

CAPITOLO 5

VIBRAZIONI MECCANICHE

5.1 Introduzione

Nei capitoli precedenti le macchine sono state considerate come sistemi costituiti da organi meccanici rigidi e si è visto che in questa ipotesi un gruppo di macchine si comporta come un sistema ad un grado di libertà.

Gli organi di una macchina sono però sollecitati da forze periodiche e per questo motivo subiscono deformazioni variabili con lo stesso periodo.

Una deformazione variabile configura una vibrazione, sicché si può affermare che, quando la macchina è in funzione, gli organi della stessa vibrano a causa di azioni forzanti periodiche.

Se le ampiezze di queste vibrazioni sono modeste, è ancora accettabile l'ipotesi di sistema rigido, ma se al variare delle condizioni di funzionamento della macchina, le ampiezze della vibrazione e della deformazione diventano molto grandi, la resistenza meccanica della macchina stessa può risultarne compromessa.

Situazioni pericolose di questo tipo sono dovute a fenomeni di risonanza, che si verificano quando la frequenza delle forze, che sollecitano un organo della macchina, eguaglia una delle frequenze con le quali l'organo stesso può naturalmente vibrare.

Per evitare che fenomeni di questo tipo si verifichino durante il funzionamento di un gruppo di macchine, è necessario che in sede di progetto del gruppo stesso, possibili fenomeni vibratorii del tipo descritto vengano esaminati, in modo che sia possibile adottare, già in quella sede, tutti gli

accorgimenti adatti ad assicurare un funzionamento esente da pericolose risonanze.

In questo capitolo verranno esaminati gli aspetti fondamentali delle vibrazioni meccaniche: i risultati ottenuti verranno utilizzati nei capitoli successivi per studiare i fenomeni vibratorii, che più frequentemente si verificano nelle macchine.

5.2 Moto periodico

La vibrazione $x(t)$ di un sistema meccanico (v. fig. 5.2-1) è periodica, se il valore dello spostamento x del sistema assume lo stesso valore ad intervalli di tempo T , cioè se risulta:

$$x(t+T) = x(t) \quad (5.2-1)$$

L'intervallo di tempo T viene detto periodo della vibrazione ed è in genere misurato in secondi.

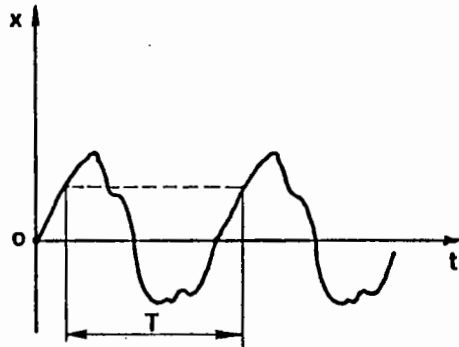


Fig. 5.2-1

Poiché, come sarà detto nel par. 5.7, un moto periodico, come qualsiasi altra grandezza periodica, è esprimibile in serie di Fourier :

$$x(t) = \sum_1^{\infty} X_n \cos(n\omega t + \phi_{0,n}) \quad (5.2-2)$$

cioè come somma di moti armonici semplici, è opportuno iniziare lo studio di una vibrazione nell'ipotesi che essa sia costituita da un moto armonico semplice.

5.3 Moto armonico

Un moto armonico $x(t)$ è rappresentato dalla funzione:

$$x(t) = X \cos(\omega t + \phi_0) \quad (5.3-1)$$

e risulta completamente definito (v. fig. 5.3-1) se di esso sono note l'ampiezza X , la pulsazione ω e la fase iniziale $\phi_0 = \omega t_0$.

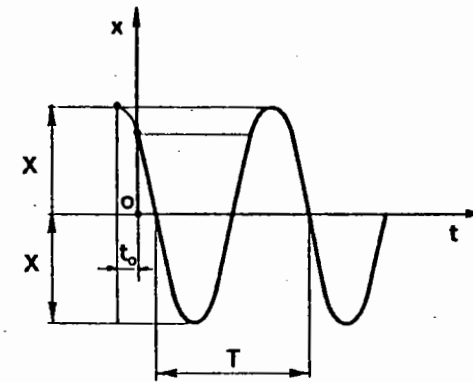


Fig. 5.3-1

La pulsazione ω è legata al periodo T , espresso in secondi, ed alla frequenza f , espressa in Hz (hertz), dalle relazioni:

$$T = 2\pi/\omega \text{ s} \quad ; \quad f = 1/T = \omega/2\pi \text{ Hz} \quad (5.3-2)$$

La pulsazione ω ha quindi le stesse dimensioni, $[T^{-1}]$, della velocità angolare.

La velocità $\dot{x}(t)$ del moto armonico si ottiene derivando rispetto al tempo la (5.3-1):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= dx/dt = -X\omega \sin(\omega t + \phi_0) = \\ &= X\omega \cos(\omega t + \phi_0 + \pi/2) \end{aligned} \quad (5.3-3)$$

e risulta quindi essere una grandezza armonica di pulsazione ω , avente cioè lo stesso periodo T e la stessa frequenza f del moto armonico $x(t)$ e di ampiezza pari ad ωX .

Dalla (5.3-3) si deduce inoltre che la velocità $\dot{x}(t)$ è sfasata di $\pi/2$ in anticipo rispetto allo spostamento $x(t)$ e per questo motivo si dice in quadratura con questo.

L'accelerazione $\ddot{x}(t)$ del moto armonico si ottiene derivando rispetto al tempo la $\dot{x}(t)$:

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= d^2x/dt^2 = -X\omega^2 \cos(\omega t + \phi_0) = \\ &= X\omega^2 \cos(\omega t + \phi_0 + \pi)\end{aligned}\quad (5.3-4)$$

Da questa relazione si deduce che l'accelerazione $\ddot{x}(t)$ del moto armonico è ancora una grandezza armonica di pulsazione ω , sfasata di π rispetto a $x(t)$ (in opposizione di fase rispetto a x) e di ampiezza $\omega^2 X$.

5.4 Rappresentazione vettoriale di un moto armonico

Come qualsiasi altra grandezza armonica, il moto armonico (5.3-1) può essere rappresentato da un vettore rotante con velocità angolare pari alla pulsazione ω e di modulo uguale all'ampiezza X del moto armonico. Infatti se, come in fig.5.4-1, si traccia un vettore di modulo X e si immagina che tale vettore ruoti in verso antiorario con velocità angolare ω , in ogni istante la posizione del vettore sarà individuata dall'angolo $(\omega t + \phi_0)$, che il vettore stesso forma con l'asse v , e la proiezione del vettore rotante sullo stesso asse coincide con il moto armonico (5.3-1).

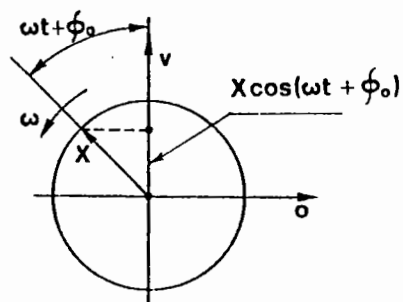


Fig.5.4-1

Si può concludere quindi che il vettore rotante con velocità angolare ω e di modulo X può rappresentare il moto armonico (5.3-1), nel senso che la proiezione di questo vettore sull'asse v coincide con il moto armonico assegnato.

È da osservare che all'istante iniziale $t = 0$ il vettore rotante risulterà spostato o sfasato rispetto all'asse v di un angolo pari alla fase iniziale ϕ_0 (v. fig.5.4-2).

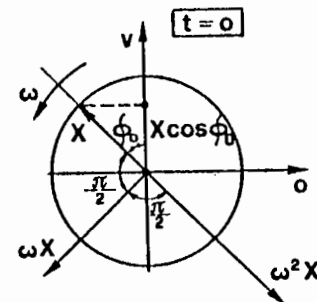


Fig.5.4-2

Tenendo presente che la velocità $\dot{x}(t)$ e l'accelerazione $\ddot{x}(t)$ del moto armonico $x(t)$, definiti dalla (5.3-1), sono grandezze armoniche rappresentate dalle (5.3-3) e (5.3-4) rispettivamente, si può concludere che tali grandezze sono rappresentate da due vettori rotanti (v. fig.5.4-2) con velocità ω , sfasati di $\pi/2$ e π rispetto al vettore X , e di modulo rispettivamente uguale a ωX ed $\omega^2 X$.

È da osservare che, poiché i tre vettori X , ωX ed $\omega^2 X$ ruotano tutti con la stessa velocità angolare ω , la loro posizione relativa non cambia durante la rotazione e quindi il vettore velocità ed il vettore accelerazione risultano sempre in quadratura ed in opposizione di fase col vettore X .

L'utilità della rappresentazione vettoriale di una grandezza armonica sarà messa in evidenza nei paragrafi successivi.

5.5 Composizione di due moti armonici diretti secondo lo stesso asse: battimenti

Si considerino due moti armonici $x_1(t)$ ed $x_2(t)$, definiti dalle relazioni:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= X_1 \cos(\omega_1 t + \phi_{0,1}) \\ x_2(t) &= X_2 \cos(\omega_2 t + \phi_{0,2})\end{aligned}\quad (5.5-1)$$

Il moto $s(t)$, somma dei due moti armonici suddetti, risulta dato da:

$$\begin{aligned}s(t) &= x_1(t) + x_2(t) = \\ &= X_1 \cos(\omega_1 t + \phi_{0,1}) + X_2 \cos(\omega_2 t + \phi_{0,2})\end{aligned}\quad (5.5-2)$$

Se un punto materiale si muove lungo un asse x con un moto definito dalla (5.5-2), si dirà che il punto si muove con un moto, che risulta dalla composizione di due moti armonici diretti lungo lo stesso asse x .

Solo se i due moti componenti (5.5-1) hanno la stessa pulsazione ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$) il moto risultante:

$$x(t) = X_1 \cos(\omega t + \phi_{0,1}) + X_2 \cos(\omega t + \phi_{0,2}) \quad (5.5-3)$$

è un moto armonico, caratterizzato, oltre che dalla pulsazione ω , da una ampiezza X e da una fase iniziale ϕ_0 .

Ciò può essere dimostrato sia analiticamente, sviluppando con le formule di trigonometria il secondo membro delle (5.5-3), sia ricorrendo alla rappresentazione vettoriale. Quest'ultima via è la più semplice e quindi è questa che seguiremo.

Rappresentati come in fig.5.5-1 i due vettori rotanti X_1 ed X_2 all'istante $t = 0$, si può determinare graficamente il vettore risultante X , del quale risulta determinata, oltre che il modulo X , anche la fase iniziale ϕ_0 .

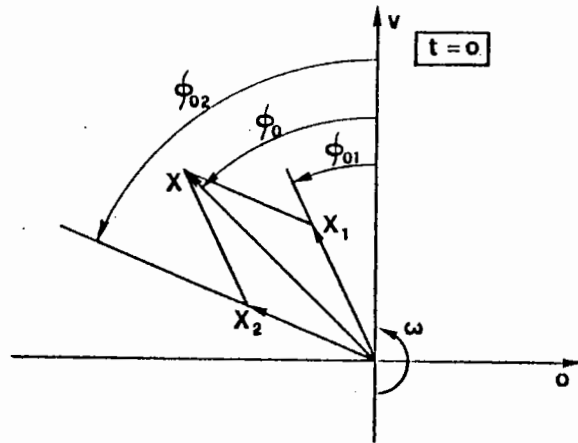


Fig.5.5-1

Dalla fig.5.5-1 si deduce che:

$$X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 \cos(\phi_{0,2} - \phi_{0,1})} \quad (5.5-4)$$

$$\tan \phi_0 = \frac{X \sin \phi_0}{X \cos \phi_0} = \frac{X_1 \sin \phi_{0,1} + X_2 \sin \phi_{0,2}}{X_1 \cos \phi_{0,1} + X_2 \cos \phi_{0,2}}$$

Poiché i due vettori X_1 ed X_2 ruotano alla stessa velocità angolare ω , l'angolo $(\phi_{0,2} - \phi_{0,1})$, compreso tra i due vettori suddetti, non cambia al variare di t e quindi il vettore X , ruotando con la stessa velocità angolare ω , avrà una posizione rispetto ai due vettori X_1 ed X_2 costante e quindi modulo X costante e dato dalla prima delle (5.5-4).

Da quanto detto si deduce che in ogni istante $t > 0$ la somma delle proiezioni sull'asse v dei due vettori X_1 ed X_2 è uguale alla proiezione sullo stesso asse del vettore risultante e quindi:

$$x(t) = X_1 \cos(\omega t + \phi_{0,1}) + X_2 \cos(\omega t + \phi_{0,2}) = X \cos(\omega t + \phi_0) \quad (5.5-5)$$

con X e ϕ_0 dati dalle (5.5-4).

La (5.5-5) esprime che la somma dei due moti armonici x_1 ed x_2 di uguale pulsazione ω è un moto armonico della stessa pulsazione, caratterizzato dai valori di X e ϕ_0 dati dalle (5.5-4).

Se le pulsazioni ω_1 ed ω_2 dei due moti armonici $x_1(t)$ ed $x_2(t)$ sono diverse, il moto risultante non è un moto armonico: basta a questo proposito considerare che i due vettori X_1 ed X_2 , ruotando a velocità angolari diverse, daranno luogo ad un vettore risultante il cui modulo non è più costante ma è variabile con t .

In questo caso il moto risultante, oltre che non essere armonico, non è in genere neanche periodico: ciò avviene se le pulsazioni ω_1 ed ω_2 non sono commensurabili, cioè se il loro rapporto non è un numero razionale.

