

## Calcolo delle tensioni in solidi membranali polarsimmetrici

La superficie di riferimento per il problema in oggetto è la superficie a doppia curvatura che si ottiene facendo ruotare di un angolo  $2\pi$  una curva del piano  $xz$  intorno all'asse polare  $z$  (figura 1). La curva di partenza si chiama direttrice o generatrice e può essere descritta da una funzione  $r(z)$ . Ogni suo punto ruotando descriverà una circonferenza ortogonale all'asse di simmetria polare  $z$ , i cui punti sono individuati dall'angolo  $\varphi$ .

L'operazione di generazione della superficie consente anche di individuare dei comodi riferimenti curvilinei indicati in figura 1 come meridiani e paralleli.

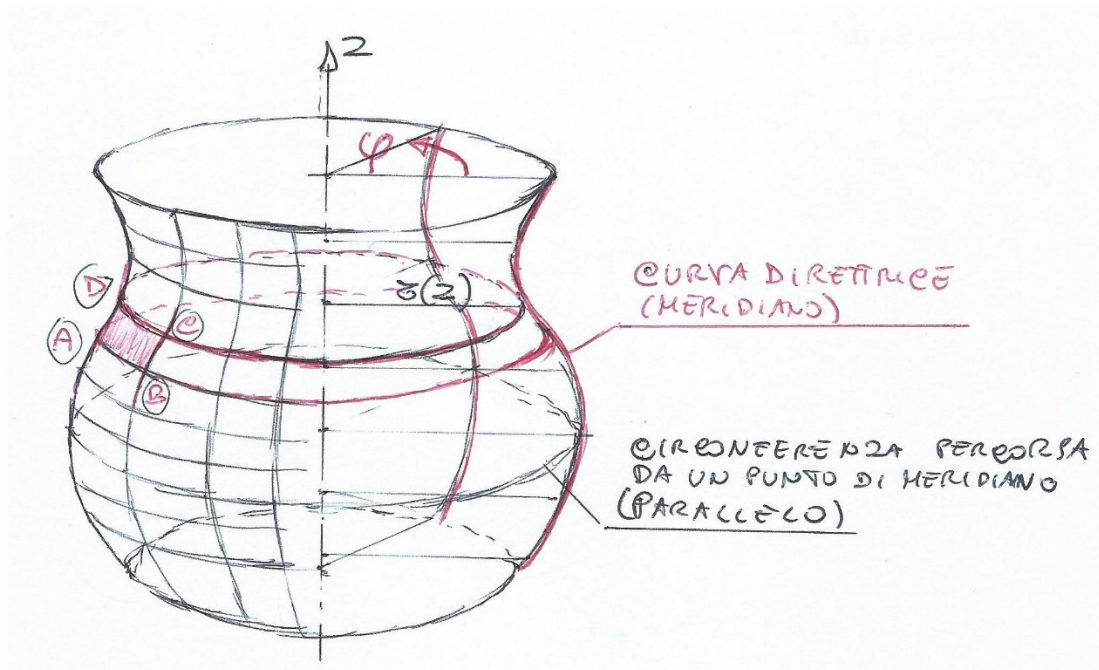


Figura 1

La superficie così generata è adatta a descrivere le cosiddette strutture membranali. Queste sono strutture caratterizzate da *spessore sottile rispetto ai raggi di curvatura* e caricate in ogni punto ortogonalmente alla superficie da un campo di pressione a simmetria polare. In definitiva, tutte le quantità che descrivono la statica del problema sono indipendenti dalla coordinata polare  $\varphi$ :

$$r=r(z); P=P(z); s=s(z)$$

Inoltre, anche i vincoli e gli altri carichi esterni sono polarsimmetrici, ovvero indipendenti da  $\varphi$  (figura 2).

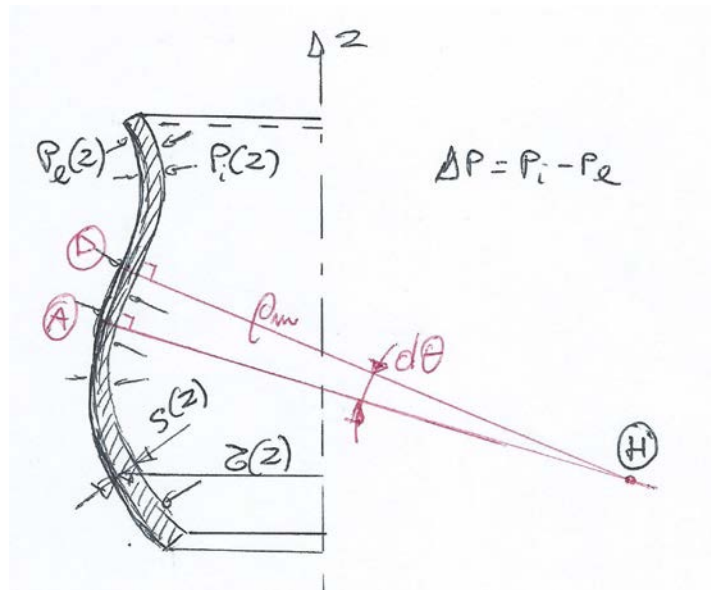


Figura 2

È possibile ricavare una semplice equazione di equilibrio indefinita (cioè indipendente dalle condizioni al contorno) del solido in oggetto considerando l'elemento infinitesimo di membrana ABCD ottenuto 'ritagliando' la superficie lungo due curve generatrici e due curve meridiane infinitamente vicine tra loro\* (vedi figure 1 e 3).

