione $\mathcal{D}$ di $[a,b]$ con $\delta_{\mathcal{D}} < \delta_\varepsilon$. Per l'ipotesi di continuità di f le quantità m_k, M_k in (6.12) sono, rispettivamente, il minimo e il massimo di f in $[x_k, x_{k+1}]$; i punti in cui f assume tali valori distano tra loro meno di $\delta_{\mathcal{D}}$ e, quindi, di δ_ε. Per la (6.16) si ha $M_k - m_k < \varepsilon$. In definitiva abbiamo

$$S(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\,(x_{k+1} - x_k) < \varepsilon\,(b-a) \tag{6.17}$$

da cui la (6.14). □

Definizione 6.3.3. - *Una funzione f dicesi "generalmente continua" in un intervallo I se essa è continua tranne che in un numero finito di punti di I.*

Definizione 6.3.4. - *Una funzione dicesi "quasi ovunque continua in I secondo Peano-Jordan" se è continua in tutti i punti di $I \backslash I_0$ con I_0 sottoinsieme di I di misura nulla secondo Peano-Jordan. Essa dicesi "quasi ovunque continua secondo Lebesgue" se è continua in tutti i punti $I \backslash I_0$ con I_0 sottoinsieme di I di misura nulla secondo Lebesgue.*

La condizione di continuità per l'integrabilità può essere indebolita.

Proposizione 6.3.3. - *Sia f limitata e generalmente continua in $[a, b]$ o, più in generale, quasi ovunque continua secondo Peano-Jordan. Allora f è integrabile.*

Dimostrazione. Sia f generalmente continua e siano $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ i punti di discontinuità di f. Fissato ε scegliamo gli intorni $I_j =]c_j, d_j[$ di x_j in modo tale che essi siano a due a due disgiunti e che la somma delle loro misure sia minore di ε. La funzione f è continua nel compatto

$$[a, b] \backslash \left(\cup_{j=1}^{k} I_j \right) \,. \tag{6.18}$$

Procedendo come nella dimostrazione del teo. 6.3.1 decomponiamo il compatto (6.18) in intervalli in ognuno dei quali l'oscillazione di f sia minore di ε. Detta $\mathcal{D}$ tale decomposizione si ha allora

$$S(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) < \varepsilon(b-a). \tag{6.19}$$

Sia $\mathcal{D}'$ la decomposizione di $[a, b]$ che si ottiene aggiungendo gli intervalli $[c_j, d_j]$ a quelli di $\mathcal{D}$. Se

$$M = \sup_{[a,b]} |f|$$

per la (6.19) si ha

$$\begin{aligned} S(\mathcal{D}') - s(\mathcal{D}') &= S(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) + \sum_{j=1}^{k} \left(\sup_{[c_j,d_j]} f - \inf_{[c_j,d_j]} f \right) (d_j - c_j) \\ &< \varepsilon(b-a) + 2M \sum_{j=1}^{k} (d_j - c_j) \\ &< \varepsilon\,(b - a + 2\,M) \,. \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ε discende che f è integrabile.
La stessa procedura può essere utilizzata se f è quasi ovunque continua secondo Peano-Jordan. Basta infatti assumere che l'insieme I_0 dei punti di discontinuità di f sia contenuto nel plurintervallo aperto $\cup_{j=1}^{k} I_j$ sopra introdotto. Per ulteriori dettagli si consulti per esempio [4]. □

Per completezza riportiamo senza dimostrazione la seguente caratterizzazione delle funzioni integrabili secondo Riemann (cfr. [6]).

Teorema 6.3.2. (Criterio di Vitali-Lebesgue) - *Una funzione limitata è integrabile secondo Riemann se e solo se essa è quasi ovunque continua secondo Lebesgue.*

Come ultimo criterio di integrabilità proponiamo il seguente risultato.

Proposizione 6.3.4. - *Sia f monotona in $[a, b]$. Allora essa è integrabile.*

Dimostrazione. Sia f per esempio crescente. Fissato ε scegliamo una decomposizione $\mathcal{D}$ di $[a, b]$ con diametro minore di ε. Poiché $x_{k+1} - x_k < \varepsilon$ e

$$f(x_k) = \min_{[x_k, x_{k+1}]} f\,, \qquad f(x_{k+1}) = \max_{[x_k, x_{k+1}]} f$$

si ha

$$\begin{aligned} S(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) &= \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)]\,(x_{k+1} - x_k) \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)] = \varepsilon\,[f(b) - f(a)] \end{aligned}$$

da cui la (6.14). □

Osservazione 6.3.1. - *Si può dimostrare che l'insieme dei punti di discontinuità di una funzione monotona è numerabile e pertanto, per la prop.* 6.1.2, *di misura nulla secondo Lebesgue. Ciò basta per concludere che le funzioni monotone sono integrabili secondo Riemann alla luce del teo.* 6.3.2.

Esempio 6.3.1. - *La funzione*

$$x \in [a, b] \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } x \in D \\ 0 & \text{se } x \notin D\,, \end{cases} \tag{6.20}$$

dove D è l'insieme di Dirichlet dell'es. 6.1.1, *non è integrabile secondo Riemann. Ciò può essere verificato direttamente ma è anche conseguenza del teo.* 6.3.2 *dal momento che la funzione* (6.20) *è discontinua in ogni punto.*

Definizione 6.3.5. - *Se $\mathcal{D}$ la decomposizione* (6.11) *e* $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ *chiamiamo "somma di Riemann" l'espressione*

$$\sigma(\mathcal{D}) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)\,.$$

Si dice che

$$\lim_{\delta_{\mathcal{D}} \to 0} \sigma(\mathcal{D}) = \ell \in \mathbb{R} \tag{6.21}$$

se per ogni ε esiste un δ_ε tale che, comunque si scelga una decomposizione $\mathcal{D}$ con $\delta_{\mathcal{D}} < \delta_\varepsilon$ e comunque si scelgano i punti $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, risulti

$$|\sigma(\mathcal{D}) - \ell| < \varepsilon\,.$$

Proposizione 6.3.5. - *Se vale la* (6.21) *allora f è integrabile secondo Riemann e si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \ell\,.$$

Dimostrazione. Per semplicità ci limitiamo al caso in cui f è continua. Per la dimostrazione nel caso generale si consulti [6]. Se $\mathcal{D}$ è la decomposizione (6.11) si ha ovviamente

$$s(\mathcal{D}) \le \sigma(\mathcal{D}) \le S(\mathcal{D})$$

e

$$s(\mathcal{D}) \le \int_a^b f(x)\,dx \le S(\mathcal{D})\,.$$

Ne consegue che

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sigma(\mathcal{D}) \right| \le S(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D})\,.$$

Ragioniamo come nella dimostrazione del teo. 6.3.1. Fissato $\varepsilon > 0$ determiniamo δ_ε in modo tale che, se $\delta_{\mathcal{D}} < \delta_\varepsilon$, sussista la (6.17). Si ha allora

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sigma(\mathcal{D}) \right| < \varepsilon\,(b-a)$$

da cui l'asserto. □

Osservazione 6.3.2. - *Sia f continua in $[a, b]$. Fssato n scegliamo la decomposizione di $[a, b]$ costituita da intervalli di uguale ampiezza $(b - a)/n$. Per la prop.* 6.3.5 *si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \right)$$

con $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Sia f una funzione con derivata continua in $[a,b]$. Fissata la decomposizione (6.11) consideriamo la curva spezzata di estremi $(x_k, f(x_k))$ la cui lunghezza, per il teorema di Lagrange, è

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2 + (x_{k+1} - x_k)^2} = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \sqrt{[f'(c_k)]^2 + 1}$$

con $c_k \in [x_k, x_{k+1}]$. La quantità a secondo membro è una somma di Riemann relativa alla funzione continua

$$x \in [a,b] \longrightarrow \sqrt{[f'(x)]^2 + 1}\,.$$

Poiché le spezzate possono essere considerate delle "approssimazioni" del grafico di f ha senso i la seguente posizione.

Definizione 6.3.6. - *La lunghezza del grafico di una funzione con derivata continua in* $[a,b]$ *è*

$$\int_a^b \sqrt{[f'(x)]^2 + 1}\, dx\,.$$

6.4 Proprietà dell'integrale di Riemann

Il criterio di Vitali-Lebesgue comporta che l'insieme delle funzioni limitate e integrabili secondo Riemann è chiuso rispetto alle ordinarie operazioni algebriche: con ciò intendiamo dire che la somma e il prodotto di due funzioni integrabili sono ancora integrabili. È altresí integrabile la restrizione di una funzione, definita in un intervallo I, ad un qualsiasi sottointervallo di I. Ciò premesso elenchiamo qui di seguito le principali proprietà delle funzioni integrabili secondo Riemann.