Se invece risulta:

$$\omega_1/\omega_2 = f_1/f_2 = T_2/T_1 = k_1/k_2 \quad (5.5-6)$$

con k_1 e k_2 due numeri interi e primi tra loro, il moto risultante $x(t)$ è periodico di periodo T dato da:

$$T = k_1 T_1 = k_2 T_2 = k_1 \cdot 2\pi/\omega_1 = k_2 \cdot 2\pi/\omega_2 \quad (5.5-7)$$

Infatti al tempo $(t + T)$ il moto risultante $x(t)$ è dato per la (5.5-2) e le (5.5-1) da:

$$\begin{aligned} x(t + T) &= X_1 \cos[\omega_1(t + T) + \phi_{0,1}] + X_2 \cos[\omega_2(t + T) + \phi_{0,2}] = \\ &= X_1 \cos(\omega_1 t + k_1 \cdot 2\pi + \phi_{0,1}) + X_2 \cos(\omega_2 t + k_2 \cdot 2\pi + \phi_{0,2}) = \\ &= X_1 \cos(\omega_1 t + \phi_{0,1}) + X_2 \cos(\omega_2 t + \phi_{0,2}) = \\ &= x(t) \end{aligned} \quad (5.5-8)$$

Se a titolo di esempio supponiamo che sia:

$$f_1 = 2.5 \text{ Hz} \quad ; \quad f_2 = 1.5 \text{ Hz} \quad (5.5-9)$$

si avrà:

$$\omega_1/\omega_2 = f_1/f_2 = T_2/T_1 = 2.5/1.5 = 5/3 = k_1/k_2$$

Le grandezze ω_1 ed ω_2 sono quindi commensurabili ed il moto risultante è periodico di periodo:

$$T = k_1 T_1 = k_2 T_2 = 5/2.5 = 3/1.5 = 2 \text{ s}$$

È da notare che se le frequenze f_1 ed f_2 variano di poco rispetto ai valori dati dalle (5.5-9), cioè se, ad es., risulta:

$$f_1 = 2.55 \text{ Hz} \quad ; \quad f_2 = 1.55 \text{ Hz}$$

le due grandezze f_1 ed f_2 (e quindi ω_1 ed ω_2) risultano ancora commensurabili essendo:

$$\omega_1/\omega_2 = f_1/f_2 = T_2/T_1 = 2.55/1.55 = 51/31 = k_1/k_2$$

ma il periodo T del moto risultante si allunga notevolmente, passando dal valore di 2 s al valore:

$$T = k_1 T_1 = k_2 T_2 = 51/2.55 = 31/1.55 = 20 \text{ s}$$

Un interessante fenomeno si verifica se i due moti armonici hanno pulsazioni ω_1 ed ω_2 poco differenti tra loro, cioè se il valore:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega} \quad (5.5-10)$$

è molto piccolo, essendo $\omega \approx \omega_1 \approx \omega_2$.

Il moto risultante $x(t)$ può scriversi:

$$x(t) = X_1 \cos[(\omega_2 - \Delta\omega)t + \phi_{0,1}] + X_2 \cos(\omega_2 t + \phi_{0,2}) \quad (5.5-11)$$

Se per semplicità assumiamo come istante iniziale quello per il quale risulta:

$$\phi_{0,1} = \phi_{0,2} = 0$$

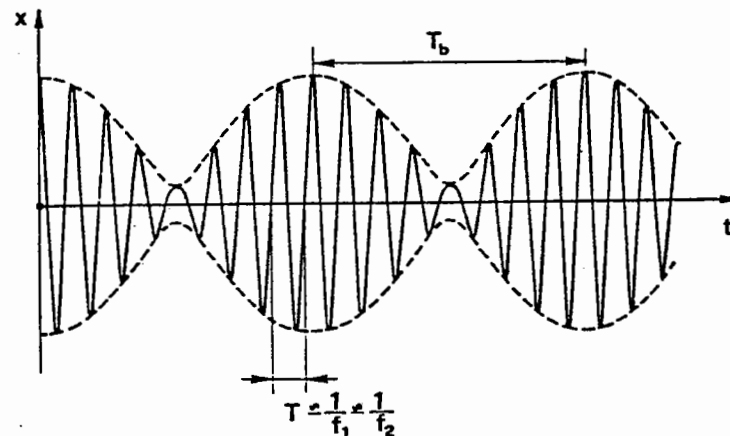


Fig.5.5-2

la (5.5-11) può scriversi:

$$\begin{aligned} x(t) &= X_1 \cos \omega_2 t \cos \Delta\omega t + X_1 \sin \omega_2 t \sin \Delta\omega t + X_2 \cos \omega_2 t = \\ &= (X_1 \cos \Delta\omega t + X_2) \cos \omega_2 t + X_1 \sin \Delta\omega t \sin \omega_2 t = \\ &= (X_1 \cos \Delta\omega t + X_2) \cos \omega_2 t + X_1 \sin \Delta\omega t \cos(\omega_2 t - \pi/2) \quad (5.5-12) \end{aligned}$$

Da questa relazione si deduce che il moto $x(t)$ può essere considerato, nelle ipotesi fatte ($\Delta\omega/\omega \ll 1$), come risultante di due moti di pulsazione $\omega_2 (\approx \omega_1)$, sfasati tra loro di $\pi/2$, di ampiezza X data da:

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{(X_1 \cos \Delta\omega t + X_2)^2 + X_1^2 \sin^2 \Delta\omega t} = \\ &= \sqrt{X_1^2 \cos^2 \Delta\omega t + X_2^2 + 2X_1 X_2 \cos \Delta\omega t + X_1^2 \sin^2 \Delta\omega t} = \\ &= \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1 X_2 \cos \Delta\omega t} \quad (5.5-13) \end{aligned}$$

L'ampiezza X del moto risultante non è quindi costante, ma varia periodicamente con t tra i valori $(X_1 + X_2)$ e $(X_1 - X_2)$: il periodo T_b di questa funzione periodica è dato da:

$$T_b = 2\pi/\Delta\omega = 2\pi/(\omega_2 - \omega_1) = 1/(f_2 - f_1) \quad (5.5-14)$$

Il fenomeno descritto prende il nome di battimento ed è caratterizzato da un moto risultante rappresentato in fig.5.5-2.

5.6 Composizione di due moti armonici diretti secondo assi ortogonali

Consideriamo il sistema rappresentato in fig.5.6-1, costituito da una massa m vincolata al telaio T mediante quattro molle di eguale rigidità K , disposte come in figura.

Se la massa m , inizialmente in quiete, viene "spostata" lungo l'asse x e quindi lasciata libera, essa compie lungo questo asse una oscillazione libera che, nell'ipotesi di smorzamenti trascurabili, può considerarsi armonica e quindi definita dalla legge:

$$x(t) = X \cos(\omega_n t + \phi_{0,x}) \quad (5.6-1)$$

Come si dimostrerà nel par.5.12 il valore di ω_n dipenderà dalle caratteristiche (m e K) del sistema, mentre X e $\phi_{0,x}$, oltre che da ω_n , dipenderanno dalle condizioni iniziali, cioè dallo spostamento e dalla velocità impressi alla massa m all'istante $t = 0$.

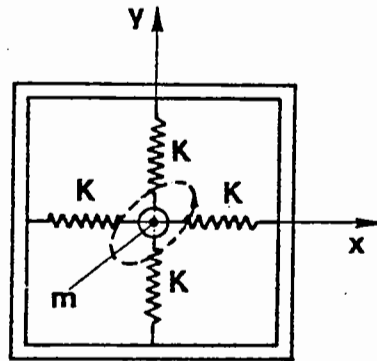


Fig.5.6-1

Analogamente se la massa m viene inizialmente "spostata" lungo l'asse y , essa compie una oscillazione armonica $y(t)$ rappresentabile dalla legge:

$$y(t) = Y \cos(\omega_n t + \phi_{0,y}) \quad (5.6-2)$$

Le due oscillazioni suddette, mentre avranno ampiezze (X ed Y) e fasi iniziali ($\phi_{0,x}$ e $\phi_{0,y}$) in genere diverse, sono però caratterizzate dall'aver la stessa pulsazione ω_n .

Se la massa m viene inizialmente "spostata" lungo un asse diverso da x ed y , ma contenuto nel piano xy , la massa m descriverà una traiettoria in genere ellittica con un periodo $T = 2\pi/\omega_n$; tale traiettoria risulterà dalla composizione dei due moti armonici (5.6-1) e (5.6-2), diretti secondo assi ortogonali.

È evidente che se le due coppie di molle vengono sostituite con due coppie di rigidità diversa, i due moti $x(t)$ ed $y(t)$ avranno pulsazioni ω_x ed ω_y diverse e la massa m , opportunamente spostata dalla posizione di equilibrio, percorrerà una traiettoria che risulterà dalla composizione di due moti armonici ancora diretti secondo assi ortogonali (x ed y), ma aventi pulsazione diversa.

Le traiettorie si presenteranno, in questo caso più generale, come curve piane piuttosto complesse, che prendono il nome di curve di Lissajous, dal nome del matematico francese che nel secolo scorso (1855) studiò per primo l'andamento di tali curve.

Solo nel caso che le due pulsazioni ω_x ed ω_y siano due grandezze commensurabili il moto risultante è periodico.

In questo caso se, in analogia con quanto detto nel par.5.5, indichiamo con k_x e k_y due numeri interi primi tra loro, potrà porsi:

$$\omega_x/\omega_y = f_x/f_y = T_y/T_x = k_x/k_y \quad (5.6-3)$$

ed il moto piano, risultante dei due moti:

$$\begin{aligned} x(t) &= X \cos(\omega_x t + \phi_{0,x}) \\ y(t) &= Y \cos(\omega_y t + \phi_{0,y}) \end{aligned} \quad (5.6-4)$$

risulterà periodico di periodo $T = k_x T_x = k_y T_y$; la traiettoria risulterà una curva chiusa, percorsa periodicamente ad intervalli di tempo pari a T .

Limitando l'esame al caso più semplice di composizione di moti armonici della stessa pulsazione ω :

$$\begin{aligned} x(t) &= X \cos(\omega t + \phi_{0,x}) \\ y(t) &= Y \cos(\omega t + \phi_{0,y}) \end{aligned} \quad (5.6-5)$$

vedremo come sia possibile determinare, in funzione delle grandezze X , Y , $\phi_{0,x}$, $\phi_{0,y}$, la traiettoria risultante dei due moti armonici.

Nel caso in cui i due moti sono in fase tra loro, cioè se è:

$$\phi_{0,x} = \phi_{0,y} = \phi_0 \quad (5.6-6)$$

dalle (5.6-5) si deduce che per qualsiasi valore di t risulta:

$$x/y = X/Y$$

e quindi:

$$y = (Y/X)x \quad (5.6-7)$$

La (5.6-7) è l'equazione di una retta passante per l'origine degli assi x, y e di coefficiente angolare Y/X .

Tenendo presente che per le (5.6-5) i valori di x e di y debbono soddisfare alle relazioni:

$$-X \leq x \leq X \quad -Y \leq y \leq Y \quad (5.6-8)$$

si deduce (v. fig.5.6-2,a) che la traiettoria è costituita in questo caso dalla diagonale del rettangolo di lati $2X$ e $2Y$ rispettivamente.

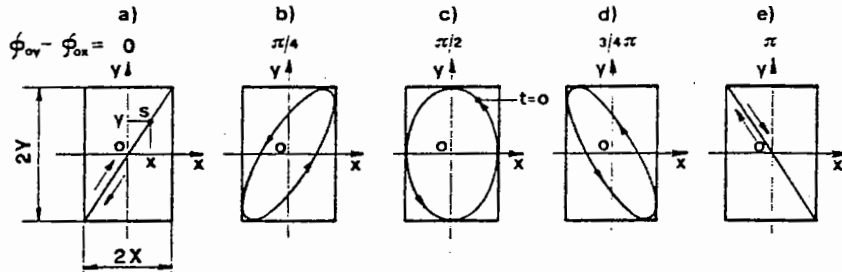


Fig.5.6-2

Tale traiettoria è percorsa con una legge del moto $s(t)$ data da (vedi fig.5.6-2,a):

$$s(t) = \pm \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{X^2 + Y^2} \cos(\omega t + \phi_0) \quad (5.6-9)$$

Da questa relazione si deduce che il punto si sposta lungo la diagonale del rettangolo con legge armonica di pulsazione ω , percorrendola nei due sensi (5.6-2,a).

Se i due moti sono in quadratura, cioè se risulta:

$$\Delta\phi = \phi_{0,x} - \phi_{0,y} = \pm\pi/2 \quad (5.6-10)$$

i due moti armonici avranno le espressioni:

$$\begin{aligned} x(t) &= X \cos(\omega t + \phi_{0,x}) \\ y(t) &= Y \cos(\omega t + \phi_{0,x} \mp \pi/2) = \pm Y \sin(\omega t + \phi_{0,x}) \end{aligned} \quad (5.6-11)$$

che possono essere scritte:

$$\begin{aligned} x/X &= \cos(\omega t + \phi_{0,x}) \\ y/Y &= \pm \sin(\omega t + \phi_{0,x}) \end{aligned} \quad (5.6-12)$$

Quadrando e sommando le (5.6-12) si ottiene l'equazione della traiettoria:

$$x^2/X^2 + y^2/Y^2 = 1 \quad (5.6-13)$$

Da questa relazione risulta che la traiettoria è un'ellisse di semiassi X ed Y , disposti sugli assi di riferimento x ed y (v. fig.5.6-2,c).