\* Si noti che le curve  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  coincidono con i corrispondenti tratti di paralleli soltanto al primo ordine. Nello stesso senso, esse sono anche uguali tra loro.

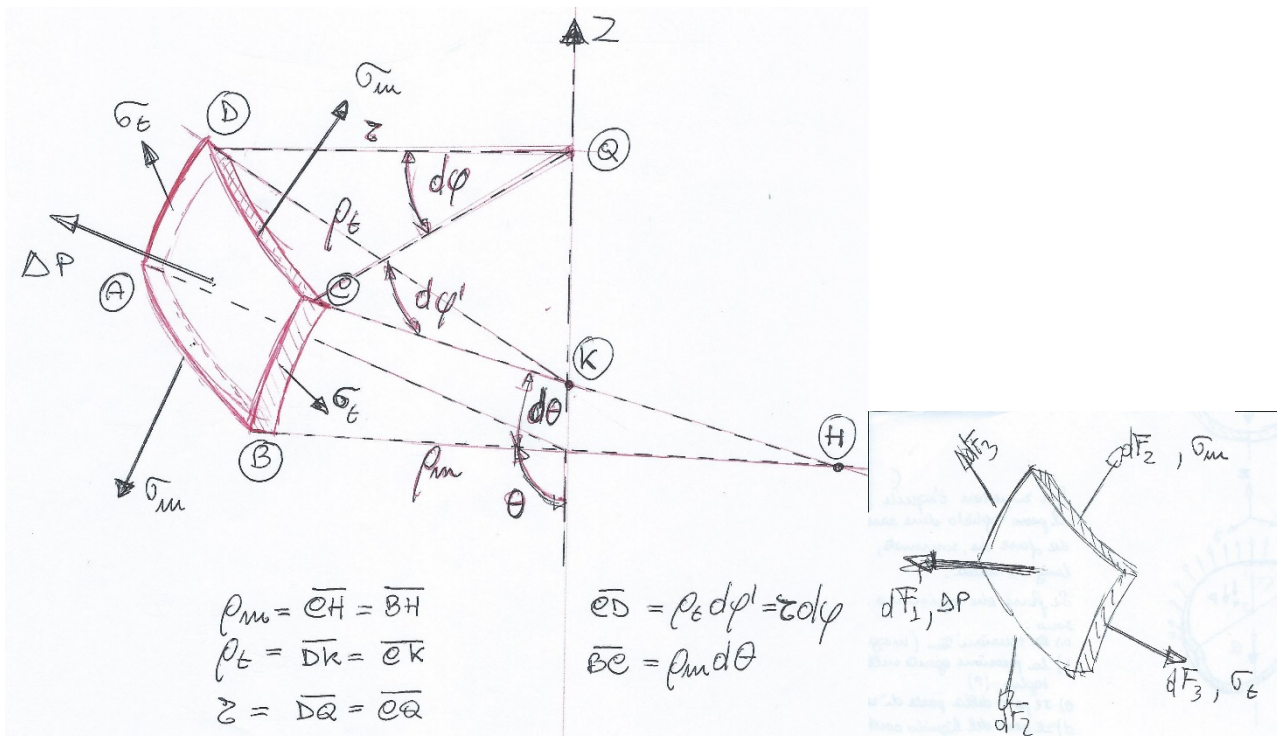


Figura 3a, b

A causa della simmetria polare della geometria e delle condizioni al contorno, le superfici evidenziate dal tratteggio sono sede delle sole tensioni normali  $\sigma_m$  e  $\sigma_t$  (tensioni di membrana meridiana e circonferenziale), mentre la tensione tangenziale è ivi nulla.

Moltiplicando le tensioni di membrana e la pressione applicate su ABCD per l'area sulla quale agiscono si ottengono le seguenti forze agenti sull'elemento (figura 3b):

$$dF_1 = \overline{AB} \cdot \overline{AD} \Delta P$$

$$dF_2 = \overline{AB} \cdot s \sigma_m$$

$$dF_3 = \overline{AD} \cdot s \sigma_t$$

La lunghezza degli archi infinitesimi  $\overline{AB}$  e  $\overline{AD}$  si valuta moltiplicando il raggio di curvatura di ogni arco per il corrispondente angolo infinitesimo (rappresentati in figura 3a). Essi misurano:

$$\overline{AB} = \rho_t d\varphi'$$

$$\overline{AD} = \rho_m d\theta$$

Quindi, le forze agenti su ABCD e rappresentate in figura 3b valgono:

$$dF_1 = \Delta P \rho_t \rho_m d\theta d\varphi'$$

$$dF_2 = \sigma_m \rho_t s d\varphi'$$

$$dF_3 = \sigma_t \rho_m s d\theta$$

L'equazione di equilibrio indefinita si ottiene annullando la somma delle forze agenti su ABCD. A causa della doppia simmetria del sistema di forze, l'unica componente da equilibrare è quella in direzione radiale, cioè la direzione di  $dF_1$ .