- **Proprietà distributiva** : Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx\,. \tag{6.22}$$

- **Proprietà additiva** : Se $c \in]a,b[$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx\,. \tag{6.23}$$

- **Proprietà di monotonia** :

$$f \leq g \Longrightarrow \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx\,.$$

- **Proprietà di media** : Per ogni funzione f limitata e integrabile si ha

$$(b-a) \inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq (b-a) \sup_{[a,b]} f\,. \tag{6.24}$$

Se f è continua esiste un punto $c \in [a,b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)\,. \tag{6.25}$$

- Se f è integrabile tale è anche la funzione $|f|$ e si ha

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,. \tag{6.26}$$

Dimostriamo la (6.22) con $\alpha = \beta = 1$. Verifichiamo che

$$\inf f + \inf g \leq \inf(f+g) \leq \sup(f+g) \leq \sup f + \sup g\,. \tag{6.27}$$

Sia $\{x_n\}$ tale che

$$\inf(f+g) = \lim_{n\to\infty} \left[f(x_n) + g(x_n)\right]\,.$$

Poiché

$$\inf f + \inf g \leq f(x_n) + g(x_n)\,, \qquad \forall n$$

si ha

$$\inf f + \inf g \leq \inf(f+g)\,.$$

In modo analogo si ragiona per l'altra disuguaglianza. Essendo f, g integrabili, fissato $\varepsilon > 0$, si può dimostrare che esiste una decomposizione $\mathcal{D}$ tale che

$$S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) < \varepsilon\,, \qquad S(g,\mathcal{D}) - s(g,\mathcal{D}) < \varepsilon\,.$$

Dalla (6.27) si deduce che

$$s(f,\mathcal{D}) + s(g,\mathcal{D}) \leq s(f+g,\mathcal{D}) \leq S(f+g,\mathcal{D}) \leq S(f,\mathcal{D}) + S(g,\mathcal{D})$$

e quindi

$$S(f+g,\mathcal{D}) - s(f+g,\mathcal{D}) < 2\,\varepsilon\,.$$

Dall'arbitrarietà di ε discende che $f+g$ è integrabile. Si ha anche anche

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b \left[f(x) + g(x)\right]\,dx\right| < 2\,\varepsilon$$

da cui la (6.22).
Dimostriamo la (6.23). Fissato ε scegliamo la decomposizione (6.11) di $[a,b]$ in modo tale che sia

$$S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) < \varepsilon\,.$$

Se k è tale che $c \in [x_k, x_{k+1}]$ allora

$$\mathcal{D}_1 = \{x_0, \cdots, x_k, c\}\,, \qquad \mathcal{D}_2 = \{c, x_{k+1}, \cdots, x_n\}$$

sono decomposizioni di $[a, c]$ e $[c, b]$. Se f_1, f_2 denotano le restrizioni di f ai due intervalli $[a, c]$ e $[c, b]$ si ha

$$s(f, \mathcal{D}) \leq s(f_1, \mathcal{D}_1) + s(f_2, \mathcal{D}_2) \leq S(f_1, \mathcal{D}_1) + S(f_2, \mathcal{D}_2) \leq S(f, \mathcal{D})$$

da cui

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \left(\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \right) \right| < \varepsilon\,.$$

Dall'arbitrarietà di ε discende la (6.23).
La proprietà di monotonia è ovvia; da essa si deduce facilmente la (6.24). Se f è continua la (6.24) diventa

$$\min_{[a,b]} f \leq \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx}{b-a} \leq \max_{[a,b]} f$$

da cui la (6.25) in base al teo. 4.3.2.
Infine la (6.26) è semplice conseguenza della proprietà di monotonia.

6.5 Integrazione indefinita

Se f è integrabile in I e x, $y \in I$ il simbolo

$$\int_x^y f(t)\, dt = \begin{cases} \displaystyle\int_x^y f(t)\, dt & \text{se } x \leq y \\ \\ \displaystyle -\int_y^x f(t)\, dt & \text{se } y < x\,. \end{cases}$$

prende il nome di "integrale definito" tra x e y di f. Per esso la proprietà additiva (6.23) va riformulata nel seguente modo: se $x, y, z \in I$

$$\int_x^y f(t)\, dt = \int_x^z f(t)\, dt + \int_z^y f(t)\, dt\,. \tag{6.28}$$

La novità sta nel fatto che i tre punti dell'intervallo possono essere scelti senza che essi siano in un ordine preciso come nella (6.23).
Ci proponiamo ora di verificare in che senso l'operazione di integrazione è da ritenersi l'inversa dell'operazione di derivazione.

Definizione 6.5.1. - *Si dice che F è una primitiva di f nell'intervallo I se*

$$F'(x) = f(x) \tag{6.29}$$

per ogni $x \in I$.

Sussiste il seguente risultato noto anche come "teorema fondamentale del calcolo integrale".

Teorema 6.5.1. - *Sia f continua in I. Fissato $x_0 \in I$ la funzione*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \tag{6.30}$$

è una primitiva di f in I.

Dimostrazione. Se $x \in I$, per l'ipotesi di continuità di f, fissato ε esiste un intorno I_x di x tale che

$$|f(x) - f(t)| < \varepsilon \tag{6.31}$$

per ogni $t \in I_x$. Per la (6.28) risulta

$$F(y) - F(x) = \int_{x}^{y} f(t)\, dt\,.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x) \right| &= \frac{1}{|y-x|} \left| \int_x^y f(t)\, dt - f(x)(y-x) \right| \\ &= \frac{1}{|y-x|} \left| \int_x^y [f(t) - f(x)]\, dt \right| \\ &\ \text{(per la (6.26))} \\ &\leq \frac{1}{|y-x|} \left| \int_x^y |f(t) - f(x)|\, dt \right|. \end{aligned}$$

Se $y \in I_x$ vale la (6.31); abbiamo quindi

$$\left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x) \right| < \varepsilon$$

da cui la (6.29). □

Osservazione 6.5.1. - *Se f non è continua in tutto I allora la* (6.29) *continua a valere nei punti in cui la funzione è continua mentre, nei punti in cui c'è una discontinuità di prima specie, la funzione F ha derivata sinistra e destra.*

Il teorema fondamentale del calcolo integrale assicura che ogni funzione continua è dotata di almeno una primitiva F. Ovviamente le funzioni

$$x \in I \longrightarrow F(x) + \text{cost.} \tag{6.32}$$

sono anch'esse primitive di f. Il seguente risultato assicura che le (6.32) sono le sole primitive di f.

Proposizione 6.5.1. - *Se F_1, F_2 sono due primitive di f in I allora esse differiscono per una costante.*

Dimostrazione. Poiché

$$F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \qquad \forall x \in I$$

il risultato è conseguenza del cor. 5.5.1. □

Definizione 6.5.2. - *L'insieme* (6.32) *delle primitive di f si denota con il simbolo*

$$\int f(x)\, dx$$

che si legge "integrale indefinito" di f.

Concludiamo con il seguente risultato.

Teorema 6.5.2. - *Sia F una primitiva di f in $[a, b]$. Allora*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)\,. \tag{6.33}$$

Dimostrazione. Per il teo. 6.5.1 e la prop. 6.5.1 la primitiva F si può scrivere nel modo seguente

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\, dt + C$$

con $x_0 \in I$ e C costante opportuna. Si ha allora

$$F(b) - F(a) = \int_{x_0}^b f(x)\, dx + \int_a^{x_0} f(x)\, dx$$

da cui la (6.33) per la (6.28). □

6.6 Regole di integrazione indefinita

Per la (6.33) il calcolo di un integrale definito di una funzione è ricondotto a quello del suo integrale indefinito. Ma come bisogna procedere per determinare la primitiva di una funzione? Per definizione si ha

$$\left(\int f\, dx\right)' = f\,, \qquad \int f'\, dx = f\,. \tag{6.34}$$

Gli operatori di derivazione e di integrazione indefinita sono da considerarsi quindi l'uno l'inverso dell'altro: pertanto, ad ogni regola di derivazione si può far corrispondere una regola di integrazione. In tutte le formule che seguono si sottintende che le varie uguaglianze valgono a meno di una costante additiva.

(a) Integrali indefiniti di funzioni elementari

Le derivate delle funzioni elementari elencate nel par. 5.2 danno luogo ad altrettante formule di integrazione:

(1) $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\,x^{\alpha+1}\,, \quad \alpha \neq -1$

(2) $\displaystyle\int x^{-1}\,dx = \log|x|$

(3) $\displaystyle\int a^x\,dx = a^x\,\log_a e\,, \qquad \int e^x\,dx = e^x$

(4) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x\,, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$

(8) $\displaystyle\int \sinh x\,dx = \cosh x\,, \qquad \int \cosh x\,dx = \sinh x$

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \mathrm{settsinh\,x}\,, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \mathrm{settcosh\,x}$

(10) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \mathrm{setttanh\,x}.$

Dalla (6.34) si evince che la primitiva si ottiene in modo rapido se si rappresenta la funzione da integrare come derivata. Si ha quindi

$$\int \tan x\,dx \;=\; -\int \mathrm{D}\log|\cos x|\,dx = \log|\cos x| \tag{6.35}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \;=\; -\int \mathrm{D}\sqrt{1-x^2}\,dx = -\sqrt{1-x^2} \tag{6.36}$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx \;=\; \frac{1}{2}\int \mathrm{D}\log(1+x^2)\,dx = \frac{1}{2}\,\log(1+x^2)\,. \tag{6.37}$$