Il verso con il quale la traiettoria viene descritta dipende dal segno di $\Delta\phi$ risultando:

$$\Delta\phi = \phi_{0,x} - \phi_{0,y} = \begin{cases} \pi/2 \rightarrow \text{antiorario} \\ -\pi/2 \rightarrow \text{orario} \end{cases} \quad (5.6-14)$$

Per convincersi di ciò basta considerare che per $t = 0$ le (5.6-11) si scrivono:

$$\begin{aligned} x(0) &= X \cos \phi_{0,x} \\ y(0) &= \pm Y \sin \phi_{0,x} \end{aligned} \quad (5.6-15)$$

Per $\Delta\phi = \pi/2$ e $0 < \phi_{0,x} < \pi/2$, all'istante $t = 0$ il punto si trova dunque nel primo quadrante (v. fig.5.6-2,c) ed al crescere di t , decrescendo la x e crescendo la y , il punto si muove in senso antiorario.

Per $\Delta\phi = -\pi/2$ e $0 < \phi_{0,x} < \pi/2$, all'istante $t = 0$ il punto si trova nel quarto quadrante, ed al crescere di t , decrescendo la x e la y , il punto si muove in verso orario.

Se i due moti x ed y sono in opposizione di fase, risulta:

$$\Delta\phi = \phi_{0,x} - \phi_{0,y} = \pm\pi \quad (5.6-16)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} x(t) &= X \cos(\omega t + \phi_{0,x}) \\ y(t) &= Y \cos(\omega t + \phi_{0,x} \pm \pi) = -Y \cos(\omega t + \phi_{0,x}) \end{aligned} \quad (5.6-17)$$

Dividendo membro a membro le (5.6-17), si ottiene:

$$x/y = -X/Y$$

e la traiettoria coincide con la diagonale a tangente negativa del rettangolo di lati $2X$ e $2Y$ e di centro O .

Anche in questo caso il punto si muove sulla diagonale con legge armonica:

$$s(t) = \pm \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{X^2 + Y^2} \cos(\omega t + \phi_{0,x})$$

percorrendola nei due sensi (v. fig.5.6-2,e).

Per $0 < \Delta\phi < \pi/2$, l'ellisse risulterà sempre inscritta nel rettangolo di lati $2X$ e $2Y$, e, partendo dalla condizione $\Delta\phi = 0$, che si può considerare caratterizzata da un'ellisse con uno dei due semiassi di lunghezza zero, presenterà tale semiassie crescente e l'altro decrescente con $\Delta\phi$ ed i semiassi stessi ruotanti in senso antiorario fino a disporsi secondo gli assi di riferimento x, y per $\Delta\phi = \pi/2$ (fig.5.6-2,c).

Per $\pi/2 < \Delta\phi < \pi$, partendo in questo caso dalla condizione di fig.5.6-2,c), l'ellisse, ruotando sempre inscritta nel rettangolo di lati $2X$ e $2Y$, tende con continuità, al variare di $\Delta\phi$, alla configurazione di ellisse degenera, rappresentata in fig.5.6-2,e).

In alcune applicazioni tecniche si presenta spesso il problema inverso di quello descritto: in questi casi, infatti, nota la traiettoria di un punto, è necessario conoscere le ampiezze X ed Y e la differenza di fase $\Delta\phi$ dei due moti armonici componenti.

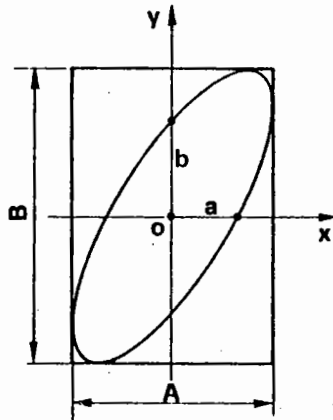


Fig.5.6-3

In questi casi, tracciato (v. fig.5.6-3) il rettangolo che inscrive la traiettoria nota e misurate le lunghezze A e B , dei due lati di questo rettangolo, i valori di X ed Y saranno dati da:

$$X = A/2 \quad ; \quad Y = B/2$$

La differenza di fase $\Delta\phi$ si determina con la relazione:

$$|\Delta\phi| = \arcsin[b/(B/2)] = \arcsin[a/(A/2)] \quad (5.6-18)$$

essendo a e b (v. fig.5.6-3) le lunghezze dei segmenti compresi tra l'origine O degli assi x ed y e le intersezioni di questi con l'ellisse. La (5.6-18) si giustifica osservando che i due moti componenti possono essere espressi dalle relazioni:

$$x(t) = X \cos(\omega t + \phi_{0,x}) \quad (5.6-19)$$

$$y(t) = Y \cos(\omega t + \phi_{0,y} - \Delta\phi)$$

con:

$$\Delta\phi = \phi_{0,x} - \phi_{0,y}$$

e che le intersezioni dell'ellisse, per es. con l'asse y , si ottengono per:

$$\omega t + \phi_{0,x} = \pi/2 \quad (5.6-20)$$

Agli istanti t definiti da questa relazione risulta infatti:

$$x(t) = 0$$

$$y(t) = Y \cos(\pi/2 - \Delta\phi) = Y \sin \Delta\phi = \pm b$$

e quindi:

$$|\Delta\phi| = \arcsin(b/Y) = \arcsin[b/(B/2)]$$

Il segno di $\Delta\phi$ resta definito dal verso col quale l'ellisse viene descritta, risultando, per quanto è stato detto:

$$\Delta\phi > 0 \quad \text{verso antiorario}$$

$$\Delta\phi < 0 \quad \text{verso orario}$$

È opportuno osservare che per ellissi orientate come in fig.5.6-2,d) risulta $\Delta\phi = -\arcsin[b/(B/2)]$.

Se le ampiezze dei due moti armonici sono uguali:

$$X = Y = R$$

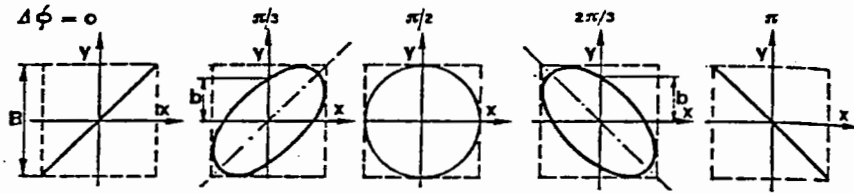


Fig.5.6-4

le curve di Lissajous si presentano come in fig.5.6-4; nel caso particolare in cui $\Delta\phi = \pi/2$ la curva è una circonferenza.

5.7 Analisi armonica

Una funzione periodica $f(t)$ (v. fig.5.7-1) di periodo T :

$$f(t) = f(t + T) \tag{5.7-1}$$

se soddisfa ad alcune condizioni (condizioni di Dirichlet) certamente verificate in tutti i problemi meccanici, può essere sviluppata nella serie di Fourier:

$$f(t) = A_0 + \sum_1^{\infty} n A_n \cos(n\omega t + \phi_{0,n}) \tag{5.7-2}$$

può essere cioè decomposta in un termine costante A_0 ed in una serie di funzioni armoniche di ampiezza A_n , di pulsazione $n\omega$ e di fase iniziale $\phi_{0,n}$.

La (5.7-2) esprime il concetto abbastanza intuitivo che l'andamento della funzione $f(t)$, rappresentato in fig.5.7-1,a) può essere "ottenuto" a meno del valore costante A_0 , mediante la somma di infinite funzioni armoniche f_n (v. fig.5.7-1,b) in genere indicate come componenti armoniche o armoniche di $f(t)$, ciascuna di periodo:

$$T_n = 2\pi/n\omega \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

di opportuna ampiezza A_n e che tale risultato si raggiunge sfasando opportunamente tra loro le varie armoniche f_n .

Quest'ultima circostanza non è stata, per semplicità, rappresentata in fig.5.7-1, dove tutte le armoniche sono inizialmente in fase tra loro. L'importanza pratica della serie di Fourier risiede nel fatto che, noto il periodo T della funzione periodica, risulta determinato il valore della pulsazione fondamentale ω :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

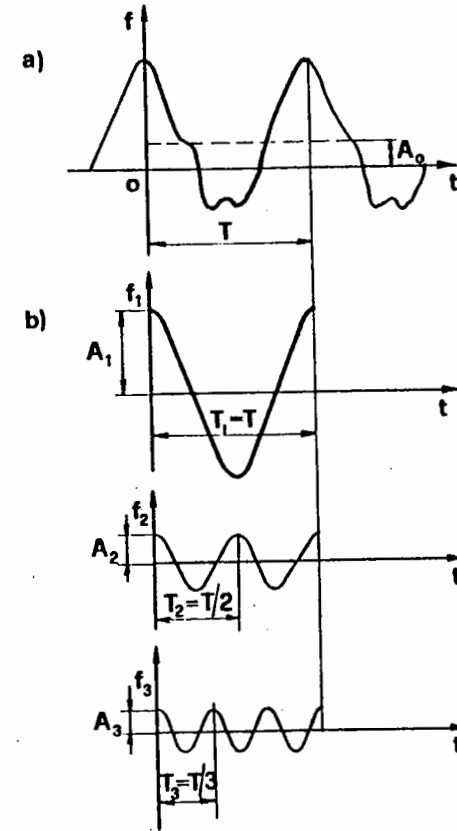


Fig.5.7-1

e risultano ovviamente determinati i valori delle pulsazioni di tutte le altre armoniche della serie.

Tenendo presente che:

$$A_n \cos(n\omega t + \phi_{0,n}) = A_n (\cos n\omega t \cdot \cos \phi_{0,n} - \sin n\omega t \sin \phi_{0,n}) = a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \tag{5.7-2}$$

con:

$$a_n = A_n \cos \phi_{0,n} \quad ; \quad b_n = -A_n \sin \phi_{0,n} \tag{5.7-3}$$

e quindi:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad ; \quad \tan \phi_{0,n} = -b_n/a_n \tag{5.7-4}$$

la serie di Fourier (5.7-2) può scriversi:

$$f(t) = A_0 + \sum_1^{\infty} n (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (5.7-5)$$

I due modi (5.7-2) e (5.7-5) di esprimere la serie di Fourier sono equivalenti e dall'una all'altra espressione si passa mediante le (5.7-3) o le (5.7-4).

Posto:

$$x = \omega t$$

risulta:

$$\omega T = 2\pi$$

e la (5.7-5) può essere scritta:

$$f(x) = f(x + 2\pi) = A_0 + \sum_1^{\infty} n (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (5.7-6)$$

Le costanti a_n e b_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) che definiscono, a meno di A_0 , la serie a secondo membro della (5.7-6), prendono il nome di coefficienti di Fourier: essi dipendono evidentemente da $f(x)$ e le relazioni che li legano ad $f(x)$ possono essere facilmente determinate.

Integrando infatti la (5.7-6) tra 0 e 2π ed osservando che per qualsiasi valore di n è:

$$\int_0^{2\pi} \cos nx dx = \int_0^{2\pi} \sin nx dx = 0 \quad (5.7-7)$$

si ottiene:

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} A_0 dx = 2\pi A_0$$

dalla quale si deduce che:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad (5.7-8)$$

Questa relazione sta a indicare che la costante A_0 non è altro che il valor medio della funzione $f(x)$ (v. fig. 5.7-1, a).

Moltiplicando primo e secondo membro della (5.7-6) per $\cos nx$ ed integrando tra 0 e 2π si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx &= A_0 \int_0^{2\pi} \cos nx dx + \\ &+ \int_0^{2\pi} \sum_1^{\infty} m (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \cos nx dx \end{aligned} \quad (5.7-9)$$

Osservando che oltre alle (5.7-7) risulta:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos nx \sin nx dx &= \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx dx = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx dx = 0 \quad (n \neq m) \end{aligned} \quad (5.7-10)$$

dalla (5.7-9) si deduce che:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = a_n \int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx = a_n \pi$$

e quindi:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \quad (5.7-11)$$

Analogamente, moltiplicando primo e secondo membro della (5.7-6) per $\sin nx$ e tenendo presente che, oltre alle (5.7-7) e (5.7-10), risulta anche:

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx dx = 0 \quad (n \neq m) \quad (5.7-12)$$

si deduce che:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = b_n \int_0^{2\pi} \sin^2 nx dx = b_n \pi$$

e quindi:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \quad (5.7-13)$$

Le (5.7-8), (-11) e (-13) sono le relazioni che legano i coefficienti di Fourier alla funzione periodica $f(x)$.

Se è nota l'espressione analitica di $f(x)$ le suddette relazioni permettono il calcolo di A_0 e dei coefficienti di Fourier: tale procedimento prende il nome di analisi armonica di una funzione periodica $f(x)$.

È molto frequente però il caso in cui della funzione $f(x)$ non è nota l'espressione analitica, ma è nota invece solo la rappresentazione grafica.

In questi casi gli integrali, che figurano al secondo membro delle (5.7-8), (-11) e (-13), vengono calcolati in modo approssimato come sommatorie.