Le proiezioni delle forze  $dF_2$  e  $dF_3$  in tale direzione valgono (Figura 4):

$$\text{proiezione di } dF_2 \text{ in direzione 1: } (dF_2)_1 = -dF_2 d\theta/2$$

$$\text{proiezione di } dF_3 \text{ in direzione 1: } (dF_3)_1 = -dF_3 d\varphi'/2$$

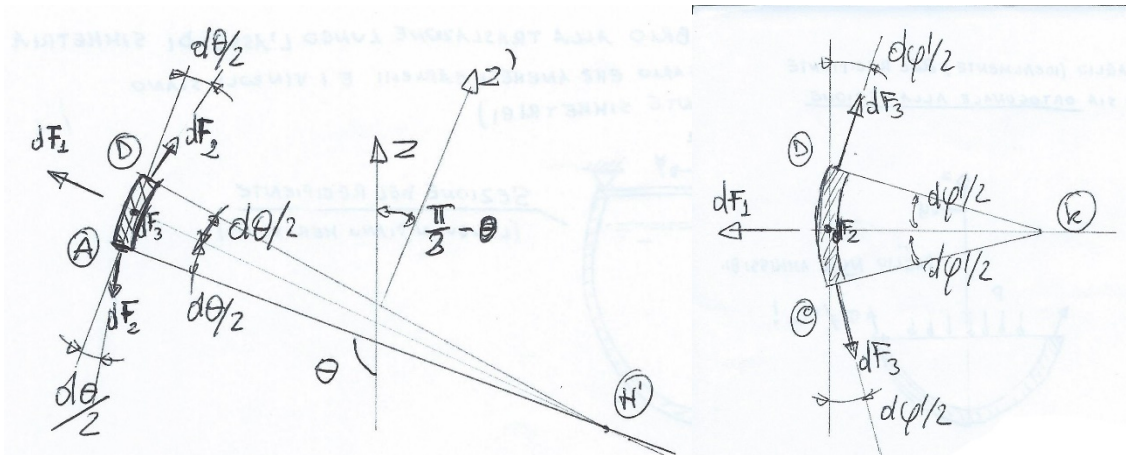


Figura 4a, b

L'equazione di equilibrio si scrive allora:

$$dF_1 + 2(dF_2)_1 + 2(dF_3)_1 = 0$$

Tenendo conto dei risultati precedenti, possiamo ricavare l'uguaglianza:

$$\Delta P \rho_t \rho_m d\theta d\varphi' - \sigma_m \rho_t s d\varphi' d\theta - \sigma_t \rho_m s d\theta d\varphi' = 0$$

Infine, eliminando i fattori comuni e riorganizzando l'equazione precedente si ottiene la forma canonica dell'equilibrio indefinito:

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{\Delta P}{s} \quad (1)$$

### Calcolo della tensione meridiana $\sigma_m$ .

La tensione meridiana si calcola indipendentemente dalla (1) impostando un'equazione di equilibrio in direzione assiale (z) relativa ad una parte finita (e non infinitesima) della struttura membranale e del suo contenuto sulla quale si evidenzia tale tensione quale unica incognita.

Consideriamo ad esempio la struttura in figura 5, costituita da un serbatoio a generatrice parabolica riempito con un liquido di densità  $\rho_l$  e poggiato al suolo. A differenza della fig. 1, qui si

evidenziano tutte le condizioni al contorno (inclusi i vincoli). Immaginiamo di tagliare la struttura e il suo contenuto ad una certa altezza  $z$  mediante una superficie composta da due parti: una parte sia la superficie laterale di un tronco di cono che tagli la struttura membranale lungo lo spessore nella direzione normale alla membrana; l'altra sia la superficie circolare normale all'asse  $z$ , il cui bordo coincida con quello interno della prima superficie, e che tagli il volume interno alla struttura in prosecuzione col primo taglio.

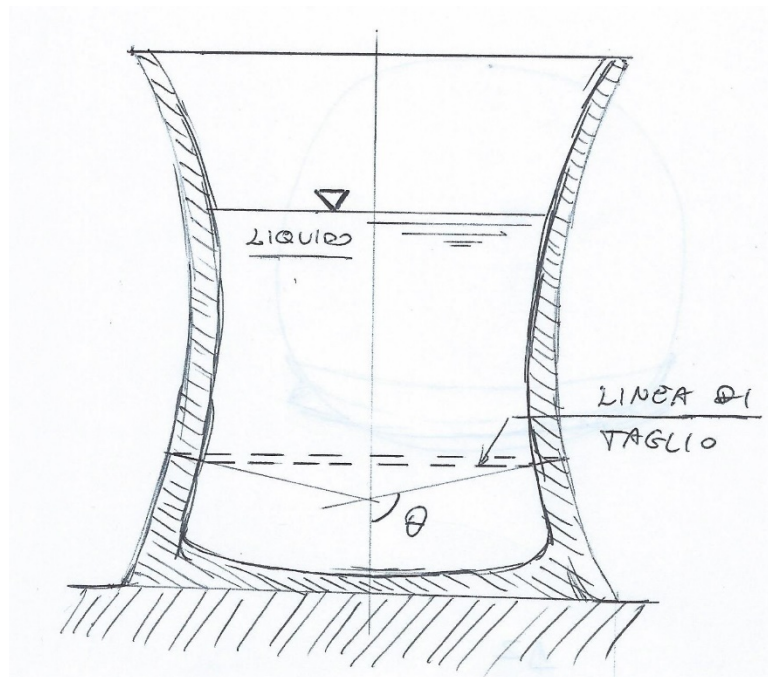


Figura 5

In questo modo, si ottiene la geometria della figura 6 in cui i carichi sono tutti noti (ovvero  $P$  e  $Q$ ) ed è incognita solo la forza esercitata dalla tensione meridiana  $\sigma_m$ .