(b) Proprietà distributiva: Dalle (6.34) discende che

$$\int (\alpha\, f + \beta\, g)\;dx = \alpha\, f + \beta\, g\,. \tag{6.38}$$

Esempio 6.6.1. - *Siano $\alpha \neq \beta$ due reali. Per le formule di prostaferesi si ha*

$$\int \sin\alpha x\,\cos\beta x\,dx = \frac{1}{2}\int [\sin(\alpha+\beta)x\, + \sin(\alpha-\beta)x]\;dx$$

e quindi, per la (6.38),

$$\int \sin\alpha x\, \cos\beta x\, dx = -\frac{1}{2(\alpha+\beta)}\, \cos(\alpha+\beta)x - \frac{1}{2(\alpha-\beta)}\, \cos(\alpha-\beta)x\,.$$

Procedendo in modo analogo si ha anche

$$\begin{aligned}\int \sin\alpha x\, \sin\beta x\, dx &= \frac{1}{2(\alpha-\beta)}\, \sin(\alpha-\beta)x - \frac{1}{2(\alpha+\beta)}\, \sin(\alpha+\beta)x \\ \int \cos\alpha x\, \cos\beta x\, dx &= \frac{1}{2(\alpha+\beta)}\, \sin(\alpha+\beta)x + \frac{1}{2(\alpha+\beta)}\, \cos(\alpha+\beta)x\,.\end{aligned}$$

(c) Integrali di funzioni razionali

Mediante le procedure illustrate ai punti precedenti è possibile integrare le cosiddette funzioni razionali cioè quelle funzioni che si presentano come rapporti di polinomi. Per dettagli sui tali metodi di integrazione rimandiamo per esempio a [3], [4], [10]. Il metodo consiste nel riscrivere la funzione come somma di "fratti semplici" , funzioni razionali cioè con, a denominatore, un polinomio irriducibile di primo o secondo grado e, a numeratore, un altro polinomio di grado inferiore a quello del denominatore.
Per semplicità di esposizione limitiamoci ad un esempio. Consideriamo la funzione razionale

$$\frac{1}{x(x^2+3\,x+2)}\,. \tag{6.39}$$

Poiché

$$\frac{1}{x(x^2+3\,x+2)} = \frac{1}{2\,x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2\,(x+2)}\,,$$

la primitiva si ottiene utilizzando le proprietà riportate ai punti precedenti.

(d) Integrazione per parti

Dalla regola di derivazione del prodotto (5.10) e dalla (6.34) si ottiene

$$\int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int g'(x)\, f(x)\, dx\,. \tag{6.40}$$

La (6.40) è nota come "regola di integrazione per parti".

Dalla (6.40) si ha

$$\text{(12)}\quad \int \log x\, dx = x(\log x - 1)\,.$$

Inoltre, ricordando le (6.36), (6.37), abbiamo

$$\text{(13)}\quad \int \arcsin x\, dx = x\, \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\,,$$

(14) $\displaystyle\int \arctan x\, dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\,.$

Osservazione 6.6.1. - *Dalla* (6.40) *e dalla* (6.33) *si ottiene la seguente regola di integrazione per parti relativa agli integrali definiti*

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b g'(x)\,f(x)\,dx\,. \tag{6.41}$$

(e) Regola di integrazione per sostituzione

Sia F una primitiva di f in un intervallo I e sia

$$\varphi\,:\,t \in J \longrightarrow \varphi(t) \in I$$

un'applicazione biunivoca di J su I, con derivata diversa da zero. Si ha

$$\frac{d}{dt}\,F(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$$

da cui, per la (6.34),

$$F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

ovvero

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \left[\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}\,. \tag{6.42}$$

Con la formula (6.42) e con una scelta opportuna di φ, per il calcolo dell'integrale di f ci si può ricondurre ad uno dei casi studiati ai punti precedenti.
Illustriamo tale procedura con qualche esempio. Per calcolare l'integrale

$$\int \frac{dx}{e^{2x} + 3\,e^x + 2}$$

operiamo il cambio di variabile $x = \log t$. Il calcolo dell'integrale è ricondotto a quello della funzione razionale (6.39). Per ritornare alla variabile x bisogna ovviamente porre $t = e^x$.
Per il calcolo dell'integrale

$$\int \frac{dx}{\sin x(1 + \cos x)}\,,$$

osservato che

$$\sin x = \frac{2\,\tan\dfrac{x}{2}}{1 + \tan^2\dfrac{x}{2}}\,, \qquad \cos x = \frac{1 - \tan^2\dfrac{x}{2}}{1 + \tan^2\dfrac{x}{2}}\,,$$

si procede con la sostituzione $x = 2\,\arctan t$. Ancora una volta si perviene ad una funzione razionale nella nuova variabile t. Nella primitiva ottenuta bisogna ovviamente porre $t = \tan\frac{x}{2}$.
Per ulteriori casi si può utilmente consultare un qualsiasi testo di Analisi Matematica 1.

6.7 Sommabilità

Facciamo brevemente cenno all'integrazione di funzioni continue in intervalli non compatti. L'ipotesi di continuità potrebbe essere indebolita ma, per semplicità di esposizione, non ci occuperemo di tali estensioni. Per maggiori dettagli rimandiamo ad uno qualsiasi dei testi riportati in bibliografia.
Consideriamo prima il caso di una funzione non negativa e, per rendere l'idea, partiamo da alcuni casi concreti. Data la funzione

$$f \,:\, x \in]0,+\infty[\longrightarrow f(x) = x^{-\alpha} \tag{6.43}$$

con α positivo e diverso da 1, restringiamo f all'intervallo $[1,+\infty[$. Per ogni $a > 1$ si ha

$$\int_1^a x^{-\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}\left(a^{1-\alpha}-1\right)$$

da cui

$$\lim_{a\to+\infty}\int_1^a x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \le 1\,. \end{cases}$$

Analoghe considerazioni si possono fare se si prende la restrizione di f a $]a,1]$. Si ha allora

$$\lim_{a\to 0}\int_a^1 x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \ge 1\,. \end{cases}$$

L'esempio proposto suggerisce la seguente

Definizione 6.7.1. - *Sia f una funzione non negativa e continua in un intervallo I di estremi $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Si pone*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup\left\{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \,:\, [\alpha,\beta] \subset I\right\}. \tag{6.44}$$

Se la quantità (6.44) *è finita si dice che f è "sommabile" in I.*

Sia per esempio f è continua e non negativa nell'intervallo $[a,+\infty[$; allora se

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx = \ell \in \mathbb{R} \tag{6.45}$$

la funzione è ovviamente sommabile e si ha

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \ell\,.$$

Esempio 6.7.1. - *Se $a > 1$ si verifica facilmente che la funzione*

$$x \in [a, +\infty[\longrightarrow \frac{1}{x \log^\alpha x}$$

è sommabile se e solo se $\alpha > 1$. Analoghe considerazioni possono essere fatte per la stessa funzione ristretta all'intervallo $]0, a]$ con $a < 1$.

Per riconoscere se una funzione non negativa è sommabile o meno si può far riferimento al seguente criterio di semplice verifica.

Proposizione 6.7.1. - *Siano f, g due funzioni non negative e, per esempio, continue in un intervallo I. Sia $f \leq g$; allora*

- *se g è sommabile allora f è sommabile;*
- *se f non è sommabile allora anche g non lo è.*

Siano f, g due funzioni continue e non negative in $]a, b]$. Se

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}^+$$

allora è possibile applicare la prop. 6.7.1. Si può cioè concludere che f, g o sono entrambe sommabili o non sommabili. In particolare, alla luce degli esempi sopra proposti lo studio della sommabilità o meno di una funzione può essere ricondotto a quello della determinazione del suo ordine di infinitesimo o di infinito.
Consideriamo il caso di una funzione f di segno variabile. Indichiamo con

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}\,, \qquad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

rispettivamente la "parte positiva" e la "parte negativa" di f. Si ha

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)\,, \qquad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x)\,. \tag{6.46}$$

Definizione 6.7.2. - *Si dice che f è sommabile in I se tale è la funzione non negativa $|f|$.*

Dalla (6.46) si deduce che f è sommabile se e solo se tali sono la parte positiva e quella negativa di f. Se a, b sono gli estremi dell'intervallo I si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx\,.$$

Consideriamo la seguente funzione

$$x \in [\pi/2, +\infty[\longrightarrow \frac{\sin x}{x}\,. \tag{6.47}$$

Integrando per parti si ha

$$\int_{\pi/2}^t \frac{\sin x}{x}\,dx = -\int_{\pi/2}^t \frac{\cos x}{x^2}\,dx - \frac{\cos t}{t}\,.$$

La funzione

$$x \in [\pi/2, +\infty[\longrightarrow \frac{\cos x}{x^2}$$

è ovviamente sommabile. Pertanto risulta finito il seguente limite

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{\pi/2}^{t} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

Nonostante ciò si può dimostrare che la funzione (6.47) non è sommabile. Pertanto il criterio indicato nella (6.45) per riconoscere se una funzione non negativa è sommabile non si applica a quelle di segno variabile.