Si ricorda a questo proposito che per una funzione (reale e continua) $\phi(x)$ (v. fig.5.7-2), indicata con A l'area ($A_1 + A_3 - A_2$) risulta:

$$A = \int_0^{2\pi} \phi(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_0^{z-1} \phi(x_i) \Delta x_i$$

con:

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = 2\pi/z = \text{cost}$$

$$z = \text{numero degli intervalli uguali } \Delta x.$$

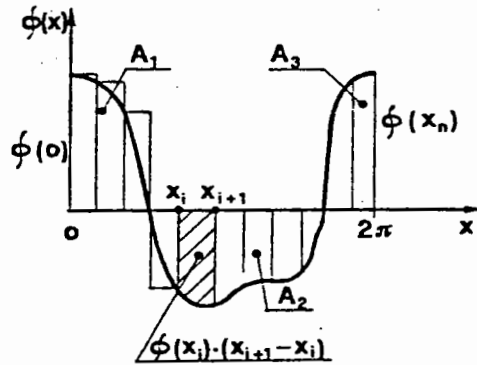


Fig.5.7-2

Per z sufficientemente grande si può quindi ritenere che:

$$A = \int_0^{2\pi} \phi(x) dx \approx \sum_0^{z-1} \phi(x_i) \Delta x \quad (5.7-14)$$

In pratica, noto il grafico di $f(x)$, si suddivide l'intervallo $(0, 2\pi)$ in $2r$ parti uguali (v. fig.5.7-3) di lunghezza Δx :

$$\Delta x = 2\pi/2r = \pi/r \quad (5.7-15)$$

e si leggono i valori (y_1, y_2, \dots, y_{2r}) della funzione agli estremi di questi intervalli.

Si potrà così scrivere:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 & y_0 \\ x_1 &= \pi/r & y_1 \\ x_2 &= 2\pi/r & y_2 \\ &\dots\dots & \\ x_q &= q\pi/r & y_q \\ &\dots\dots & \\ x_{2r-1} &= (2r-1)\pi/r & y_{2r-1} \\ x_{2r} &= 2\pi & y_{2r} = y_0 \end{aligned} \quad (5.7-16)$$

Dalle (5.7-8), (-11) e (-13), tenendo presente la relazione (5.7-14), si ottiene:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \approx \frac{1}{2\pi} \sum_0^{2r-1} y_q \Delta x = \frac{1}{2r} \sum_0^{2r-1} y_q \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \approx \frac{1}{\pi} \sum_0^{2r-1} y_q \cos\left(nq \frac{\pi}{r}\right) \Delta x = \\ &= \frac{1}{r} \sum_0^{2r-1} y_q \cos\left(nq \frac{\pi}{r}\right) \quad (5.7-17) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \approx \frac{1}{\pi} \sum_0^{2r-1} y_q \sin\left(nq \frac{\pi}{r}\right) \Delta x = \\ &= \frac{1}{r} \sum_0^{2r-1} y_q \sin\left(nq \frac{\pi}{r}\right) \end{aligned}$$

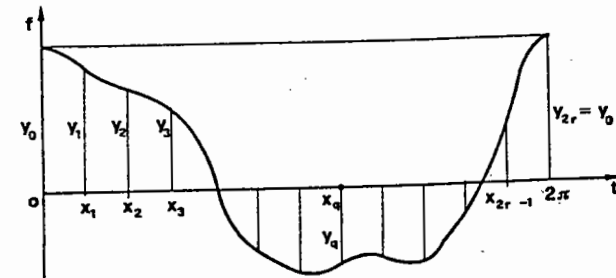


Fig.5.7-3

Le (5.7-17), noti i valori di $y_q [q = 0, 1, \dots, (2r - 1)]$, permettono il calcolo del valor medio A_0 della funzione $f(x)$ e dei coefficienti di Fourier a_n e b_n .

Il numero $2r$ viene in genere fissato pari a 12, 24, 48 ed in questi casi si parla di analisi armonica a 12, 24 ovvero 48 ordinate.

In ogni caso le (5.7-17) permettono il calcolo, oltre che di A_0 , di $(2r - 1)$ coefficienti di Fourier: $a_1, b_1; a_2, b_2; \dots, a_r$, risultando per le (5.7-17) con $r = n$:

$$b_r = \frac{1}{r} \sum_0^{2r-1} q y_q \sin q\pi = 0 \quad (5.7-18)$$

È infine opportuno notare che, una volta calcolati nel modo descritto i coefficienti di Fourier della funzione $f(x)$, della quale si conosceva solo il diagramma, si possiede con la (5.7-6) anche l'espressione analitica, che risulta evidentemente tanto meglio approssimata quanto più grande è r .

5.8 Fenomeni vibratorii fondamentali

Lo studio delle vibrazioni di un sistema meccanico ha come scopo la determinazione della legge del moto del sistema stesso.

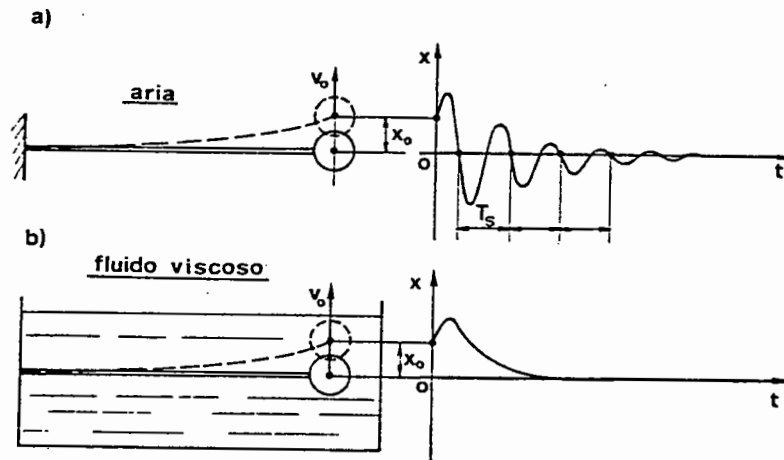


Fig. 5.8-1

Il moto del sistema si dice libero se esso viene eccitato da assegnate condizioni iniziali (velocità e spostamenti iniziali), si dice invece forzato, se

esso viene eccitato da un'assegnata causa forzante, che agisce con continuità sul sistema stesso.

L'esperienza mette in evidenza che, se un sistema meccanico viene eccitato ad oscillare liberamente, esso si comporta in modo diverso al variare delle azioni smorzanti.

Così ad es. il sistema di fig. 5.8-1, costituito da un'asta di acciaio, incastrata ad un estremo e che porta all'altro estremo una massa m , si comporta in modo diverso a seconda che il mezzo che lo circonda sia aria ovvero un liquido molto viscoso.

Nel primo caso il sistema, spostato dalla posizione di equilibrio statico ($x = \dot{x} = 0$) di una quantità x_0 (spostamento iniziale) ed inizialmente ($t = 0$) animato da una velocità v_0 (velocità iniziale), compie una oscillazione libera, che si estingue dopo un certo tempo: il moto libero è in questo caso un'oscillazione libera smorzata.

Se in qualche modo si registra il moto libero della massa m , la legge del moto risulta caratterizzata (v. fig. 5.8-1, a) dal fatto che la massa m passa per la posizione di equilibrio statico ($x = 0$) ad intervalli di tempo T_s , praticamente uguali.

Il moto presenta una delle caratteristiche del moto armonico, la costanza del periodo T_s , mentre l'ampiezza delle successive oscillazioni non è, come nel moto armonico, costante, ma decrescente col tempo: per questo motivo l'oscillazione libera smorzata di fig. 2.5-1 viene anche indicata come moto armonico o periodico smorzato di pulsazione $\omega_s = 2\pi/T_s$.

Se il sistema è immerso in un fluido opportunamente viscoso (v. fig. 5.8-1, b) ed il moto viene eccitato con le stesse condizioni iniziali x_0 e v_0 , il moto libero $x(t)$ non ha più un andamento periodico e viene pertanto detto moto aperiodico: anche in questo caso il moto si estingue dopo un certo tempo ed il sistema ritorna nella posizione di equilibrio statico ($x = \dot{x} = 0$).

Variando quindi la viscosità del fluido, nel quale il sistema di fig. 5.8-1 è immerso, lo smorzamento agente sul sistema varia ed il moto libero passa da un moto periodico smorzato ad un moto aperiodico: lo smorzamento, per il quale questa condizione si verifica, viene detto smorzamento critico.

Se sulla massa m (v. fig. 5.8-2) agisce una forza armonica $F_0 \cos \omega t$, il moto del sistema è forzato e, dopo un periodo iniziale t_s , si presenta come un moto armonico di pulsazione uguale alla pulsazione ω dell'azione forzante $F_0 \cos \omega t$ (v. fig. 5.8-2, a).

L'andamento di $x(t)$ nel periodo iniziale t_s viene detto transitorio iniziale: il moto $x(t)$ durante questo periodo è composto dal moto armonico forzato $x_f(t)$ (v. fig. 5.8-2, b) e dall'oscillazione libera $x_l(t)$, che - nell'ipotesi di

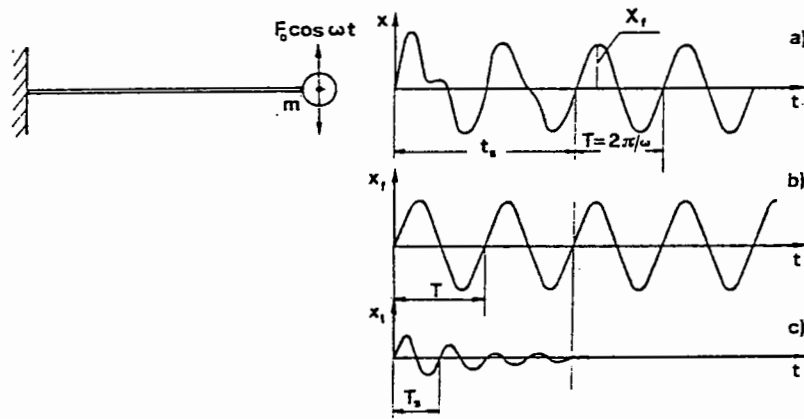


Fig.5.8-2

smorzamento inferiore a quello critico - si presenta come un moto periodico smorzato (v. fig.5.8-2,c); durante tale periodo risulterà quindi:

$$x(t) = x_i(t) + x_f(t)$$

Se, tenendo costante il valore dell'ampiezza F_0 , si fa variare con continuità la pulsazione ω della forza eccitante in un intervallo (ω_1, ω_2) , che comprenda il valore della pulsazione ω_s , l'ampiezza X dell'oscillazione forzata diventa massima quando $\omega \approx \omega_s$: questo fenomeno prende il nome di risonanza.

Per $\omega > \omega_s$ l'ampiezza X_f dell'oscillazione forzata decresce con continuità al crescere di ω , sicché per ω molto più grande di ω_s , l'azione forzante $F_0 \cos \omega t$ non è più in grado di eccitare una apprezzabile vibrazione forzata del sistema.

Se si riportano i valori di X_f al variare di ω si otterrà un grafico del tipo di quello riportato in fig.5.8-3,a).

Se il sistema ha uno smorzamento superiore al valore critico, l'esperienza rivela un comportamento sostanzialmente diverso da quello descritto e rappresentato in fig.5.8-3,a).

In questo caso, al crescere della pulsazione ω della causa eccitante, $F_0 \cos \omega t$, l'ampiezza X_f dell'oscillazione armonica forzata decresce con continuità al crescere di ω , sicché l'esperienza non mette in evidenza alcun fenomeno di risonanza (v. fig.5.8-3,b).

L'oscillazione armonica forzata di un sistema può essere eccitata non solo applicando alla massa m una forza armonica $F_0 \cos \omega t$, ma anche imponendo un moto armonico ad uno o più vincoli del sistema stesso.

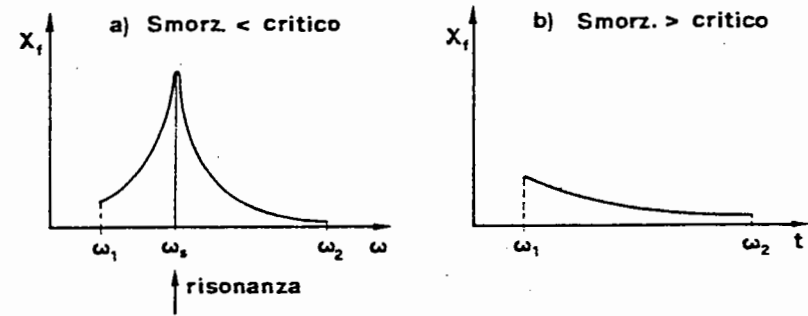


Fig.5.8-3

Così, ad es., nel caso del sistema semplice di fig.5.8-1, l'oscillazione forzata può essere eccitata imponendo alla sezione d'incastro dell'asta metallica un moto armonico $x_k = X_k \cos \omega t$.

In laboratorio l'esperienza può essere effettuata, collegando il sistema ad una vibrodina nel modo schematicamente indicato in fig.5.8-4.

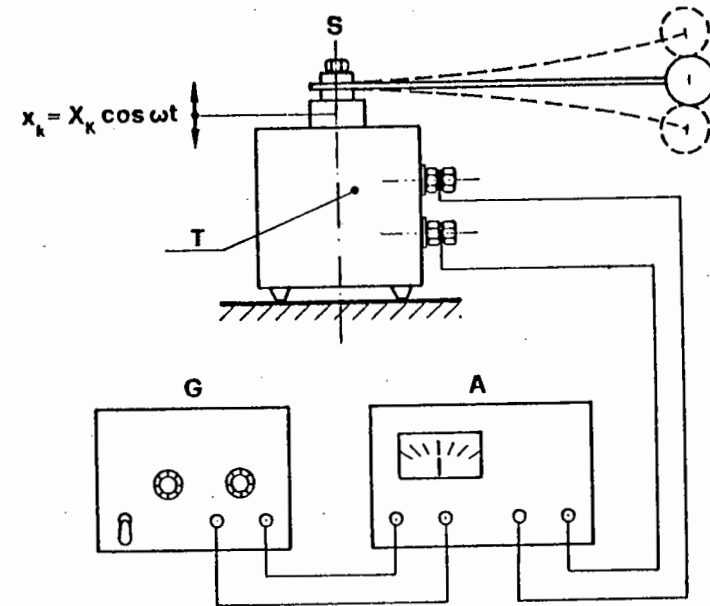


Fig.5.8-4

In questa figura è indicato con G il generatore di segnale e con A l'amplificatore di potenza, necessari ad alimentare il tavolo oscillante T con una corrente alternata (armonica) di ampiezza e frequenza opportune.