Per ricavare  $\sigma_m$  occorre impostare l'equilibrio in direzione assiale. La tensione incognita corrisponde, in ogni punto della circonferenza meridiana di coordinata  $z$ , alla forza  $dF_2$  già calcolata in precedenza e per comodità riportata di seguito:

$$dF_2 = \sigma_m \rho_t s d\varphi'$$

La proiezione lungo  $z$  di  $dF_2$  vale (fig. 5, 6):

$$(dF_2)_z = -\sigma_m \rho_t s d\varphi' \sin\theta$$

Integrando l'equazione precedente su tutta la circonferenza, si ottiene la componente assiale della forza interna totale corrispondente alla tensione meridiana:

$$(F_2)_z = \int_0^{2\pi} -\text{sen}\theta \sigma_m \rho_t s d\varphi' = -2\pi \text{sen}\theta \sigma_m r s$$

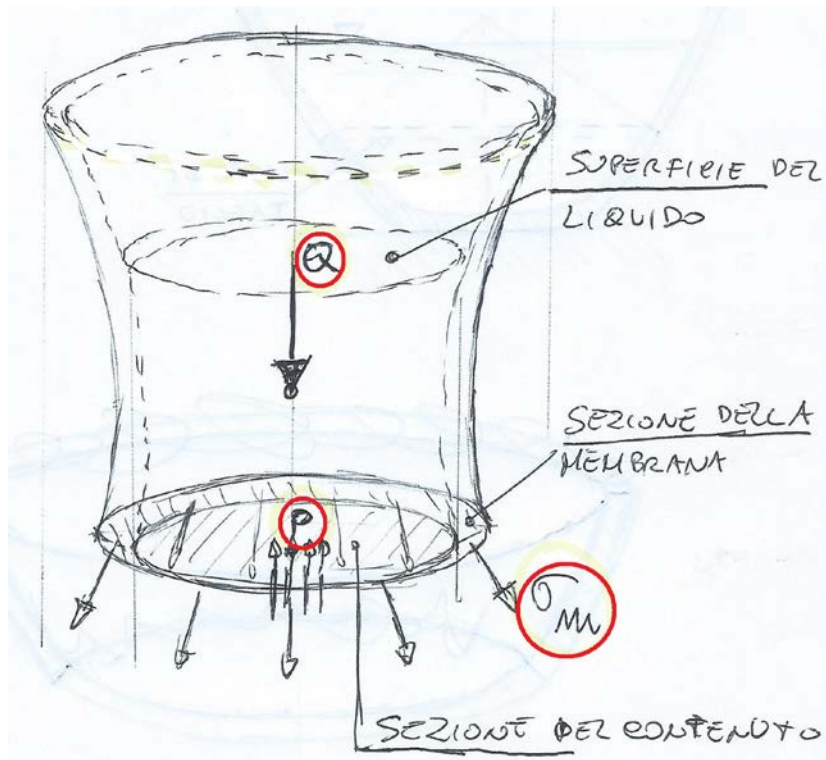


Figura 6

D'altra parte, si evidenziano gli altri due contributi:

Il contributo derivante dall'azione della pressione  $P$  alla quota  $z$  considerata; questo vale:

$$(F_p)_z = \pi r^2 P$$

Il secondo, indicato con  $Q$ , è dato dal totale delle forze esterne, comprese le eventuali reazioni vincolari, applicato sul volume da equilibrare (nel caso in figura 6,  $Q$  è dato dal peso della porzione di serbatoio e del volume di liquido in esso contenuto isolati dal taglio). Sommando tutti i contributi, si ottiene, per ogni quota  $z$ , l'equazione di equilibrio seguente:

$$(F_2)_z + (F_p)_z - Q = 0$$

Sostituendo i valori precedentemente calcolati e riordinando:

$$-2\pi s \sin\theta \sigma_m r s + \pi r^2 p - Q = 0 \Rightarrow$$

$$\sigma_m = \frac{\pi r^2 P - Q}{2\pi r s \sin\theta s} \quad (2)$$

Ricordando la (1), si ricava in cascata la tensione circonferenziale:

$$\sigma_t = \rho_t \left( \frac{P}{s} - \frac{\sigma_m}{\rho_m} \right) \quad (3)$$

Alle tensioni membranali (2, 3) si aggiunge infine, in linea di principio, la tensione radiale P, agente sulla superficie interna del solido:

$$\sigma_r = -P \quad (4)$$

Si noti che la tensione radiale (4), a causa delle assunzioni sulla geometria alla base del modello in oggetto, cioè:

$$\frac{r}{s} \gg 1; \quad \frac{\rho_m}{s} \gg 1; \quad \frac{\rho_t}{s} \gg 1,$$

risulta di norma trascurabile rispetto alle tensioni membranali.