6.8 Diseguaglianze di Jensen e di Hölder

Sia f una funzione continua in $[a, b]$ e sia φ una funzione convessa in $\mathbb{R}$. Dimostriamo la seguente "diseguaglianza integrale di Jensen"

$$\varphi\left(\frac{\int_a^b f(x)\, dx}{b-a}\right) \leq \frac{\int_a^b \varphi(f(x))\, dx}{b-a}\,. \tag{6.48}$$

Consideriamo la decomposizione di $[a, b]$ in n intervalli di uguale ampiezza e siano x_k gli estremi si tali sottointervalli. Per la (5.58) si ha

$$\varphi\left(\frac{f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})}{n}\right) \leq \frac{\varphi(f(x_0)) + \cdots + \varphi(f(x_{n-1}))}{n}\,.$$

Facendo divergere n, tenendo conto dell'oss. 6.3.2, abbiamo la (6.48) .
Se $\varphi(t) = |t|^p$ con $p > 1$ la (6.48) diventa

$$\left(\int_a^b f(x)\, dx\right)^p \leq (b-a)^{p-1} \int_a^b |f(x)|^p\, dx\,.$$

Essa è un caso particolare della seguente "diseguaglianza di Hölder"

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{6.49}$$

con f, g integrabili in $[a, b]$ e p, q numeri reali maggiori di uno tali che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,. \tag{6.50}$$

Premettiamo il seguente risultato.

Lemma 6.8.1. - *Se* p, q *soddisfano la* (6.50) *allora*

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \tag{6.51}$$

per ogni $u, v > 0$.

Dimostrazione. Considerata la funzione $t = s^{p-1}$ e la sua inversa $s = t^{q-1}$, si verifica facilmente

$$uv \leq \int_0^u s^{p-1} ds + \int_0^v t^{q-1} dt$$

da cui la (6.51). □

Poniamo

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} , \quad \|g\|_q = \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} . \tag{6.52}$$

Dalla (6.51) si ha

$$\frac{|f(x)\, g(x)|}{\|f\|_p\, \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \frac{f(x)\, g(x)}{\|f\|_p\, \|g\|_q}\, dx \right| &\leq \int_a^b \frac{|f(x)\, g(x)|}{\|f\|_p\, \|g\|_q}\, dx \\ &\leq \frac{1}{p} \int_a^b \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}\, dx + \frac{1}{q} \int_a^b \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}\, dx . \end{aligned}$$

Ricordando le posizioni (6.52) nonché la (6.50), abbiamo

$$\left| \int_a^b \frac{f(x)\, g(x)}{\|f\|_p\, \|g\|_q}\, dx \right| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

da cui la (6.49). Se $p = q = 2$ la (6.49) é nota “diseguaglianza di Schwarz”

6.9 Irrazionalità di π

Una interessante applicazione di quanto fin qui ottenuto è costituita dal seguente risultato (cfr. [5]).

Teorema 6.9.1. - π *è irrazionale.*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$f \,:\, x \in [0,1] \longrightarrow \frac{x^n}{n!}\,(1-x)^n\,.$$

Si verifica che

$$\max_{[0,1]} f = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{n!}\,\frac{1}{2^{2n}} < \frac{1}{n!}\,. \tag{6.53}$$

Un semplice calcolo mostra inoltre che

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0\,, \qquad k = 0, \cdots, n-1\,. \tag{6.54}$$

Per la (1.9) si ha

$$(1-x)^n = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} (-1)^h\, x^h$$

e quindi

$$f(x) = \frac{1}{n!}\,\sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} (-1)^h\, x^{n+h}\,.$$

Se $k = 0, \cdots, n$ si ha

$$f^{(n+k)}(0) = (-1)^k \binom{n}{k}\,\frac{(n+k)!}{n!} = (-1)^k \binom{n+k}{n-k}\,\frac{(2k)!}{k!}\,.$$

Da tale formula si evince che

$$f^{(n+k)}(0) \in \mathbb{Z}\,, \qquad k = 0, \cdots, n\,. \tag{6.55}$$

Per la simmetria del grafico di f rispetto alla retta di equazione $x = \frac{1}{2}$ si ha anche

$$f^{(n+k)}(1) \in \mathbb{Z}\,, \qquad k = 0, \cdots, n\,. \tag{6.56}$$

Supponiamo per assurdo che π sia razionale; si ha allora

$$\pi^2 = \frac{p}{q} \tag{6.57}$$

con $p, q \in \mathbb{N}$. Introduciamo la funzione

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, p^{n-k}\, q^k\, f^{(2k)}(x)\,.$$

Per le (6.54), (6.55), (6.56) abbiamo che

$$F(0), F(1) \in \mathbb{Z}\,. \tag{6.58}$$

Si ha

$$\begin{aligned}
& \left(F'(x)\sin\pi x - \pi\, F(x)\, \cos\pi x\right)' = \sin\pi x\left[F''(x) + \pi^2\, F(x)\right] \\
= \quad & \sin\pi x\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k p^{n-k}\, q^k\left[f^{(2k+2)}(x) + \pi^2 f^{(2k)}(x)\right]\right\} \\
& \text{(essendo } f^{(2n+2)} \equiv 0 \text{ e per la (6.57))} \\
= \quad & \sin\pi x\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k p^{n-k}\, q^k f^{(2k+2)}(x) + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k p^{n-k+1}\, q^{k-1} f^{(2k)}(x)\right\}.
\end{aligned}$$

Essendo

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k p^{n-k}\, q^k f^{(2k+2)}(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} p^{n-k+1}\, q^{k-1} f^{(2k)}(x)\,;$$

si ha in definitiva

$$\left(F'(x)\sin\pi x - \pi\, F(x)\, \cos\pi x\right)' = \frac{p^{n+1}}{q}\, f(x)\sin\pi x\,.$$

Integrando tra 0 e 1 otteniamo la seguente identità

$$\pi\left[F(1) + F(0)\right] = \frac{p^{n+1}}{q}\int_0^1 f(x)\sin\pi x\, dx$$

da cui intanto si deduce che

$$F(1) + F(0) > 0$$

essendo $f(x)\sin\pi x > 0$ per $x \in]0,1[$. Per la (6.53) si ha

$$F(1) + F(0) < \frac{p^{n+1}}{q}\frac{1}{n!}\frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin\pi x\, dx = \frac{p^{n+1}}{q}\frac{1}{n!}\frac{2}{\pi^2}$$

e quindi, per la (6.57),

$$F(1) + F(0) < \frac{2\, p^n}{n!}\,.$$

Poiché

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p^n}{n!} = 0\,,$$

scegliendo n abbastanza grande, possiamo fare in modo che

$$0 < F(1) + F(0) < 1\,.$$

Ciò è assurdo in quanto in contrasto con la (6.58). Abbiamo quindi provato che π è irrazionale. □

6.10 La trascendenza di e

Definizione 6.10.1. - *Un numero reale dicesi "algebrico" se è radice di un polinomio a coefficienti in $\mathbb{Z}$. Un numero reale che non sia algebrico dicesi "trascendente".*

Si può dimostrare che l'insieme dei numeri reali algebrici è numerabile. Quindi la gran parte della struttura dei reali è costituita da numeri trascendenti. Stabilire se un numero irrazionale è trascendente non è una questione da poco. Proponiamo il seguente risultato, noto come teorema di Hermite (cfr. [11]).

Teorema 6.10.1. - *Il numero di Neper è trascendente.*

Dimostrazione. Sia f un polinomio di grado m. Posto

$$I(t,f) = \int_0^t e^{t-\tau} f(x)\, dx\,,$$

integrando per parti si ha

$$I(t,f) = e^t f(0) - f(t) + I(t,f')\,. \tag{6.59}$$

Sussiste la seguente identità

$$I(t,f) = e^t \sum_{h=0}^{m} f^{(h)}(0) - \sum_{h=0}^{m} f^{(h)}(t)\,. \tag{6.60}$$

Procediamo per induzione. La (6.60) è banalmente vera se f è un polinomio di grado zero. Supponiamo che essa sussista per polinomi di grado m e sia g un polinomio di grado $m+1$. Per la (6.59) e la (6.60) con g', polinomio di grado m, in luogo di f si ha

$$\begin{aligned} I(t,g) &= e^t g(0) - g(t) + I(t,g') \\ &= e^t g(0) - g(t) + e^t \sum_{h=0}^{m} g^{(h+1)}(0) - \sum_{h=0}^{m} g^{(h+1)}(t) \\ &= e^t \sum_{h=0}^{m+1} g^{(h)}(0) - \sum_{h=0}^{m+1} g^{(h)}(t) \end{aligned}$$

cioè la (6.60) per il polinomio g.
Sia e algebrico: esistono allora $n+1$ interi relativi $a_0, \cdots, a_n$, con $a_0\, a_n \neq 0$, tali che

$$\sum_{k=0}^{n} a_k e^k = 0\,. \tag{6.61}$$

Consideriamo il polinomio

$$f(x) = x^{p-1}(x-1)^p \cdots (x-n)^p$$

con p numero primo maggiore di n; il grado di f è $m = (n+1)p - 1$. Poniamo

$$J = \sum_{k=0}^{n} a_k I(k, f)\,. \tag{6.62}$$

Utilizzando la (6.60) abbiamo

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(e^k \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(k) \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k e^k \right) \left(\sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) \right) - \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(k) \right) \end{aligned}$$

e quindi, per la (6.61),

$$J = -\sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(k) \right)\,. \tag{6.63}$$