Nei prossimi paragrafi i fenomeni esposti verranno studiati, ricorrendo a modelli matematici relativamente semplici.

I risultati qualitativi e quantitativi di questo studio sono in buon accordo con i risultati sperimentali accennati e, pertanto, si dirà che i modelli matematici proposti "interpretano" in maniera soddisfacente la realtà che appare dalla sperimentazione.

5.9 Modelli matematici per sistemi discreti

I fenomeni descritti nel paragrafo precedente mettono in luce alcuni aspetti fondamentali delle vibrazioni meccaniche e sono certamente utili a chiarire concetti generali, come quelli di vibrazione libera e forzata, di condizioni iniziali, di transitorio iniziale e quello, ancora più importante per le applicazioni tecniche, di risonanza.

Per lo studio delle vibrazioni di un sistema come quello rappresentato in fig. 5.8-1, si fanno in genere due serie di ipotesi semplificative, a seconda del grado di approssimazione desiderato.

Con la prima serie di ipotesi semplificative si ritiene che:

- 1°) la massa m sia concentrata (massa puntiforme) all'estremità dell'asta d'acciaio;
- 2°) sia trascurabile, rispetto alla massa m , la massa dell'asta, sicché questa possa essere considerata come un semplice vincolo elastico;
- 3°) questo vincolo elastico eserciti sulla massa m una reazione proporzionale allo spostamento della massa m ;
- 4°) siano trascurabili le azioni smorzanti.

Con queste ipotesi semplificative l'equazione del moto libero del sistema può essere ricavata applicando il principio di d'Alembert, ottenendo in questo modo:

$$m\ddot{x} + Kx = 0 \quad (5.9-1)$$

La (5.9-1) è un'equazione differenziale del secondo ordine, omogenea, a coefficienti (m e K) costanti, lineare.

La soluzione della (5.9-1) viene ricercata con i procedimenti noti dell'analisi matematica e permette di ricavare alcune relazioni fondamentali, che

definiscono in funzione dei parametri m e K del sistema, il moto $x(t)$ della massa m .

È evidente che se il sistema è immerso in un fluido particolarmente viscoso, l'ipotesi 4°) diviene inaccettabile, sicché ad essa si sostituisce una ipotesi, che tiene conto delle azioni smorzanti, ma nel modo più semplice possibile:

- 4°') le azioni smorzanti agenti sul sistema siano esprimibili mediante una unica forza, agente sulla massa concentrata m , proporzionale alla velocità \dot{x} di m .

Con questa seconda serie di ipotesi semplificative l'equazione del moto libero del sistema risulta essere la seguente:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + Kx = 0 \quad (5.9-1')$$

e può essere ottenuta applicando il principio di d'Alembert.

La soluzione della (5.9-1') permette di ottenere risultati più aderenti alla realtà fisica, mettendo in evidenza l'influenza dello smorzamento sul comportamento del sistema.

Il procedimento descritto che, partendo dal sistema reale, consente, attraverso una serie di ipotesi semplificative ed applicando principi generali come quello di d'Alembert, di giungere alla (5.9-1) o alla (5.9-1'), prende il nome di definizione di un modello matematico del fenomeno fisico in esame.

Poiché la soluzione del modello matematico (5.9-1) o (5.9-1') fornisce una legge del moto $x(t)$ in buon accordo con i fenomeni osservati, si dirà che il modello matematico interpreta con sufficiente approssimazione la realtà fisica.

Il procedimento descritto è generale nel senso che qualsiasi fenomeno fisico, sia esso meccanico, elettrico, idraulico, ecc., viene analizzato, ricorrendo alla determinazione di un modello matematico capace di rappresentarlo nei suoi aspetti essenziali.

A questo proposito è opportuno considerare che spesso il passo più difficile nello studio teorico di un fenomeno non è quello della soluzione matematica del modello, ma è invece quello della definizione del modello stesso.

Infatti mentre l'elaborazione matematica del modello richiede la conoscenza di procedimenti di calcolo in genere già noti, per la definizione del modello matematico è necessaria la formulazione di tante ipotesi semplificative, ognuna delle quali impegna l'esperienza, la capacità di giudizio, l'ingegnosità dello studioso.

Da quanto precede si può concludere che:

- 1° il modello matematico non riproduce la realtà fisica, ma la rappresenta in maniera più o meno approssimata;
- 2° lo stesso fenomeno può essere rappresentato da modelli matematici di diversa approssimazione, nel senso che, partendo da un modello, relativamente semplice, si può passare ad un modello matematico via via più sofisticato.

Al crescere del grado di approssimazione, il modello matematico diventa più complesso e la sua elaborazione richiede procedimenti di calcolo più laboriosi.

L'esame del sistema semplice di fig.5.8-1 e delle ipotesi semplificative fatte, permette di introdurre i concetti di discretizzazione e di linearizzazione di un sistema reale.

Il processo di discretizzazione consiste nel sostituire al sistema reale, nel quale massa, elasticità e smorzamento sono distribuiti con continuità, un sistema costituito da masse, elasticità e smorzamento concentrati: il sistema così ottenuto, ed il modello matematico che lo rappresenta, prendono il nome di sistema discreto e di modello matematico discreto oppure di sistema e di modello a parametri (m, σ, K) concentrati.

Il processo di linearizzazione consiste nel considerare le reazioni elastiche e quelle dovute agli smorzamenti, funzioni lineari rispettivamente dello spostamento e della velocità.

Nella pratica tecnica si ricorre quasi sempre a modelli discreti, sia perché con una opportuna discretizzazione si ottengono risultati abbastanza rappresentativi della realtà, sia perché il modello matematico sarà costituito da un sistema di equazioni differenziali ordinarie.

Volendo tener conto della continuità con la quale i suddetti parametri sono distribuiti, ma ricorrendo sempre ad ipotesi semplificative, si perviene a modelli matematici costituiti da sistemi di equazioni nelle derivate parziali, di più difficile integrazione.

Per chiarire alcuni aspetti pratici del processo di discretizzazione supponiamo che in sede di progetto di un impianto destinato alla produzione di energia elettrica si debba studiare il comportamento di una turbina nei riguardi del fenomeno delle vibrazioni flessionali.

In fig.5.9-1 è rappresentato schematicamente l'impianto ed una sezione assiale della turbina.

In fig.5.9-2,a) è rappresentato il rotore della macchina sui relativi supporti.

Supposti questi vincoli rigidi ed assimilabili a due appoggi, in fig.5.9-2,b)

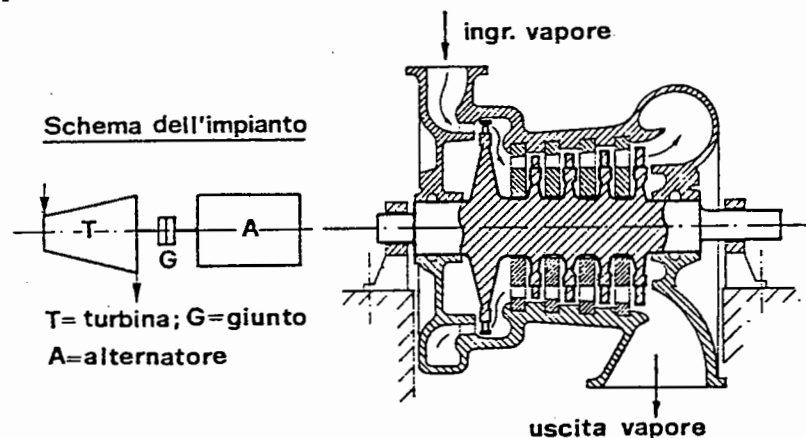


Fig.5.9-1

è rappresentato il sistema discreto ad n masse (a $3n$ parametri m, σ, K) concentrate.

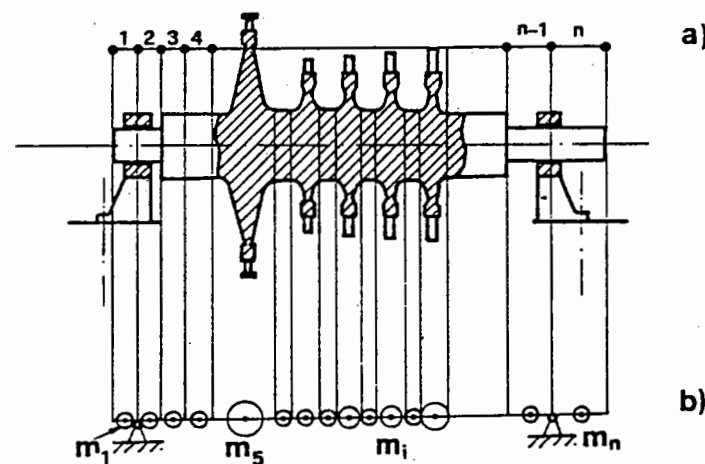


Fig.5.9-2

Questo sistema si ottiene suddividendo il sistema reale in n tronchi, concentrando la massa di ciascun tronco nel baricentro del tronco stesso e collegando le masse così concentrate con elementi elastici, privi di massa e

di elasticità flessionale pari a quella dei tronchi effettivi.

Se si vuole considerare lo smorzamento del sistema, si suppone che su ciascuna massa m_i agisca una forza smorzante, che nella schematizzazione più semplice viene considerata proporzionale alla velocità \dot{x}_i di m_i , secondo un coefficiente costante σ_i .

È evidente che al crescere di n il modello matematico risulta più complesso e meglio interpreta il fenomeno in esame, nel senso che darà informazioni più numerose e più precise sul comportamento dinamico del sistema reale.

A parità di n il modello matematico diventa via via più sofisticato se si introducono in esso elementi che tengono conto della elasticità dei supporti e del fatto che i tronchi sono costituiti da dischi (effetto disco).

Per quanto riguarda la linearizzazione del sistema, essa consiste nel ritenere le reazioni elastiche e smorzanti del sistema proporzionali rispettivamente allo spostamento x_i ed alla velocità \dot{x}_i di ciascuna massa m_i .

Se i coefficienti di proporzionalità sono ritenuti costanti il sistema è detto sistema discreto, lineare, a coefficienti costanti.

Sistemi di questo tipo rappresentano in maniera adeguata il sistema reale, se si considerano vibrazioni di piccola ampiezza.

È interessante osservare che se si trascurano le cause smorzanti il sistema è conservativo ed il modello matematico è costituito da un sistema di n equazioni differenziali lineari, a coefficienti costanti che in forma matriciale possono essere scritte nella forma:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \quad (5.9-2)$$

Se si vuol tener conto, nella maniera più semplice, delle azioni smorzanti, il modello matematico si presenterà nella forma:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [\sigma]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \quad (5.9-2')$$

Vale infine la pena di osservare l'analogia formale esistente tra il modello matematico (5.9-1) e quello (5.9-2), come ancora quella tra il modello (5.9-1') e quello (5.9-2').

5.10 Gradi di libertà di un sistema: coordinate generalizzate

Si consideri un sistema costituito da N masse m_i (v. fig.5.10-1) concentrate in N punti P_i ($i = 1, 2, \dots, N$) e si supponga che le masse del sistema siano collegate, tra loro ed a punti fissi Q_i , mediante vincoli elastici di rigidità K_i .

Se il sistema vibra, la legge del moto del sistema stesso è definita se in ogni istante è nota la posizione delle N masse m_i .

Assunta una terna di riferimento $Oxyz$ la posizione delle N masse m_i è definita se sono note le $3N$ coordinate cartesiane $x_i(t)$, $y_i(t)$, $z_i(t)$. Nel caso in esame si dirà che il sistema ha $3N$ gradi di libertà.

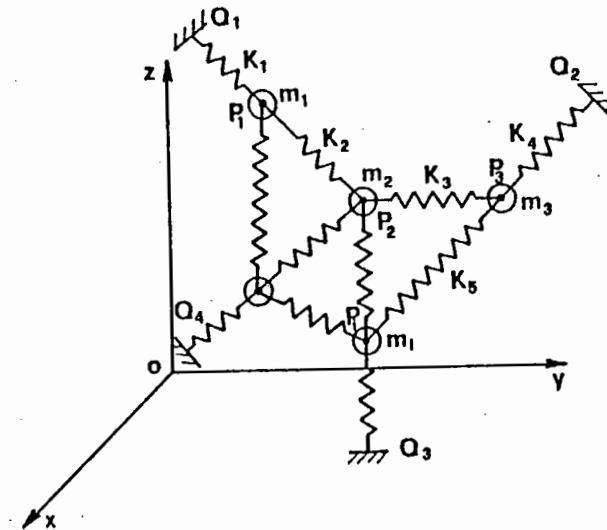


Fig.5.10-1

In alcuni casi è preferibile adottare, al posto delle $3N$ coordinate cartesiane, un altro insieme di $3N$ coordinate indipendenti q_1, q_2, \dots, q_{3N} , che risultano legate alle prime da relazioni del tipo:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}) \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (5.10-1)$$

Così p.es. per individuare la posizione della massa m_i si possono assumere al posto delle tre coordinate cartesiane x_i, y_i, z_i , le tre coordinate polari ρ_i, θ_i, ϕ_i (v. fig.5.10-2,a) o le tre coordinate cilindriche (o semipolari) ρ'_i, θ_i, z_i (v. fig.5.10-2,b).