*Nota: negli esempi che seguono  $\sigma_t$  viene indicata con il simbolo  $\sigma_n$  e  $\theta$  è cambiato con  $\vartheta$ .*

- Recipiente cilindrico senza fondello sottoposto a pressione interna ed esterna

(5)

(esempio: rivestimento di tubazioni in ambiente pressurizzato)



$P_{\theta} = \infty$  (la superficie ha curvatura meridionale nulla)  
 $P_{\theta} = z$  (in ogni punto  $\theta = \pi/2$ )  $P_{\theta} = \partial/\partial \theta = z$

- equazione di equilibrio 1

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\sigma_{rr}}{r} = \frac{z}{s} = \frac{P_i - P_e}{s} = \frac{\Delta P}{s}$$

- eq. di eq. 2

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{Q'}{2\pi r s \sin \theta}$$

Dalla prima si ricava

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{z} = \frac{P}{s} \rightarrow \sigma_{\theta\theta} = \frac{P z}{s} \quad (\text{formule delle calotte})$$

Nel caso in questione:

a) non esistono carichi  $Q$

b) la pressione agisce solo sulle pareti (perché non esiste un fondello) e quindi:

$$Q' = 0 \rightarrow \sigma_{\theta\theta} = 0$$

La tensione radiale (ortogonale alla superficie membrana) vale

$$\sigma_r = -P_i \quad \text{all'interno del cilindro}$$

$$\sigma_r = -P_e \quad \text{all'esterno}$$

Normalmente risulta  $P_i > P_e$  (altrimenti il recipiente correrebbe il rischio di accartocciarsi), quindi i punti sottoposti alle maggiori tensioni sono all'interno del cilindro. Essi valgono:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= 0 \\ \sigma_{rr} &= \frac{(P_e - P_i) z}{s} \\ \sigma_z &= -P_i \end{aligned}$$

Calcolo della tensione ideale di Von Mises.

In generale il criterio di Von Mises (valido per materiali duttili) è:

$$2\sigma_{id}^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2$$

Nel caso in questione, la tensione ideale vale:

$$2\sigma_{id}^2 = \left(\frac{\Delta P z}{s}\right)^2 + P_i^2 + \left(\frac{\Delta P z}{s} + P_i\right)^2 = 2\frac{(\Delta P z)^2}{s^2} + \frac{2}{s} P_i \Delta P z + P_i^2 \leq 2\sigma_{amm}^2$$

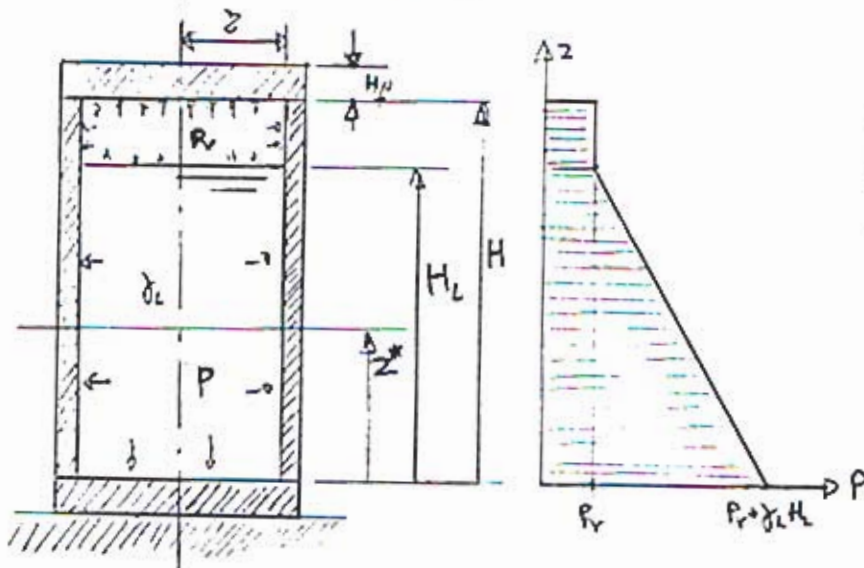
La soluzione dell'equazione precedente nell'incognita  $S$  fornisce lo spessore di progetto del cilindro.

In prima approssimazione, lecito se  $\frac{z}{S} \gg 1$ , risulta

$$2 \frac{(\Delta P z)^2}{S^2} \leq 2 \sigma_{amm}^2$$

$$\Rightarrow S \geq \frac{\Delta P z}{\sigma_{amm}}$$

Reagente cilindrico con fondo interamente liquido in pressione, paggiato al suolo (esempio: pentola a pressione)



$H$  = altezza del tratto cilindrico  
 $H_f$  = altezza dei fondi  
 $H_L$  = altezza del liquido  
 $\gamma_L$  = peso specifico del liquido  
 $\gamma_R$  = peso specifico del reagente  
 $P_v$  = pressione del vapore