Si verifica facilmente che

$$f^{(j)}(0) = 0\,, \qquad j < p-1$$

e, se $1 \le k \le n$,

$$f^{(j)}(k) = 0\,, \qquad j < p\,.$$

La derivata di ordine $p-1$ di f è la somma di un certo numero di addendi uno solo dei quali,

$$(p-1)!(x-1)^p \cdots (x-n)^p\,,$$

non presenta come fattore una potenza di x ad esponente intero positivo. Si ha pertanto

$$f^{(p-1)}(0) = (p-1)!(-1)^{np}(n!)^p\,. \tag{6.64}$$

Non è difficile rendersi conto che i termini $f^{(j)}(0)$, con $p \le j \le m$, e $f^{(j)}(k)$, con $1 \le k \le n$ e $p+1 \le j \le m$, sono interi divisibili per $p!$. Se scegliamo il numero primo p maggiore sia di n che di $|a_0|$ dalla (6.64) si deduce che il termine

$$a_0\, f^{(p-1)}(0) \tag{6.65}$$

della sommatoria a secondo membro della (6.63) è divisibile per $(p-1)!$ ma non per p. Per quanto detto in precedenza tutti gli altri addendi invece sono divisibili per $p!$. Ciò implica che J è un intero non nullo altrimenti il termine

(6.65) risulterebbe divisibile per $p!$; inoltre J è divisibile per $(p-1)!$. Si ha pertanto

$$(p-1)! \leq |J|\,. \tag{6.66}$$

Poniamo

$$F(x) = x^{p-1}(x+1)^p \cdots (x+n)^p\,.$$

Essendo $f(x) \leq F(x)$ se $x \geq 0$ risulta

$$I(t,f) \leq e^t F(t)\,t\,, \qquad t > 0\,.$$

Poiché per $k = 1, \cdots, n$ si ha

$$F(k) \leq F(n) = \frac{1}{n}\,[n(n-1)\cdots((2n)]^p < \frac{[(2n)!]^p}{n}$$

dalla (6.62), posto $A = \max_k |a_k|$, abbiamo

$$|J| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| e^k F(k) k \leq A\,e^n [(2n)!]^p \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\right) < A\,e^n [(2n)!]^p\,n\,.$$

Ricordando la (6.66) in definitiva si ha

$$(p-1)! \leq |J| \leq A\,n\,e^n\,[(2n)!]^p\,.$$

Se si sceglie p abbastanza grande si perviene ad un assurdo in quanto $(p-1)!$ diverge più rapidamente di $[(2n)!]^p$. $\square$

6.11 Formula di Stirling

Applicando la regola di integrazione per parti (6.41) si ha

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx\,.$$

Per induzione si ottengono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx &= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \end{aligned}$$

dove il simbolo $k!!$ denota il prodotto degli interi non superiori a k con la stessa parità di k. Si ha pertanto

$$\frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x\,dx}{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx} = 1 + \frac{1}{2n} \tag{6.67}$$

$$\frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx}{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx} = \frac{(2n+1)[(2n-1)!!]^2}{[(2n)!!]^2}\frac{\pi}{2}\,. \tag{6.68}$$

Essendo

$$\sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x \le \sin^{2n-1} x$$

risulta

$$1 \le \frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx}{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx} \le \frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x\,dx}{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx}$$

e quindi, per le (6.67) e (6.68),

$$1 \le \frac{(2n+1)[(2n-1)!!]^2}{[(2n)!!]^2}\frac{\pi}{2} \le 1 + \frac{1}{2n}\,.$$

Si ha pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2}\frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}\,. \tag{6.69}$$

La (6.69) è nota come “formula di Wallis”.

Osservazione 6.11.1. - *La* (6.69) *implica che la successione di termine generale*

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

è infinitesima di ordine $1/2$.

Occupiamoci ora di ricavare una formula che descrive il comportamento asintotico del fattoriale.

Proposizione 6.11.1. - *Vale la seguente relazione*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi} \tag{6.70}$$

nota come "formula di Stirling".

Dimostrazione. Punto di partenza è la seguente diseguaglianza valida per x appartenente all'intervallo $[0,1[$

$$0 \leq \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} - x \leq \frac{x^3}{3(1-x^2)}\,. \tag{6.71}$$

Posto $x = (2n+1)^{-1}$ nella (6.71) si ha

$$0 \leq \frac{1}{2}\log\frac{n+1}{n} - \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{12(2n+1)(n^2+n)}$$

e quindi, moltiplicando per $2n+1$,

$$0 \leq \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\frac{n+1}{n} - 1 \leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\,. \tag{6.72}$$

Posto

$$a_n = \frac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n}$$

la (6.72) può essere riscritta nel modo seguente

$$0 \leq \log\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\,.$$

Pertanto $\{a_n\}$ è crescente mentre la successione di termine generale

$$\log a_n + \frac{1}{12\,n}$$

è decrescente. Si ha pertanto

$$\log a_n + \frac{1}{12n} \leq \log a_1 + \frac{1}{12}\,.$$

La successione $\{a_n\}$ è anche limitata; essa risulta convergente: sia a il suo limite. Essendo

$$a_{2n} = \frac{(2n)^{2n+1/2}}{(2n)!e^{2n}} = \sqrt{2}\,\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!n^{1/2}}\left[\frac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n}\right]^2 = \sqrt{2}\,\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!n^{1/2}}a_n^2$$

si ha, per la (6.69),

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \sqrt{2\pi}a^2$$

da cui $a = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Abbiamo in tal modo ottenuto la (6.70). □

Capitolo 7

Serie numeriche

7.1 Definizioni

Fissata una successione $\{a_n\}$ costruiamo una nuova successione il cui termine generale è

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \,.$$

Il simbolo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \tag{7.1}$$

prende il nome di "serie" di termine generale a_k e S_n quello di somma parziale n-ma. La serie (7.1) dicesi regolare se tale è la successione $\{S_n\}$. In particolare se $\{S_n\}$ converge a S si dice che la serie (7.1) ha per somma S e si pone

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots \,.$$

In tal caso la quantità

$$r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

si chiama "resto n-mo". Se la successione $\{S_n\}$ diverge positivamente (negativamente) si pone

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty \, (-\infty) \,.$$

Infine se $\{S_n\}$ non è regolare si dice che la serie è oscillante. Le (1.22) e (1.25) sono due esempi di serie convergenti. Per tale tipo di serie vale il seguente risultato.

Proposizione 7.1.1. - *Se la serie* (7.1) *converge allora*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0\,. \tag{7.2}$$

Dimostrazione. Sia S la somma della serie. Poiché $a_n = S_n - S_{n-1}$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

e quindi la (7.2). □

Consideriamo ora la "serie armonica"

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\,. \tag{7.3}$$

Proposizione 7.1.2. - *La serie* (7.3) *diverge.*

Dimostrazione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ dalla (3.22) si deduce che

$$\log\left(1+\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k}$$

da cui

$$\log(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,.$$

Per il teo. 3.2.5 la successione delle somme parziali della serie (7.3) diverge positivamente. □

Il comportamento della serie armonica mostra che la condizione (7.2) è solo necessaria per la convergenza. Per ottenere una condizione necessaria e sufficiente bisogna appellarsi al criterio di convergenza di Cauchy che per le serie assume la seguente forma.

Teorema 7.1.1. - *La serie* (7.1) *è convergente se e solo se, fissato* ε, *esiste un indice* ν *tale che*

$$|r_{n,k}| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon$$

per ogni $n > \nu$ *e per ogni* k.

7.2 Serie a termini positivi

In tale paragrafo prenderemo in considerazioni serie i cui termini sono positivi o, più in generale, non negativi.

Proposizione 7.2.1. - *Una serie a termini non negativi o converge o diverge positivamente.*

Dimostrazione. Essendo $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$ la successione delle somme parziali della serie è crescente. Il risultato segue allora dal teo. 3.3.2. □

Quando si ha a che fare con una serie a termini non negativi il problema è stabilirne il "carattere": bisogna cioè verificare se essa converge o diverge. Se si verifica la prima circostanza si pone un secondo problema: determinare la somma della serie ovvero, quando ciò non sia possibile, stimare il resto n-mo, cioè, in altre parole, valutare l'errore che si commette quando si approssima la somma della serie con una sua somma parziale. Per risolvere la prima questione è fondamentale il seguente risultato di semplice verifica.

Proposizione 7.2.2. - *Date due serie a termini positivi a_n e b_n, se si ha definitivamente $a_n \leq b_n$ allora valgono le seguenti implicazioni:*

- *se la serie di termine generale b_n converge allora converge anche quella di termine generale a_n;*
- *se la serie di termine generale a_n diverge allora diverge anche quella di termine generale b_n.*

Di grande utilità è il seguente criterio.

Proposizione 7.2.3. - *Se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in]0, +\infty[$$

allora le due serie hanno lo stesso carattere.