Le relazioni che legano le coordinate cartesiane x_i, y_i, z_i , alle coordinate polari ρ_i, θ_i, ϕ_i sono:

$$\begin{aligned} x_i &= \rho_i \cos \phi_i \cos \theta_i \\ y_i &= \rho_i \cos \phi_i \sin \theta_i \\ z_i &= \rho_i \sin \phi_i \end{aligned}$$

mentre le relazioni che legano le coordinate cartesiane alle coordinate cilindriche sono:

$$\begin{aligned} x_i &= \rho'_i \cos \theta_i \\ y_i &= \rho'_i \sin \theta_i \end{aligned}$$

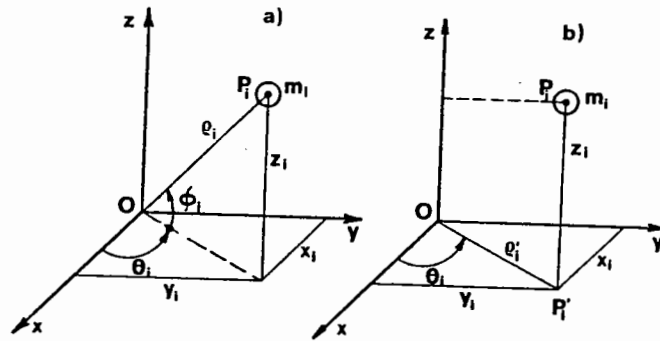


Fig.5.10-2

In molti casi il moto delle masse m_i è limitato dalla presenza di vincoli e questa limitazione è espressa da equazioni che legano le coordinate x_i, y_i, z_i .

Ciò sta ad indicare che a ciascun vincolo, imposto al sistema, corrisponde un'equazione, detta equazione del vincolo, del tipo:

$$f_h(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N) = 0 \quad (5.10-2)$$

Se i vincoli presenti nel sistema sono v ($h = 1, 2, \dots, v$) il numero delle coordinate indipendenti risulta:

$$n = 3N - v$$

In questo caso si dirà che il sistema ha n gradi di libertà e le n coordinate indipendenti, necessarie per individuare la configurazione del sistema, prendono il nome di coordinate generalizzate (o generali o lagrangiane).

Anche le n coordinate generalizzate possono essere scelte in maniera opportuna: in ogni caso esse debbono risultare indipendenti. Da un insieme di n coordinate generalizzate si può passare ad un altro insieme di n coordinate generalizzate mediante opportune formule di trasformazione.

A titolo di esempio si consideri il sistema costituito da due masse m_1 e m_2 collegate tra loro ed a punti fissi mediante elementi elastici di rigidità K_i (v. fig.5.10-3).

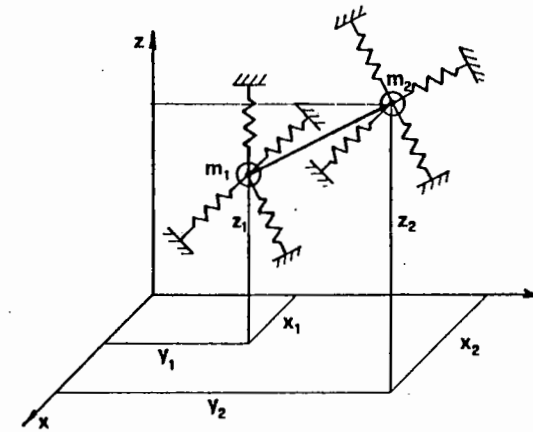


Fig.5.10-3

Se nessun vincolo limita il moto delle due masse, le coordinate cartesiane $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, sono indipendenti: il sistema ha quindi sei gradi di libertà e come coordinate generalizzate possono essere assunte le 6 coordinate cartesiane ovvero qualunque altro sistema di coordinate indipendenti q_i ($i = 1, 2, \dots, 6$), legate alle prime da relazioni del tipo:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(q_1, q_2, \dots, q_6) \\ y_1 = y_1(q_1, q_2, \dots, q_6) \\ \dots \\ z_2 = z_2(q_1, q_2, \dots, q_6) \end{cases} \quad (5.10-3)$$

Se si collegano le due masse mediante un'asta rigida, priva di massa, di lunghezza l (v. fig.5.10-3), l'equazione del vincolo, dovendo esprimere la circostanza che la distanza tra le due masse deve mantenersi costante ed uguale ad l , risulta essere:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2 \quad (5.10-4)$$

Il sistema ha quindi $6 - 1 = 5$ coordinate indipendenti e quindi un numero di gradi di libertà pari a 5.

Come coordinate generalizzate possono essere assunte le tre coordinate indipendenti x_1, y_1, z_1 ed i due angoli necessari ad orientare l'asta nello spazio.

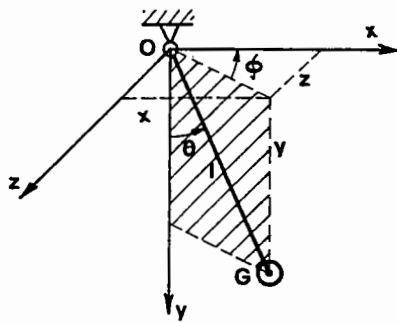


Fig.5.10-4

Nel caso di un pendolo sferico (v. fig.5.10-4), costituito da una massa m , concentrata all'estremità di un'asta rigida di lunghezza l , di massa trascurabile, l'altro estremo della quale è collegato ad un punto fisso O a mezzo di una cerniera sferica, l'equazione del vincolo è la seguente:

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \quad (5.10-5)$$

Questa relazione esprime la circostanza che la massa m , durante il moto, ha una distanza da O costante ed uguale ad l , sicché il punto G si muove su una superficie sferica di centro O e raggio l .

Risulta in tale caso:

$$n = 3 - 1 = 2$$

cioè il pendolo sferico ha due gradi di libertà e come coordinate generalizzate si possono assumere gli angoli θ e ϕ di figura.

Se la cerniera in O è cilindrica, con asse coincidente con l'asse orizzontale z , il punto G è vincolato a muoversi nel piano verticale xy ed il sistema si riduce ad un pendolo semplice.

Le equazioni dei vincoli sono in questo caso due:

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ x^2 + y^2 &= l^2 \end{aligned}$$

e risultando: $n = 3 - 2 = 1$ il sistema ha un solo grado di libertà.

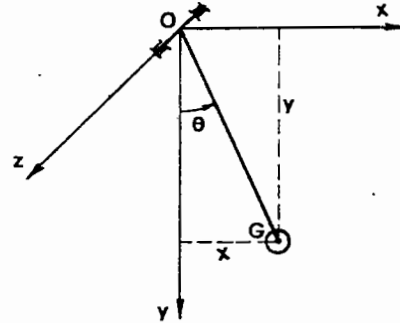


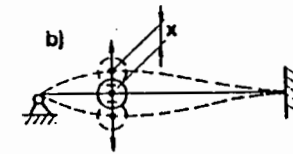
Fig.5.10-5

Come coordinata generalizzata si assume in questo caso l'angolo θ , che l'asta forma con l'asse verticale y (v. fig.5.10-5).

Tutti i sistemi fin qui considerati sono a vincoli bilaterali, fissi ed olonomi: all'esame di sistemi di questo tipo, fra i più diffusi nella pratica tecnica, saranno dedicati i paragrafi seguenti.

A titolo esemplificativo in fig.5.10-6 sono riportati alcuni esempi di sistemi ad un grado di libertà di questo tipo.

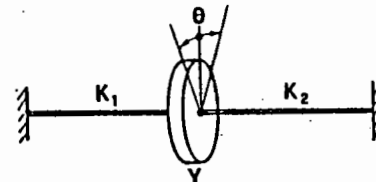
a) Pendolo composto



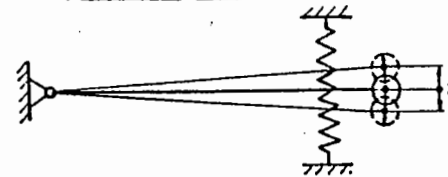
Sistemi flessionali



d) Sistema torsionale



e) Pendolo elasticamente vincolato



f) Sistema massa-molla

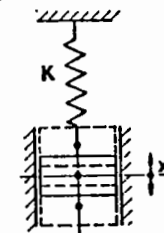


Fig.5.10-6

Per ogni sistema rappresentato in figura è indicata la corrispondente coordinata generalizzata; le linee tratteggiate indicano la configurazione del

sistema agli estremi dell'oscillazione.

In fig.5.10-7 sono riportati alcuni esempi di sistemi a 2 gradi di libertà.

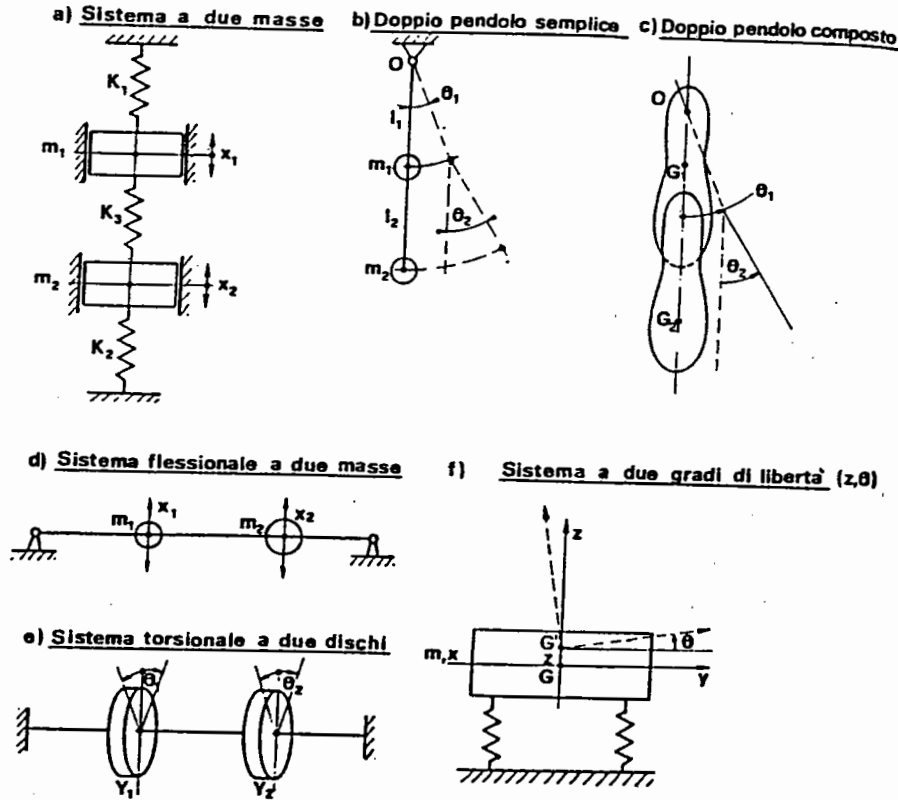


Fig.5.10-7

Il sistema rappresentato in fig.5.10-7,f) è spesso utilizzato per lo studio delle vibrazioni (accoppiate) di rimbalzo $z(t)$ e di beccheggio $\theta(t)$ della massa sospesa m di un autoveicolo, o di un basamento industriale.

È da notare a questo proposito che un corpo rigido con vincoli elastici costituisce un sistema a 6 gradi di libertà (v. fig.5.10-8); infatti per individuare, in ogni istante dell'oscillazione, la posizione del corpo è necessario conoscere gli spostamenti $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ di un suo punto P e le rotazioni $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\psi(t)$ intorno agli assi x , y , z di una terna passante per P .

Le equazioni del moto si semplificano se P coincide col baricentro G e gli assi di riferimento coincidono con la terna centrale di inerzia del corpo.

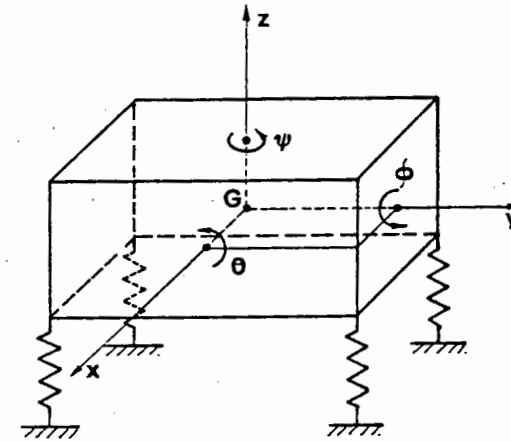


Fig.5.10-8

Il sistema a due gradi di libertà (z e θ) di fig.5.10-7,f) è quello di un corpo rigido elasticamente sospeso (fig.5.10-8) nell'ipotesi che i moti prevalenti del sistema siano solo quelli di rimbalzo z e di beccheggio θ .

Tale ipotesi semplificativa è in genere accettabile nello studio delle vibrazioni della massa sospesa di un autoveicolo o di un basamento industriale.

Essa va tuttavia attentamente vagliata caso per caso, allo scopo di evitare che con tale semplificazione restino fuori dal modello matematico, aspetti che invece influenzano in maniera notevole la dinamica del sistema reale.