Dall'equazione di equilibrio 1:

$$\sigma_u = \frac{Pz}{S}$$

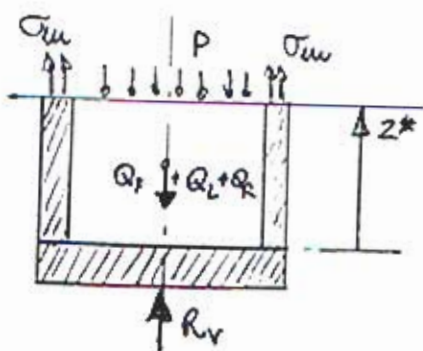
dove:

$$\begin{cases} P = P_v + (H_L - z)\gamma_L & \text{se } z < H_L \\ P = P_v & \text{se } z \geq H_L \end{cases}$$

Equilibrio alla traslazione lungo  $z$

a) mediante l'uso formole dell'equazione  $\sigma_u = \frac{Q'}{2\pi z S \sigma_{amm}}$

(taglio ad altezza generico  $z^*$  e contaggio dei carichi sottostanti)



I carichi  $Q$  diretti verso il basso presenti al di sotto del taglio sono:

- peso del fondo inferiore:  $Q_f = \gamma_R \cdot \pi z^2 H_f$
- peso della parte di reagente compresa tra  $0$  e  $z^*$ :  $Q_R = \gamma_R \cdot 2\pi z^* S z^*$
- peso della parte di liquido compresa tra  $0$  e  $z^*$ :  $Q_L = \gamma_L \pi z^2 z^*$
- la reazione vincolare del suolo (peso reagente)  $-P_v = 2Q_f + \gamma_R \cdot 2\pi z^* S H + \gamma_L \pi z^2 H_L$

Allora, in totale (per  $z^* \leq H_L$ ):

$$\begin{aligned} Q' &= Q + P \cdot \pi z^2 = P \pi z^2 + Q_F + Q_R + Q_L - R_V = \\ &= P \pi z^2 + \gamma_R \cdot \pi z^2 H_F + \gamma_R \cdot 2\pi z S z^* + \gamma_L \pi z^2 z^* - \gamma_R \pi z^2 H_F - \gamma_R \cdot 2\pi z S H - \gamma_L \cdot \pi z^2 H_L = \\ &= P \pi z^2 - \gamma_R \pi z^2 H_F - \gamma_R \cdot 2\pi z S (H - z^*) - \gamma_L \pi z^2 (H_L - z^*) \end{aligned}$$

ma è anche:

$$\begin{aligned} P \pi z^2 &= [P_V + (H_L - z^*) \gamma_L] \pi z^2 \\ \Rightarrow Q' &= P_V \pi z^2 - \gamma_R \pi z^2 H_F - \gamma_R \cdot 2\pi z S (H - z^*) \end{aligned}$$

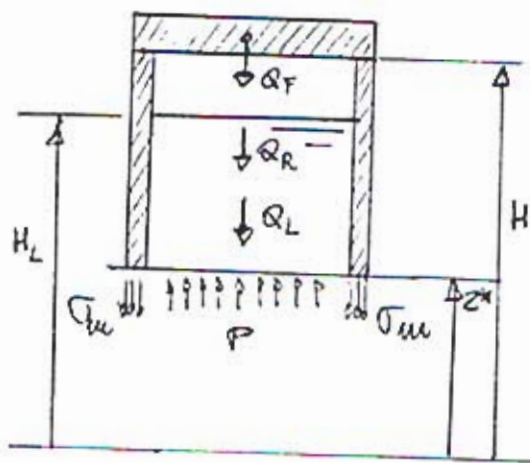
(per  $z^* > H_L$  si ha lo stesso risultato)

Allora, poiché per un cilindro  $\sigma_z = 0$ , si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_{uu} &= \frac{P_V \pi z^2 - \gamma_R \pi z^2 H_F - \gamma_R \cdot 2\pi z S (H - z^*)}{2\pi z S} = \\ &= \frac{P_V z}{2S} - \gamma_R \frac{H_F z}{2S} - \gamma_R (H - z^*) \end{aligned}$$

Si noti che la pressione  $P_V$  tende ad aumentare  $\sigma_{uu}$  (trazione) mentre i pesi del recipiente e del fondo superiore tendono a diminuirlo (compressione).

b) conteggio dei carichi sovrastanti (modo alternativo per trovare  $\sigma_{uu}$ )



- Forza esercitata da  $\sigma_{uu}$ :  $2\pi z S \sigma_{uu}$
- Forza esercitata da  $P$ :  $P \cdot 2\pi z^2$
- Conico  $Q_F = \gamma_R \pi z^2 H_F$
- Conico  $Q_R = \gamma_R 2\pi z S (H - z^*)$  nella parete
- Conico  $Q_L = \gamma_L \pi z^2 (H_L - z^*)$  liquido

Somma di tutte le forze:

$$\begin{aligned} - 2\pi z S \sigma_{uu} + P \pi z^2 - \gamma_R \pi z^2 H_F - \gamma_R \cdot 2\pi z S (H - z^*) - \\ - \gamma_L \pi z^2 (H_L - z^*) = 0 \end{aligned}$$

Sostituendo l'espressione di  $P$  con quella di pag. 6 otteniamo l'espressione precedente di  $\sigma_{uu}$ .