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon < \ell$ esiste un indice ν tale che

$$(\ell - \varepsilon)\, b_n < a_n < (\ell + \varepsilon)\, b_n\,.$$

Basta allora applicare la prop. 7.2.2. □

Osservazione 7.2.1. - *Se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

si ha definitivamente $a_n \leq b_n$. Si può ancora fare appello alla prop. 7.2.2.

In base alla prop. 7.2.3, per studiare il carattere di una serie a termini positivi, è sufficiente confrontarla con una di cui è noto il comportamento. È d'altra parte evidente che tanto più efficace è tale procedura quanto più ampio è il repertorio delle serie di cui si conosce il carattere. Al confronto con una serie geometrica si perviene facendo uso di uno dei seguenti due risultati noti, rispettivamente, come criterio della radice e criterio del rapporto.

Proposizione 7.2.4. - *Sia*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell\,; \tag{7.4}$$

allora la serie (7.1) *converge se* $\ell < 1$, *diverge se* $\ell > 1$. *Più in generale, se*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \tag{7.5}$$

la serie (7.1) *converge, se invece*

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \tag{7.6}$$

la serie (7.1) *diverge.*

Dimostrazione. Sussista la (7.5), ovvero la (7.4) con $\ell < 1$. Fissiamo h in modo tale che risulti

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < h < 1\,.$$

Si ha definitivamente $a_n \leq h^n$: la serie (7.1) è confrontabile con la serie geometrica convergente di ragione h.
Sussista la (7.6), ovvero la (7.4) con $\ell > 1$. Scelto un valore h tale che

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > h > 1$$

si ha definitivamente $a_n \geq h^n$; la serie (7.1) ovviamente diverge. □

Proposizione 7.2.5. - *Sia*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell\,; \tag{7.7}$$

allora la serie (7.1) *converge se* $\ell < 1$, *diverge se* $\ell > 1$. *Più in generale, se*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \tag{7.8}$$

la serie (7.1) *converge, se invece*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \tag{7.9}$$

la serie (7.1) *diverge.*

Dimostrazione. Il risultato discende dalla prop. 7.2.4, nonché dalla (3.47), se vale la (7.7), ovvero dalla (3.48) nel caso in cui sussista una delle due condizioni (7.8) e (7.9). □

Quando il criterio del rapporto perde di efficacia può essere utile il seguente criterio di Raabe per la cui dimostrazione rimandiamo a [9], [10].

Proposizione 7.2.6. - *Sia*

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \ell\,.$$

Se $\ell > 1$ *allora la serie* (7.1) *converge.*

Osservazione 7.2.2. - *Se la serie* (7.1) *è confrontabile con la serie geometrica di ragione h è possibile determinare una costante H e un indice ν in modo tale che*

$$a_n \leq H\, h^n\,, \qquad \forall n > \nu\,.$$

Si ha allora la seguente valutazione per il suo resto n-mo

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq H \sum_{k=n+1}^{\infty} h^k = H\, h^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} h^k = H\, \frac{h^{n+1}}{1-h}\,.$$

con $n > \nu$.

7.3 Serie armoniche

Consideriamo ora la classe delle cosiddette serie armoniche generalizzate di esponente α

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}\,. \tag{7.10}$$

Se $\alpha \leq 1$ si ha

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}\,.$$

Per le prop. 7.2.2 e 7.1.2 la (7.10) diverge. Essa invece converge se $\alpha > 1$. Il risultato discende dal criterio di Raabe (cfr. prop. 7.2.6). Preferiamo però dare una dimostrazione diretta. Per ogni k consideriamo la seguente somma di 2^{k-1} termini della serie (7.10)

$$\frac{1}{\left(2^{k-1}\right)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{\left(2^k - 1\right)^\alpha}\,;$$

essa si maggiora con

$$\frac{2^{k-1}}{\left(2^{k-1}\right)^\alpha} = \left(2^{1-\alpha}\right)^{k-1}\,.$$

Si ha allora

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^\alpha} < \sum_{k=1}^{n} \left(2^{1-\alpha}\right)^{k-1} < \frac{1}{1-2^{1-\alpha}}\,,$$

da cui l'asserto.
Le serie armoniche costituiscono una vasta gamma di serie con le quali testare il comportamento di una serie. Alla luce della prop. 7.2.3 è evidente che confrontare una serie di termine generale a_n con una serie armonica si riduce a valutare l'ordine di infinitesimo della successione $\{a_n\}$.
Per le serie armoniche divergenti ha interesse studiare l'ordine di infinito della successione delle somme parziali. Dalle (3.22) e (3.24) si ha

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}\,. \tag{7.11}$$

Se S_n è la somma parziale n-ma della serie armonica (7.3) consideriamo le successioni i cui termini generali sono

$$a_n = S_n - \log(n+1)\,, \quad b_n = S_{n+1} - \log(n+1)\,.$$

Si ha ovviamente $a_n < b_n$ e, per la (7.11),

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= \frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0 \\ b_n - b_{n-1} &= \frac{1}{n+1} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0\,. \end{aligned}$$

Quindi la successione $\{a_n\}$ è crescente mentre $\{b_n\}$ è decrescente. Poiché per ogni n si ha

$$a_1 < a_n < b_n < b_1$$

le due successioni sono limitate e, quindi, convergenti. Si verifica poi facilmente che esse hanno lo stesso limite. Poniamo

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log(n+1)\right] = C = 0,57721\ldots\,. \tag{7.12}$$

La costante C è nota come “costante di Eulero-Mascheroni”; non è noto se tale numero sia razionale o meno.
Dalla (7.12) si deduce il seguente comportamento asintotico della successione delle somme parziali della serie armonica

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^{-1}}{\log n} = 1\,.$$

Sia $\alpha < 1$. Poiché

$$\frac{1}{k^\alpha} > \int_{k-1}^{k}\frac{dx}{(x+1)^\alpha}$$

abbiamo

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} > \int_0^n \frac{dx}{(x+1)^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}\,.$$

Essendo inoltre

$$\frac{1}{k^\alpha} < \int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x^\alpha}$$

con $k > 1$, abbiamo

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} < 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}-\alpha}{1-\alpha}\,.$$

In definitiva si ha

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} < \frac{n^{1-\alpha}-\alpha}{1-\alpha}$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^{-\alpha}}{n^{1-\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}\,.$$

Pertanto la successione delle somme parziali della serie armonica di esponente $\alpha > 1$ è un infinito di ordine $1-\alpha$.

7.4 Criterio integrale

Dimostriamo il seguente ulteriore criterio.

Proposizione 7.4.1. (**Criterio integrale**) - *Sia f una funzione positiva decrescente in $\mathbb{R}^+$. Se f è sommabile $[1,+\infty[$ e si ha definitivamente*

$$a_n \le f(n) \tag{7.13}$$

allora la serie (7.1) *converge. Si ha inoltre*

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \le \int_n^{+\infty} f(t)\,dt\,. \tag{7.14}$$

Se invece f non è sommabile in $[1,+\infty[$ e si ha definitivamente

$$a_n \ge f(n-1) \tag{7.15}$$

allora la serie (7.1) *diverge.*

Dimostrazione. Si consideri la funzione g, costante a tratti, che assume il valore a_n in $[n-1,n[$. In base all'ipotesi di decrescenza di f si ha definitivamente $g \le f$ se vale la (7.13). Basta allora applicare la prop. 6.7.1 ed osservare che la sommabilità di g equivale alla convergenza della serie (7.1). Inoltre, se vale la (7.13), la (7.14) è ovvia. Se vale la (7.15) allora g è definitivamente maggiore di una funzione non sommabile. Anche in questo caso si fa uso della prop. 6.7.1. □

Il criterio integrale può essere utilizzato per una ulteriore dimostrazione del comportamento delle serie armoniche. A tal fine osserviamo che la funzione g introdotta nella dimostrazione della prop. 7.4.1 con $a_n = n^{-\alpha}$, se $\alpha > 1$, è dominata dalla funzione sommabile

$$f \,:\, t \in [1,+\infty[\longrightarrow \min\{1,(1+t)^{-\alpha}\}\,,$$

mentre, se $\alpha \le 1$, domina la funzione $f(t) = t^{-\alpha}$.
Per quanto riguarda le serie armoniche di esponente $\alpha > 1$ ci siamo limitati a dimostrare che esse sono convergenti. La somma è nota solo per alcuni valori del parametro α: per esempio, se $\alpha = 2$, essa è $\pi^2/6$. È utile quindi valutare

l'errore che si commette quando si approssima il valore della somma della serie con quello di una sua somma parziale. Per la (7.14) si ha

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n+1}^{\infty} (1-t)^{-\alpha}\, dt = \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha - 1}\,.$$

Con una procedura simile è possibile studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\,\log^\alpha n}$$

per ogni valore positivo del parametro α. Essa converge se $\alpha > 1$, diverge se $\alpha \leq 1$. Si può inoltre stimare il resto nel caso in cui la serie converga o studiare il comportamento asintotico nel caso in cui essa diverga.