5.11 Sistemi ad un grado di libertà

Lo studio dei sistemi ad 1 grado di libertà è fondamentale nell'analisi dei fenomeni vibratorii e ciò non solo perché esso permette di mettere in luce, nella maniera più semplice, aspetti importanti dei suddetti fenomeni, ma anche perché il moto di un sistema ad n gradi di libertà viene in genere studiato col metodo dell'analisi modale e risulta dalla sovrapposizione di n moti indipendenti, ciascuno dei quali definito da un modello matematico simile a quello di un sistema ad 1 grado di libertà.

Si è ritenuto opportuno far precedere lo studio dei sistemi conservativi a quello dei sistemi dissipativi.

5.12 Sistemi conservativi: vibrazioni libere

Si consideri il sistema ad un grado di libertà rappresentato in fig.5.12-1, costituito da un corpo rigido di massa m , vincolato a muoversi solo nella direzione dell'asse x da un sistema di guide g . La massa m del corpo è, per questo motivo, riducibile ad una massa concentrata in un punto qualsiasi del corpo ed in particolare nel baricentro G di m .

Si supponga che la molla, che collega il corpo al punto fisso O , sia un elemento elastico privo di massa e che il sistema sia conservativo: si riterranno trascurabili la resistenza del mezzo, la resistenza d'attrito delle guide g , la resistenza dovuta alla variazione periodica delle sollecitazioni nel materiale della molla.

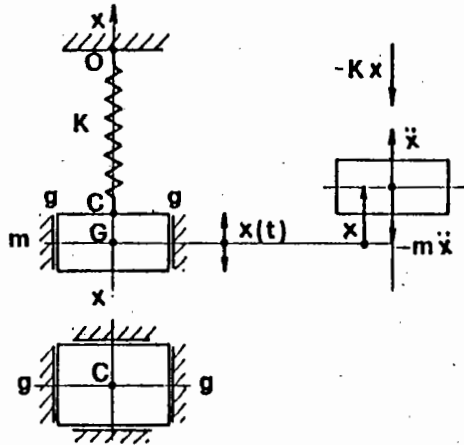


Fig.5.12-1

Si assuma inoltre come origine degli spostamenti x la posizione di equilibrio statico del baricentro G della massa m .

Se al sistema descritto vengono imposte assegnate condizioni iniziali (spostamento e velocità di m al tempo $t = 0$), il sistema stesso compie una oscillazione libera.

L'equazione del moto libero del sistema si ottiene applicando il principio di d'Alembert, considerando cioè l'equilibrio dinamico tra l'unica forza applicata sulla massa m , costituita dalla reazione elastica della molla e la forza d'inerzia della massa m .

Nell'ipotesi di oscillazioni di piccola ampiezza, la reazione della molla può essere ritenuta proporzionale ad x e, essendo di verso opposto ad x , pari a $-Kx$.

La costante K prende il nome di rigidità o rigidità K della molla: essendo questo l'unico parametro che la caratterizza, la molla stessa sarà spesso indicata col simbolo K .

Il valore di K rappresenta la reazione, col segno cambiato, della molla per uno spostamento di un suo estremo (p. es. C) rispetto all'altro (O) di una quantità unitaria.

Da quanto detto l'equazione del moto si scrive:

$$-m\ddot{x} - Kx = 0$$

dalla quale si deduce che:

$$m\ddot{x} + Kx = 0 \quad (5.12-1)$$

L'equazione differenziale (5.12-1) prende il nome di equazione del moto libero della massa m e rappresenta il modello matematico più semplice per lo studio delle oscillazioni libere di un sistema.

La forza peso P , che agisce sulla massa m non condiziona il fenomeno dell'oscillazione libera.

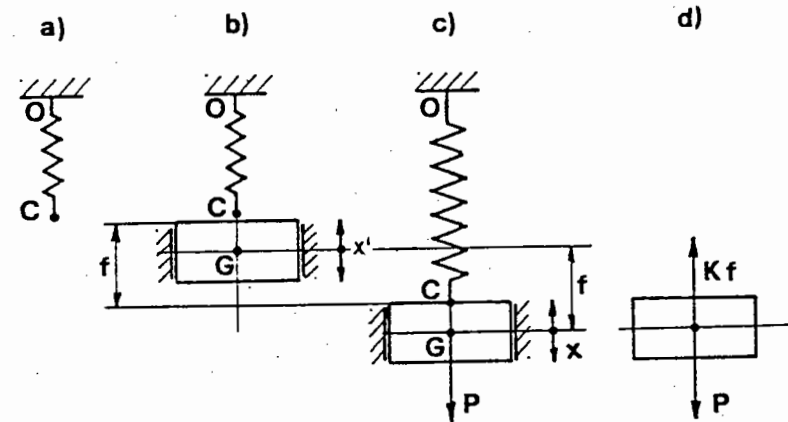


Fig.5.12-2

È da notare a questo proposito che avendo fissato (v. fig.5.12-2) un estremo della molla ad un punto fisso O ed avendo avvicinato all'altro estremo il corpo rigido, come indicato in fig.5.12-2,b), la molla subisce un allungamento quando il corpo è stato collegato all'estremo C (v. fig.5.12-2,c) a

causa della forza peso P . Indicando questo allungamento come "freccia statica" f della molla, per l'equilibrio (statico) del sistema dovrà essere verificata la relazione:

$$P = Kf$$

che esprime l'equilibrio tra la forza peso P e la reazione Kf della molla (v. fig. 5.12-2, d).

Per tener conto dell'azione della forza peso P si assuma come origine degli spostamenti la posizione di G di fig. 5.12-2, b). La relazione che lega x' ad x è la seguente:

$$x' = x + f$$

con $f = \text{cost.}$

Tenendo conto della forza peso P , l'equazione del moto, sempre per il principio di d'Alembert, si scrive:

$$-m\ddot{x}' - Kx' + P = 0$$

e quindi, sostituendo ad x' il suo valore in funzione di f , si ottiene:

$$-m\ddot{x} - Kx - Kf + P = 0$$

Tenendo presente che $P = Kf$, si può scrivere infine:

$$m\ddot{x} + Kx = 0$$

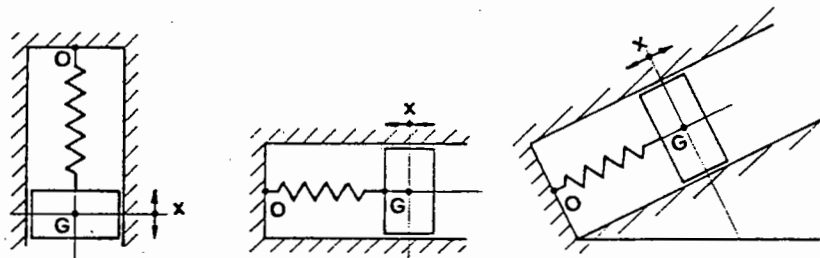


Fig. 5.12-3

equazione questa che coincide con la (5.12-1). Resta così dimostrato che la forza peso P non influenza la legge del moto della massa m .

Questo risultato sta ad indicare che il moto libero del sistema (m, K) non è influenzato dalla giacitura dell'asse x e che quindi per tutti i sistemi di fig. 5.12-3 il moto è definito, sempre nella ipotesi di vincoli lisci, dalla (5.12-1).

In ciascun caso l'origine di x coincide con la posizione di equilibrio statico di G , posizione che è, a parità di m e K , evidentemente diversa nei tre casi.

La (5.12-1) è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, omogenea ed è noto che la ricerca del suo integrale generale $x(t)$ può effettuarsi ponendo nell'equazione stessa:

$$x(t) = Ce^{\lambda t} \quad (5.12-2)$$

con C e λ costanti.

Con tale sostituzione si ottiene:

$$mC\lambda^2 e^{\lambda t} + KCe^{\lambda t} = 0 \quad (5.12-3)$$

e quindi:

$$m\lambda^2 + K = 0 \quad (5.12-4)$$

La (5.12-4), indipendente da t , prende il nome di equazione (algebraica) caratteristica della (5.12-1) e fornisce per λ i valori:

$$\lambda = \pm i\sqrt{K/m} \quad (5.12-5)$$

Posto:

$$\sqrt{K/m} = \omega_n \quad (5.12-6)$$

si può scrivere:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_n \quad (5.12-7)$$

Alle due radici (5.12-7) dell'equazione caratteristica corrispondono due integrali particolari della (5.12-1) e quindi l'integrale generale $x(t)$ di tale equazione risulta essere:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t} \quad (5.12-8)$$

Tenendo presenti le formule di Eulero:

$$e^{\pm i\omega_n t} = \cos \omega_n t \pm i \sin \omega_n t \quad (5.12-9)$$

la (5.12-8) si scrive:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1(\cos \omega_n t + i \sin \omega_n t) + C_2(\cos \omega_n t - i \sin \omega_n t) = \\ &= (C_1 + C_2) \cos \omega_n t + i(C_1 - C_2) \sin \omega_n t \end{aligned} \quad (5.12-10)$$

Posto:

$$A = C_1 + C_2 \quad ; \quad B = i(C_1 - C_2) \quad (5.12-11)$$

la legge del moto (5.12-10) si scrive:

$$x(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t = C \cos(\omega_n t + \phi_0) \quad (5.12-12)$$

con:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad ; \quad \tan \phi_0 = -B/A \quad (5.12-13)$$

Dalla (5.12-12) si deduce che il moto libero $x(t)$ della massa m è un moto armonico di pulsazione ω_n .

Il valore di ω_n risulta dato per la (5.12-6) da:

$$\omega_n = \sqrt{K/m} \quad (5.12-6)$$

e costituisce un valore caratteristico o proprio del sistema, al quale si dà il nome di pulsazione naturale.

I valori delle costanti di integrazione A e B si ottengono dalle condizioni iniziali ($t = 0$):

$$x(0) = x_0 \quad ; \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (5.12-14)$$

Essendo per la (5.12-12):

$$\dot{x}(t) = -A\omega_n \sin \omega_n t + B\omega_n \cos \omega_n t \quad (5.12-15)$$

all'istante iniziale, dovrà essere:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 = A \\ \dot{x}(0) &= v_0 = B\omega_n \end{aligned} \quad (5.12-16)$$

Da queste equazioni si ricava:

$$A = x_0 \quad ; \quad B = v_0/\omega_n \quad (5.12-17)$$

e la legge del moto (5.12-12) risulta quindi data da:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + (v_0/\omega_n) \sin \omega_n t \quad (5.12-18)$$

o dall'equivalente:

$$x(t) = C \cdot \cos(\omega_n t + \phi_0) \quad (5.12-19)$$

con:

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega_n^2} \\ \phi_0 &= \arctan(-B/A) = -\arctan v_0/\omega_n x_0 \end{aligned}$$

È da notare che, essendo A e B reali (v. le 5.12-17), le costanti C_1 e C_2 risultano per le (5.12-11) complesse e coniugate.

In fig. 5.12-4 per un assegnato sistema (m, K) sono rappresentate le leggi del moto libero $x(t)$, corrispondenti ad alcune particolari condizioni iniziali, e le relative rappresentazioni vettoriali.

Le suddette figure mettono, tra l'altro, in evidenza che:

- 1) al variare delle condizioni iniziali il moto libero è armonico dello stesso periodo $T_n = 2\pi/\omega_n$;
- 2) per gli stessi valori assoluti di x_0 e v_0 , l'ampiezza C del moto armonico è la stessa, mentre varia la fase iniziale;
- 3) il moto armonico è cosinusoidale di ampiezza x_0 ;

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t$$

se è $v_0 = 0$, mentre risulta sinusoidale di ampiezza v_0/ω_n :

$$x(t) = (v_0/\omega_n) \sin \omega_n t$$

se è $x_0 = 0$;

- 4) in ogni caso il moto libero (5.12-18) una volta eccitato, non si estingue: questo risultato è in contrasto con l'esperienza e si spiega tenendo presente che nel modello matematico (5.12-1) non compare, per le ipotesi fatte, alcuna azione smorzante.