Le tensioni calcolate sono perciò:

$$\begin{cases} \sigma_{uu} = \frac{P_V z}{S}, & \text{se } z > H_L; & \sigma_{uu} = \frac{P_V z}{S} + \gamma_L \frac{(H_L - z) z}{S} & \text{se } z \leq H_L \\ \sigma_{uu} = \frac{P_V z}{2S} - \gamma_R (H - z) - \gamma_R \frac{H_F z}{2S} \\ \sigma_z = -P_V, & \text{se } z > H_L; & \sigma_z = -P_V - \gamma_L (H_L - z) & \text{se } z \geq H_L \end{cases}$$

Se si pone  $\gamma_L = 0$  e si riconduce al caso particolare di recipiente con fluidi contenente gas a pressione  $P_V$ . Se inoltre si trascura il peso del recipiente si ritrovano le due note formule:

$$\sigma_u = \frac{P_V z}{S} ; \sigma_{um} = \frac{P_V z}{2S} ; \sigma_z = -P$$

Per quanto riguarda il progetto o la verifica del serbatoio, si deve notare che il punto più pericoloso si trova all'altezza  $z=0$

(massima  $\sigma_u$ , minima  $\sigma_{um}$ ,  $\sigma_z$  piccola rispetto alle altre due), senza contare gli effetti di bordo, che vanno considerati a parte.

Per  $z=0$ , si ha:

$$\sigma_u = \frac{P_V z}{S} + \frac{\gamma_L H_L z}{S}$$

$$\sigma_{um} = \frac{P_V z}{2S} - \gamma_z H - \gamma_z \frac{H_F z}{2S}$$

$$\sigma_z = -P_V - \gamma_L H_L$$

$$2\sigma_{id}^2 = (\sigma_u - \sigma_{um})^2 + (\sigma_u - \sigma_z)^2 + (\sigma_{um} - \sigma_z)^2 =$$

$$= \left[ \left( \frac{P_V + \gamma_L H_L}{S} z - \left( \frac{P_V - \gamma_z H_F}{2S} z + \gamma_z H \right) \right)^2 + \left[ \left( \frac{P_V + \gamma_L H_L}{S} z + P_V + \gamma_L H_L \right)^2 + \left[ \left( \frac{P_V - \gamma_z H_F}{2S} z - \gamma_z H + P_V + \gamma_L H_L \right)^2 \right] \right]$$

$$= a \left( \frac{z}{S} \right)^2 + b \frac{z}{S} + c \leq 2\sigma_{amm}^2$$

In condizioni limite risulta, ovviamente,

$$a \left( \frac{z}{S} \right)_c^2 + b \left( \frac{z}{S} \right)_c + c = 2\sigma_{amm}^2 ;$$

da questa equazione si ricava, ad esempio lo spessore minimo di progetto  $S_c$ .

In prima approssimazione, se risulta  $\frac{z}{S} \gg 1$ , si possono trascurare i termini costanti nell'equazione precedente e scrivere:

$$2\sigma_{id}^2 = \left[ \left( P_V + H_L \gamma_L - \frac{P_V - \gamma_z H_F}{2} \right)^2 + (P_V + \gamma_L H_L)^2 + \left( \frac{P_V - \gamma_z H_F}{2} \right)^2 \right] \left( \frac{z}{S} \right)^2 =$$

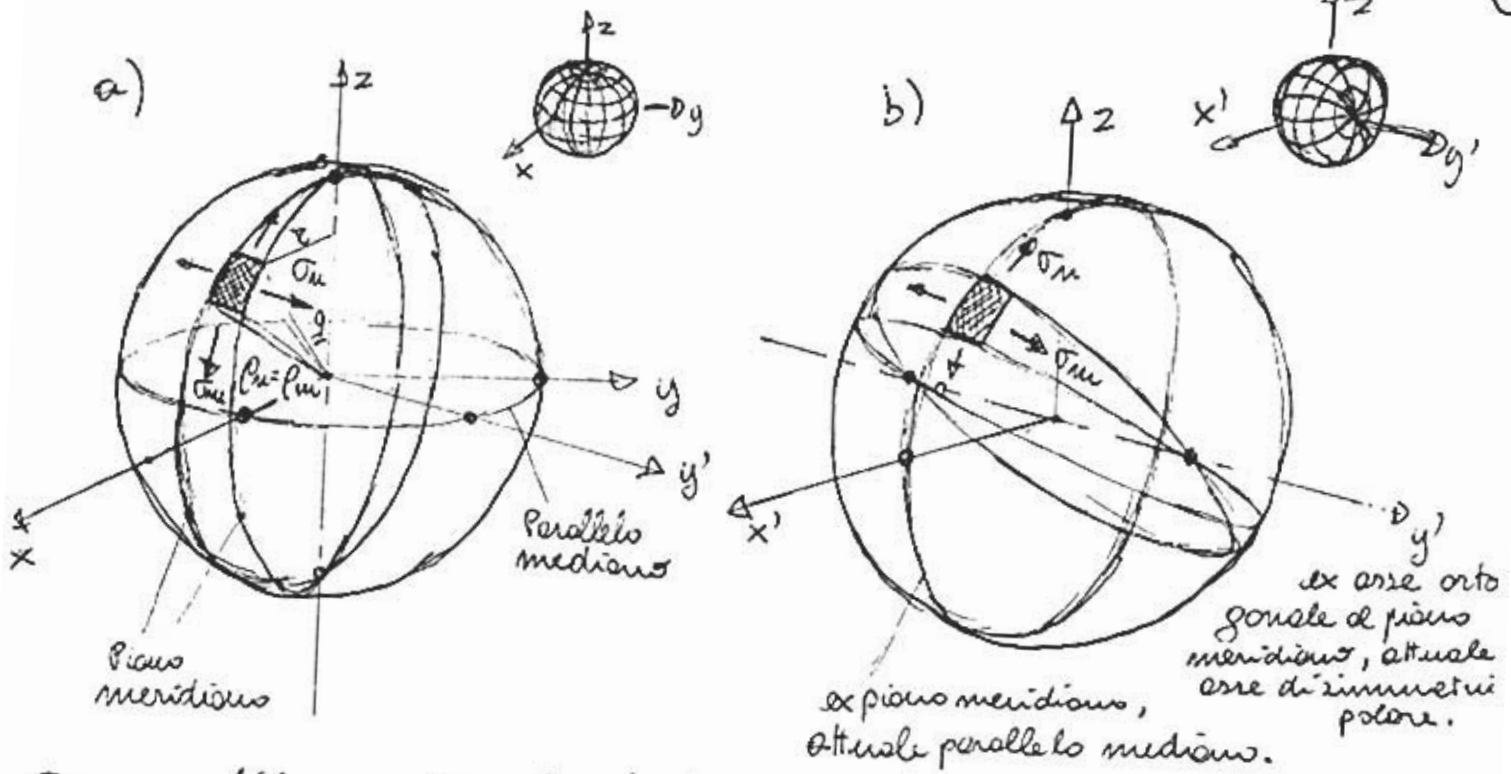
$$= \left[ 2(P_V + \gamma_L H_L)^2 + 2 \left( \frac{P_V - \gamma_z H_F}{2} \right)^2 - 2(P_V + \gamma_L H_L) \left( \frac{P_V - \gamma_z H_F}{2} \right) \right] \left( \frac{z}{S} \right)^2 \leq 2\sigma_{amm}^2$$