7.5 Serie a segni alterni

Indichiamo con A_k la somma parziale di indice k della serie armonica a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}\,. \tag{7.16}$$

Si verifica facilmente che

$$A_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = S_{2n+1} - S_n\,.$$

Abbiamo quindi per la (7.12)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} A_{2n+1} &= \lim_{n\to+\infty} [S_{2n+1} - \log(2n+2)] \\ &- \lim_{n\to+\infty} [S_n - \log(n+1)] + \log 2 = \log 2\,. \end{aligned}$$

Poiché risulta anche

$$\lim_{n\to+\infty} A_{2n} = \lim_{n\to+\infty} A_{2n+1}$$

si ha in definitiva

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \log 2\,.$$

La serie armonica alternante è un prototipo di serie a segni alterni. Con tale termine si intende una serie del tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\, a_n \tag{7.17}$$

con $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Proposizione 7.5.1. (**Criterio di Leibnitz**) - *Se la successione* $\{a_n\}$ *è decrescente ed infinitesima la serie alternante* (7.17) *è convergente.*

Dimostrazione. Sia S_k la somma parziale di indice k della serie (7.17). Si ha

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leq S_{2n-1}$$

$$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}\,.$$

Le successioni $\{S_{2n+1}\}$ e $\{S_{2n}\}$ sono quindi regolari. Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} + \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n}$$

la successione $\{S_n\}$ deve essere convergente. Se indichiamo con S la somma della serie (7.17) abbiamo

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}\,. \tag{7.18}$$

Dalla (7.18) si deduce anche che

$$|S - S_n| \leq a_n$$

per ogni intero n. Possiamo in tal modo valutare l'errore che si commette quando si approssima la somma della serie (7.17) con una qualsiasi somma parziale. □

Per concludere riportiamo la seguente generalizzazione del criterio di Leibnitz (cfr. [9]).

Proposizione 7.5.2. (**Criterio di Dirichlet**) - *Se la successione* $\{s_n\}$ *delle somme parziali di una serie di termine generale* α_k *è limitata e se* $\{a_k\}$ *è una successione decrescente e infinitesima allora la serie*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k a_k \tag{7.19}$$

è convergente.

Dimostrazione. Sia $\{S_n\}$ la successione delle somme parziali della serie (7.19). Facendo uso del principio di induzione matematica si prova che

$$S_n = s_1(a_1 - a_2) + s_2(a_2 - a_3) + \cdots + s_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + s_n a_n\,. \tag{7.20}$$

Sia M tale che

$$|s_n| \leq M\,, \qquad \forall n\,;$$

allora, usando l'ipotesi di decrescenza della successione $\{a_k\}$, si ha

$$|s_k(a_k - a_{k-1})| \leq M(a_k - a_{k-1})\,.$$

La serie il cui termine generale è $M(a_k - a_{k-1})$ ha per somma Mb_1. Pertanto la serie
$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k(a_k - a_{k-1})$$
è assolutamente convergente e, se σ_n è la sua somma parziale, la (7.20) diventa
$$S_n = \sigma_{n-1} + s_n a_n \, .$$
La successione $\{s_n a_n\}$ è infinitesima dal momento che $\{s_n\}$ è limitata e $\{a_n\}$ è infinitesima. Si ha che $\{S_n\}$ converge allo stesso limite di $\{\sigma_n\}$. □

7.6 Assoluta convergenza

Definizione 7.6.1. - *Si dice che la serie* (7.1) *converge assolutamente se converge la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \, . \tag{7.21}$$

La serie armonica alternante (7.16) è convergente ma non assolutamente convergente. Il seguente risultato mette quindi in luce il fatto che la nozione di convergenza assoluta è ben più forte della semplice convergenza.

Proposizione 7.6.1. - *Una serie assolutamente convergente è convergente.*

Dimostrazione. Si ha
$$|a_{n+1} + \cdots a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}| \, .$$
Poiché la serie (7.21) converge, per il criterio di convergenza di Cauchy, fissato ε, risulta
$$|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon$$
per n maggiore di un indice ν e per ogni $k \in \mathbb{N}$. Per questi stessi indici si ha allora
$$|a_{n+1} + \cdots a_{n+k}| < \varepsilon$$
da cui l'asserto sempre per il criterio di convergenza di Cauchy. □

Mettiamo ora in relazione la nozione di assoluta convergenza con quella di convergenza incondizionata che, in ultima analisi, caratterizza quelle serie per le quali vale una sorta di proprietà commutativa. Sia
$$j \, : \, k \in \mathbb{N} \longrightarrow j_k \in \mathbb{N}$$
un'applicazione biunivoca di $\mathbb{N}$ in sé. Allora si dice che la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_{j_k} \tag{7.22}$$

è un "riordinamento" della serie (7.1); in (7.22) compaiono cioè tutti e soli i termini di (7.1) ma in ordine diverso.
Supponiamo che la serie (7.1) sia assolutamente convergente. Posto

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}\,, \quad a_n^- = \max\{-a_n, 0\}$$

si ha

$$a_n = a_n^+ - a_n^-\,, \qquad |a_n| = a_n^+ + a_n^- \tag{7.23}$$

e quindi

$$0 \le a_n^+ \le |a_n|\,, \quad 0 \le a_n^- \le |a_n|\,. \tag{7.24}$$

Se la serie è assolutamente convergente dalle (7.24) si deduce che le serie di termini generali a_n^+ e a_n^- sono convergenti. Viceversa se queste ultime sono convergenti allora, per la seconda delle (7.23), la serie è assolutamente convergente.
Poniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ = S^+\,, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^- = S^-\,.$$

È evidente che S^+ e S^- sono gli estremi superiori degli insiemi costituiti da tutte le somme di un numero finito di addendi rispettivamente delle serie di termine generale a_n^+ e a_n^-. Ciò comporta ovviamente che le somme di tali due serie e quindi, la somma della serie (7.1), non dipende dall'ordine in cui i vari termini sono elencati. Pertanto la somma di (7.1) e di ogni suo riordinamento è $S = S^+ - S^-$. La proprietà sopra descritta caratterizza le serie assolutamente convergenti come si evince dal seguente risultato noto come "teorema di Riemann".

Teorema 7.6.1. - *Se la serie* (7.1) *è convergente ma non assolutamente convergente allora, comunque si fissino due valori $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, con $\alpha \le \beta$, esiste un riordinamento della serie tale che la successione $\{S_n\}$ delle somme parziali della serie riordinata verifica le seguenti condizioni*

$$\liminf_{n\to+\infty} S_n = \alpha\,, \quad \limsup_{n\to+\infty} S_n = \beta\,.$$

In particolare è possibile riordinare gli addendi in modo da ottenere come somma un qualsiasi elemento di $\overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione. Fissato $\ell \in \mathbb{R}$ dimostriamo che esiste un riordinamento della serie che ha per somma ℓ. Per tutti gli altri casi rimandiamo a [4] e [12]. Essendo la serie convergente, fissato ε, esiste un indice ν tale che

$$|a_n| < \varepsilon\,, \qquad \forall n \ge \nu\,. \tag{7.25}$$

Indichiamo con $\{a_{r_k}\}$ e $\{a_{s_h}\}$ rispettivamente le sottosuccessioni di $\{a_n\}$ dei termini non negativi e di quelli negativi. Per quanto detto in precedenza si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{r_k} = +\infty\,, \qquad \sum_{h=1}^{\infty} a_{s_h} = -\infty\,. \tag{7.26}$$

Per la prima delle (7.26) è possibile determinare k_1 in modo tale che

$$P_1 = \sum_{k=1}^{k_1} a_{r_k}$$

sia la prima somma parziale della serie di termine generale a_{r_k} che risulti maggiore di ℓ. Per la seconda delle (7.26) è possibile determinare h_1 in modo tale che

$$Q_1 = \sum_{h=1}^{h_1} a_{s_h}$$

sia la prima somma parziale della serie di termine generale a_{s_h} tale che

$$P_1 + Q_1 < \ell\,.$$

Sommiamo ora i termini a_{r_k} a partire da $a_{r_{k_1}+1}$ e fermiamoci non appena, posto

$$P_2 = \sum_{k=k_1+1}^{k_2} a_{r_k}\,,$$

si abbia

$$P_1 + Q_1 + P_2 > \ell\,.$$

A questo punto si ritorna alla serie di termine generale a_{s_h}; sommiamone i termini a partire da $a_{s_{h_1}+1}$ e fermiamoci non appena, posto

$$Q_2 = \sum_{h=h_1+1}^{h_2} a_{s_h}\,,$$

si abbia

$$P_1 + Q_1 + P_2 + Q_2 > \ell\,.$$

Sempre per le (7.26) tale procedura può essere iterata quante volte si vuole. Tutti i termini della serie vengono pertanto inseriti nel seguente elenco

$$P_1 + Q_1 + P_2 + Q_2 + \cdots + P_n + Q_n + \cdots \tag{7.27}$$

dove

$$P_n = \sum_{k=k_{n-1}+1}^{k_n} a_{r_k}\,, \qquad Q_n = \sum_{h=h_{n-1}+1}^{h_n} a_{s_h}\,;$$

si ha inoltre

$$\sum_{j=1}^{n-1}(P_j + Q_j) + \sum_{k=k_{n-1}+1}^{k_n-1} a_{r_k} \le \ell\,, \quad \sum_{j=1}^{n-1}(P_j + Q_j) + P_n > \ell \tag{7.28}$$

e

$$\sum_{j=1}^{n-1}(P_j+Q_j)+P_n+\sum_{h=h_{n-1}+1}^{h_n-1}a_{s_{h_n}}\geq\ell\,,\quad\sum_{j=1}^{n}(P_j+Q_j)<\ell\,. \tag{7.29}$$