Un sistema di questo tipo viene detto, come è noto, conservativo; durante l'oscillazione, l'energia del sistema si trasforma con continuità da energia cinetica in energia potenziale e viceversa senza dissipazione alcuna, sicché in ogni istante dell'oscillazione la somma $L(t)$ delle due energie è costante e pari ad $L(0)$:

$$L(t) = m\dot{x}^2/2 + Kx^2/2 = L(0) = mv_0^2/2 + Kx_0^2/2$$

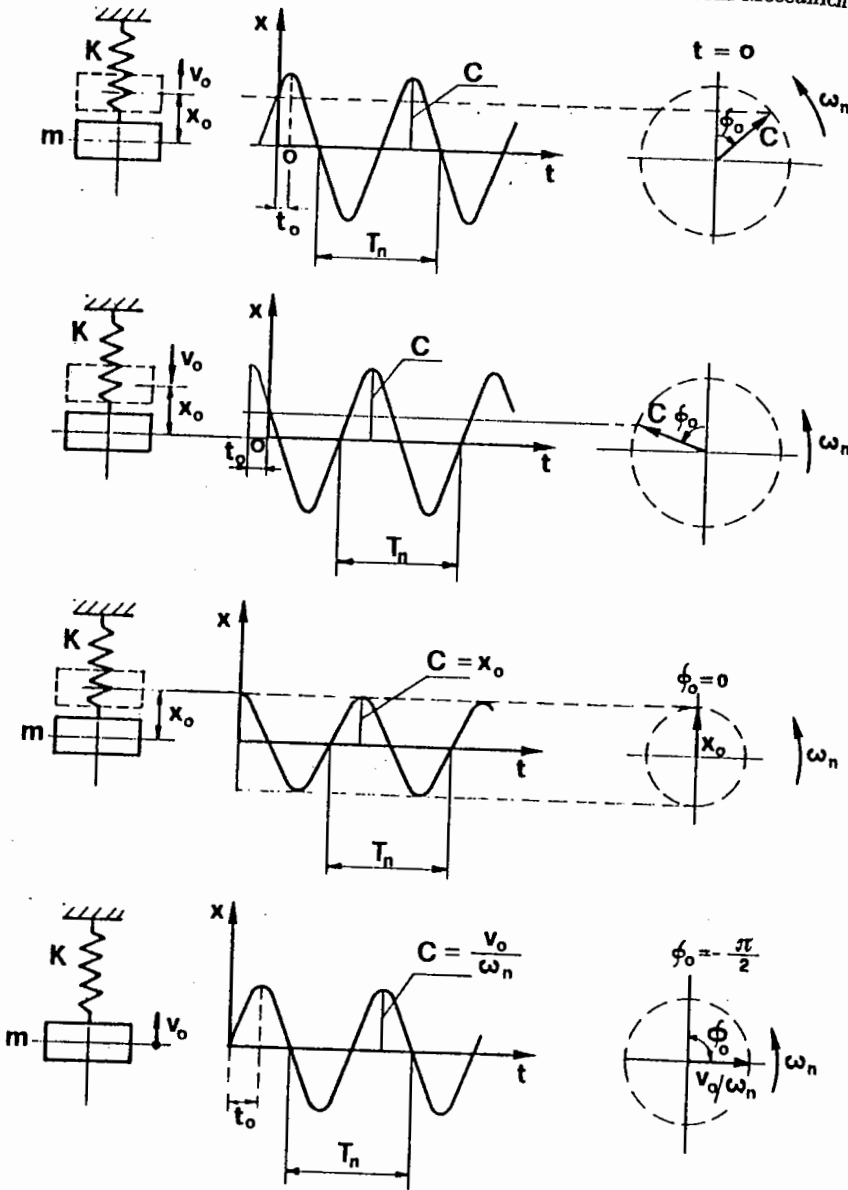


Fig.5.12-4

5.13 Vibrazioni forzate armoniche

Si supponga che sulla massa m del sistema rappresentato in fig.5.12-1 agisca una forza armonica $F(t) = F_0 \cos \omega t$. L'equazione del moto forzato del sistema si ottiene scrivendo la condizione di equilibrio delle forze agenti sul sistema:

$$-m\ddot{x} - Kx + F_0 \cos \omega t = 0 \tag{5.13-1}$$

e quindi:

$$m\ddot{x} + Kx = F_0 \cos \omega t \tag{5.13-2}$$

La (5.13-2) rappresenta il modello matematico più semplice per lo studio delle vibrazioni forzate di un sistema ad un grado di libertà.

Come è noto, l'integrale generale $x(t)$ dell'equazione differenziale (5.13-2) è dato dalla somma dell'integrale generale $x_i(t)$ dell'omogenea associata e da un integrale particolare $x_f(t)$ della equazione completa:

$$x(t) = x_i(t) + x_f(t) \tag{5.13-3}$$

L'omogenea associata alla (5.13-2) coincide con la (5.12-12), ed il suo integrale $x_i(t)$, dato dalla (5.12-12), rappresenta l'oscillazione libera del sistema.

Poiché il termine noto della (5.13-2) è una funzione armonica, l'integrale particolare $x_f(t)$ sarà dello stesso tipo, cioè esprimibile da una funzione armonica di pulsazione ω :

$$x_f(t) = X_f \cos \omega t \tag{5.13-4}$$

Si potrà quindi porre:

$$x(t) = x_i(t) + x_f(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + X_f \cos \omega t \tag{5.13-5}$$

Questa relazione sta a significare che il moto $x(t)$ è costituito dalla somma di una oscillazione armonica di pulsazione ω_n (oscillazione libera) e di una oscillazione armonica di pulsazione ω : il moto risultante non è quindi armonico ed in genere non è periodico, a meno che il rapporto ω/ω_n non sia un numero razionale (v. par.5.5).

Tenendo presente che in pratica il sistema è smorzato e che quindi dopo un tempo più o meno lungo (transitorio iniziale) l'oscillazione libera $x_i(t)$ si estingue, in condizioni stazionarie risulterà:

$$x(t) \approx x_f(t) = X_f \cos \omega t \tag{5.13-6}$$

In queste condizioni l'unica incognita del moto forzato $x_f(t)$ è costituita dall'ampiezza X_f , essendo la pulsazione di tale moto coincidente con la pulsazione nota della $F(t)$.

Sostituendo la (5.13-6) nella (5.13-2) si ottiene:

$$-m\omega^2 X_f \cos \omega t + K X_f \cos \omega t = F_0 \cos \omega t$$

e quindi:

$$X_f (K - m\omega^2) = F_0$$

Il valore di X_f , tenendo presente la (5.12-6), risulta dato da:

$$X_f = F_0 / (K - m\omega^2) = \frac{F_0}{K} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \quad (5.13-7)$$

Tenendo presente che il rapporto F_0/K è lo spostamento che la massa m subisce per l'applicazione statica di una forza pari ad F_0 , spostamento che viene indicato come spostamento statico x_{st} :

$$x_{st} = F_0 / K \quad (5.13-8)$$

la (5.13-7) si scrive infine nella forma:

$$X_f = x_{st} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \quad (5.13-9)$$

La (5.13-9) sta ad indicare che l'ampiezza X_f dell'oscillazione armonica forzata è proporzionale allo spostamento statico x_{st} secondo un coefficiente $1/(1 - \omega^2/\omega_n^2)$, che varia al variare della pulsazione ω della forza eccitante.

Tale coefficiente, che indicheremo con la lettera A , prende il nome di coefficiente di amplificazione:

$$A = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \quad (5.13-10)$$

Il diagramma di A in funzione del rapporto ω/ω_n si presenta come in fig. 5.13-1, a) ed il suo andamento può essere tracciato tenendo presente che dall'esame della (5.13-10) si deduce che:

- 1° per $\omega/\omega_n \rightarrow 0$, $A \rightarrow 1$ (punto di coordinate (0,1) del diagramma): ciò sta ad indicare che per valori della frequenza f ($f = \omega/2\pi$) della forza eccitante molto più bassi della frequenza naturale f_n ($f_n = \omega_n/2\pi$), l'ampiezza X_f dell'oscillazione forzata coincide praticamente con lo spostamento statico x_{st} ;
- 2° per $\omega/\omega_n \rightarrow 1$, $A \rightarrow \infty$: questo risultato va interpretato dicendo che al tendere della frequenza f della forza eccitante ad f_n , l'ampiezza dell'oscillazione forzata X_f diviene via via più grande rispetto ad x_{st} e ciò indipendentemente dal valore di F_0 ;
- 3° per $\omega^2/\omega_n^2 = 2$, cioè per $\omega/\omega_n = 1.41$, risulta $A = -1$: quando la frequenza f dell'azione eccitante è 1.41 volte la frequenza naturale f_n , $X_f = -x_{st}$ e quindi:

$$x_f = -x_{st} \cos \omega t = x_{st} \cos(\omega t \pm \pi)$$

In queste condizioni il moto forzato è in opposizione di fase con la forza eccitante $F(t) = F_0 \cos \omega t$ ed ha un'ampiezza pari ad x_{st} ;

- 4° per $\omega^2/\omega_n^2 > 1$, A risulta negativo e quindi l'oscillazione forzata, $x_f = x_{st} A \cos \omega t$, risulta in opposizione di fase con l'azione eccitante;
- 5° per $\omega/\omega_n \rightarrow \infty$, $A \rightarrow 0$: al crescere della frequenza f della forza eccitante nell'intervallo (f_n, ∞) , l'ampiezza della vibrazione forzata decresce e l'azione forzante, indipendentemente dal valore di F_0 , non è più in grado di eccitare un'oscillazione forzata di ampiezza apprezzabile.

Per ragioni pratiche si preferisce considerare, al posto del diagramma $A = f(\omega/\omega_n)$, il diagramma $|A| = f(\omega/\omega_n)$, che si presenta come in fig. 5.13-1, b).

A questo diagramma si affianca in genere quello del ritardo di fase ϕ dell'oscillazione forzata rispetto all'azione eccitante al variare di ω/ω_n .

Per quanto già detto il diagramma $\phi = f(\omega/\omega_n)$ si presenta come in fig. 5.13-1, c).

I risultati ottenuti dal modello matematico (5.13-2) e descritti nei punti da 1° a 5°, sono in buon accordo con i risultati sperimentali osservabili su molti sistemi meccanici reali: l'accordo è più grande per quei sistemi reali, per i quali risultano più accettabili le ipotesi semplificative, poste alla base della formulazione del modello matematico suddetto.

In particolare il fenomeno della risonanza, descritto nel par. 5.8, si ritrova nei risultati dello studio teorico effettuato; infatti anche da questo studio si deduce che, quando la pulsazione della forza eccitante è prossima

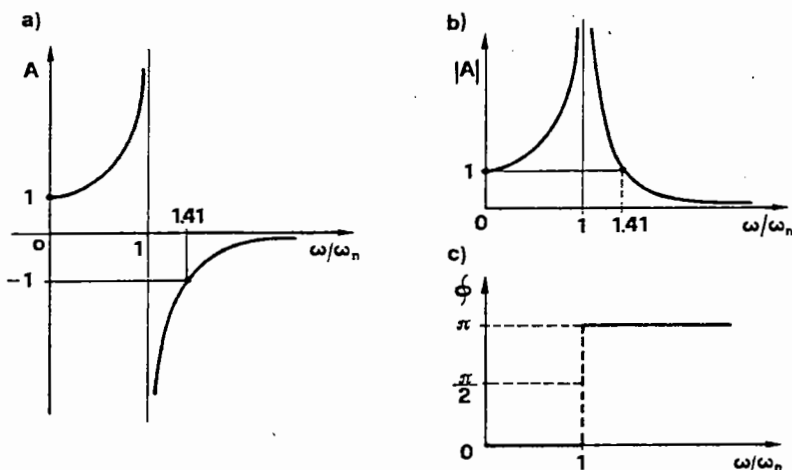


Fig.5.13-1

alla pulsazione propria, il sistema oscilla con ampiezze molto grandi; in queste condizioni il modello matematico fa prevedere che, già in condizioni prossime a quelle di risonanza ($\omega \approx \omega_n$), l'elemento elastico, che collega la massa m al punto fisso, è destinato a rompersi.

Il modello matematico mette in luce inoltre che il sistema può funzionare in sicurezza, se la pulsazione ω della azione eccitante ha un valore molto diverso da ω_n ; in particolare per $\omega \gg \omega_n$ la vibrazione forzata ha una ampiezza trascurabile e per questo motivo diventa un fenomeno di scarso rilievo tecnico.

Come è stato accennato nel par.5.8, la vibrazione forzata armonica di un sistema può essere eccitata non solo con l'applicazione di una forza $F_0 \cos \omega t$ alla massa m , ma anche imponendo alla sezione d'incastro dell'elemento elastico un moto armonico assegnato.

Riprendendo in esame il sistema ad 1 grado di libertà di fig.5.12-1, si supponga che l'estremo O della molla di rigidità K sia soggetto (v. fig.5.13-2) ad un moto armonico $x_K(t)$ dato da:

$$x_K(t) = X_K \cos \omega t \quad (5.13-11)$$

Indicato come al solito con x lo spostamento di m rispetto alla sua posizione di equilibrio statico, l'equazione del moto della massa m si ottiene scrivendo che la forza d'inerzia $-m\ddot{x}$ fa equilibrio alla reazione elastica R della molla K .

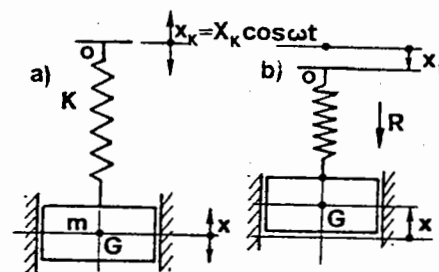


Fig.5.13-2

Osservando che tale reazione è proporzionale alla variazione di lunghezza della molla e quindi allo spostamento relativo x_r di G rispetto a O , si potrà scrivere:

$$R = -Kx_r = -K(x - x_K) \quad (5.13-12)$$

e quindi:

$$-m\ddot{x} - K(x - x_K) = 0 \quad (5.13-13)$$

Dalla (5.13-13) si ottiene infine:

$$m\ddot{x} + Kx = KX_K \cos \omega t \quad (5.13-14)$$

La (5.13-14) può essere considerata come l'equazione del moto forzato della massa m , eccitata da una forza armonica $KX_K \cos \omega t$, cioè da una forza di ampiezza $F_0 = KX_K$ e di pulsazione ω .

Il moto $x(t)$ di m può essere quindi ricavato applicando i risultati già acquisiti col modello matematico (5.13-2); questi risultati sono espressi dalla relazione:

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t) \quad (5.13-3)$$

con:

$$x_f(t) = X_f \cos \omega t \quad (5.13-6)$$

$$X_f = x_{st} \cdot A \quad (5.13-9)$$

$$x_{st} = F_0/K = KX_K/K = X_K \quad (5.13-8')$$

$$A = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \quad (5.13-10)$$

È da osservare che nel caso in esame il valore di x_{st} coincide col valore X_K dell'ampiezza del moto imposto all'estremo O della molla.