Nella costruzione della somma parziale

$$\sum_{j=1}^{\nu}(P_j+Q_j)$$

abbiamo utilizzato almeno i primi n termini non negativi e i primi n termini negativi della serie; pertanto per tutti i termini che vengono presi in considerazione per la determinazione delle quantità P_j e Q_j vale la (7.25). Sia $n>\nu$. Per le (7.28) si ha

$$P_1+Q_1+\cdots+P_n-\ell\leq a_{r_{k_n}}<\varepsilon\,,$$

mentre, per le (7.29),

$$|P_1+Q_1+\cdots+P_n+Q_n-\ell|\leq|a_{s_{h_n}}|<\varepsilon\,.$$

È poi evidente che, se σ_n denota la n-ma somma parziale della serie (7.27), si ha

$$|\sigma_n-\ell|<\varepsilon\,,\qquad\forall n>\sum_{j=1}^{\nu}(k_j+h_j)\,.$$

Si ha quindi l'asserto. □

A titolo di esempio riordinando i termini della serie armonica alternante (7.16) nel modo seguente

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots\,. \tag{7.30}$$

Indichiamo con Σ_k la somma parziale k-ma di (7.30) e con S_k la somma parziale k-ma della serie armonica (7.3) si ha

$$\begin{aligned}\Sigma_{3n} &= 1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\ &= S_{4n}-\frac{1}{2}\,(S_{2n}+S_n)=[S_{4n}-\log(4n+1)]\\ &- \frac{1}{2}\,[S_{2n}-\log(2n+1)+S_n-\log(n+1)]+\log\frac{4n+1}{\sqrt{(2n+1)(n+1)}}\,.\end{aligned}$$

Passando al limite e tenendo in conto la (7.12) abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty}\Sigma_{3n}=\frac{3}{2}\log 2\,.$$

Poiché le successioni $\{\Sigma_{3n}\}$, $\{\Sigma_{3n+1}\}$ e $\{\Sigma_{3n+2}\}$ convergono allo stesso limite si può concludere che la somma della serie (7.30) è $\frac{3}{2}\log 2$, valore diverso dalla somma della serie (7.16).

7.7 Le formule di Eulero

Consideriamo una successione di numeri complessi il cui termine generale è

$$z_k = x_k + i\, y_k\,.$$

Si può dare in modo naturale una definizione di convergenza per la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

nel modo seguente

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z = x + i\, y \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} z_k - z \right| = 0\,. \tag{7.31}$$

La def. (7.31) equivale ovviamente ad affermare che

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x\,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} y_k = y\,.$$

Inoltre, poiché

$$\left.\begin{matrix} |x_k| \\ \\ |y_k| \end{matrix}\right\} \le |z_k| \le |x_k| + |y_k|\,,$$

la serie di termine generale z_k converge assolutamente se e solo se tali sono le due serie a termini reali

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k\,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} y_k\,.$$

Consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{7.32}$$

con

$$z = x + i\, y = \Re(z) + i\, \Im(z)\,.$$

Essa converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{C}$. Poiché la sua somma è e^x se $x \in \mathbb{R}$ è ragionevole porre

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{7.33}$$

Tale posizione si giustifica, oltre che per la ragione appena esposta, anche per il fatto che la funzione (7.33) verifica alcune proprietà formali della funzione esponenziale nel campo reale. Si ha infatti

$$e^{z+w} = e^z e^w\,. \tag{7.34}$$

Dimostriamo preliminarmente il seguente risultato.

Proposizione 7.7.1. - *Siano a, b i limiti delle successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$; si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + \cdots + a_n b_1}{n} = a\,b\,. \tag{7.35}$$

Dimostrazione. Abbiamo

$$\frac{a_1 b_n + \cdots + a_n b_1}{n} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\, b + \frac{a_1(b_n - b) + \cdots + a_n(b_1 - b)}{n}\,. \tag{7.36}$$

Per la prop. 3.10.1 il primo termine a secondo membro nella (7.36) ha per limite $a\,b$. Risulta inoltre

$$\left| \frac{a_n(b_1 - b) + \cdots + a_1(b_n - b)}{n} \right| \le \left(\sup_n |a_n| \right) \frac{|b_1 - b| + \cdots + |b_n - b|}{n}\,.$$

Pertanto, sempre per la prop. 3.10.1, l'ultimo termine in (7.36) è infinitesimo. Si è ottenuto in tal modo la (7.35). $\square$

Definizione 7.7.1. - *Per "serie prodotto secondo Cauchy" di due serie di termini generali a_k e b_k si intende la serie il cui termine n-mo è*

$$c_n = a_1 b_n + \cdots + a_n b_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}\,. \tag{7.37}$$

Proposizione 7.7.2. - *Se le serie di termini generali a_k e b_k sono assolutamente convergenti tale è anche la serie prodotto secondo Cauchy e si ha*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \right)\,. \tag{7.38}$$

Dimostrazione. L'assoluta convergenza della serie prodotto secondo Cauchy discende dalla disuguaglianza

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k| \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k| \right)\,.$$

Siano A_n, B_n, C_n e A, B, C le somme parziali e le somme delle serie di termini generali a_k, b_k, c_k. Essendo $C_n = a_1 B_n + \cdots + a_n B_1$ risulta

$$\frac{C_1 + \cdots + C_n}{n} = \frac{A_n B_1 + \cdots + A_1 B_n}{n}\,.$$

Basta allora utilizzare le prop. 3.10.1 e 7.7.1 per ottenere la (7.38). $\square$

Osservazione 7.7.1. - *La* (7.38) *sussiste anche se si assume che una sola delle due serie sia assolutamente convergente. Il risultato non vale se entrambe le serie sono solo convergenti. A tale proposito basta considerare il caso*

$$a_k = b_k = (-1)^{k-1} \frac{1}{\sqrt{k}}\,.$$

Procediamo ora alla verifica della (7.34). Si ha

$$
\begin{aligned}
e^z\, e^w &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}\right) \\
&\quad \text{(per la (7.38))} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k w^{n-k}\right) \\
&\quad \text{(per la formula del binomio di Newton)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w}\,.
\end{aligned}
$$

La serie (7.33) è assolutamente convergente; quindi è possibile riordinare i suoi termini senza alterarne la somma. Si ottiene pertanto la seguente relazione

$$
\begin{aligned}
e^{iy} &= 1 + iy - \frac{y^2}{2} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right) \\
&= \cos y + i \sin y\,.
\end{aligned}
$$

Per la (7.34) abbiamo allora

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)\,.$$

Si ha inoltre

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}\,, \quad \cos y = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}\,. \tag{7.39}$$

Le (7.39) sono note come “formule di Eulero”.
Si ha (cfr. (1.4))

$$s_n = \sum_{k=0}^{n}\cos k + i\sum_{k=0}^{n}\sin k = \sum_{k=0}^{n} e^{k\,i} = \frac{e^{(n+1)i}-1}{e^i - 1}$$

e quindi

$$|s_n| \le \sqrt{\frac{2}{1-\cos 1}}\,.$$

Le somme parziali n-me delle serie di termini generali $\cos k$ e $\sin k$ sono pertanto equilimitate. Si può applicare il criterio di Dirichlet (cfr. prop. 7.5.2) per concludere che le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^{\alpha}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^{\alpha}}$$

convergono per ogni valore positivo di α.

Bibliografia

[1] Acerbi E. - Buttazzo G., Primo corso di Analisi Matematica, Pitagora Ed.

[2] Alvino A. - Carbone L. - Trombetti G., Esercitazioni di Matematica I- parte prima, Liguori Ed.

[3] Alvino A. - Carbone L. - Trombetti G., Esercitazioni di Matematica I- parte seconda, Liguori Ed.

[4] Alvino A. - Trombetti G., Elementi di Matematica, Liguori Ed.

[5] Barozzi G.C. - Matarasso S., Analisi Matematica 1, Zanichelli

[6] Cafiero F., Lezioni di Analisi Matematica, Parte seconda, Liguori Editore

[7] Conti F., Calcolo, teoria e applicazioni, McGraw-Hill

[8] Giusti E., Analisi Matematica 1, Boringhieri

[9] Giusti E., Esercizi e complementi di Analisi Matematica, Volume primo , Boringhieri

[10] Miranda C., Lezioni di Analisi Matematica, Vol.1. Liguori Ed.

[11] Murty M.R. - Rath P., Transcendental Numbers, Springer

[12] Rudin W., Principi di Analisi Matematica, McGraw-Hill

[13] Silov G.E., Analisi matematica, funzioni di una variabile, Edizioni Mir