$$\Rightarrow \frac{S}{z} \geq \sqrt{\frac{(P_V + \gamma_L H_L)^2 + \left( \frac{P_V - \gamma_z H_F}{2} \right)^2 - (P_V + \gamma_L H_L) \left( \frac{P_V - \gamma_z H_F}{2} \right)}{\sigma_{amm}^2}}$$

nel caso  $\gamma_L = 0$  (gas)  $\gamma_z H_F \ll P$  (per trascurabili), si ha:

$$\frac{S}{z} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{P_V}{\sigma_{amm}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{S_{min}}{z} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{P_V}{\sigma_{amm}}$$

Recipiente sferico in pressione pieno di perso.



Per un solido membranoide sferico ogni retta passante per il centro è un asse di simmetria polare.

Inoltre, risulta sempre  $p_u = p_{uu} = R$  (raggio della sfera).

Per l'arbitrarietà dell'asse di simmetria, uno stesso elemento di membrana può essere visto come in fig. (a) (riferimento abituale con 2 assi di simmetria  $\sigma$  come in fig. (b) in cui è stato scelto un asse di simmetria  $y'$  ortogonale al piano meridiano che delimitava l'elemento nel riferimento (a).

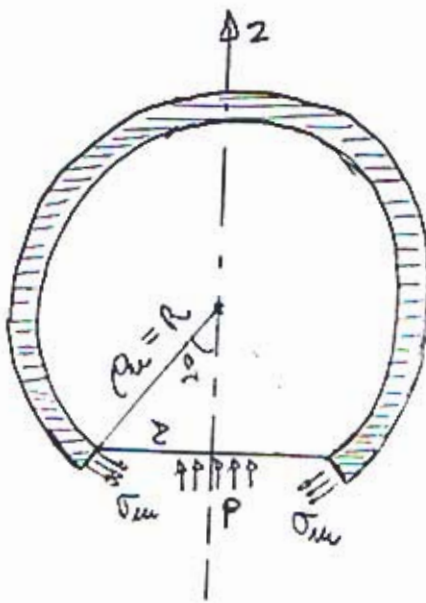
Nel secondo riferimento, nel punto in cui è posto l'elemento, il meridiano e il parallelo si sono scambiati il ruolo rispetto al primo riferimento;

allora  $\sigma_u^{(a)} = \sigma_{uu}^{(b)}$ ;  $\sigma_{uu}^{(a)} = \sigma_u^{(b)}$  e per l'arbitrarietà della scelta dell'elemento risulta sempre  $\sigma_u = \sigma_{uu}$ .

Dall'equazione di equilibrio generale risulta quindi:

$$\frac{\sigma_u}{R} + \frac{\sigma_{uu}}{R} = \frac{p}{S} \Rightarrow \frac{2\sigma_u}{R} = \frac{2\sigma_{uu}}{R} = \frac{p}{S} \Rightarrow \sigma_u = \sigma_{uu} = \sigma = \frac{pR}{2S}$$

Alternativamente, si può procedere in modo esornico, determinando prima  $\sigma_{uu}$  mediante l'equilibrio alla trazione esuale e poi  $\sigma_u$  mediante l'equazione di equilibrio generale.



Equilibrio della traslazione assiale

a) carico assiale agente sulla superficie di taglio:

$$P\pi z^2$$

b) Forza esercitata da  $\sigma_m$  proiettata sull'asse z

$$(\sigma_m 2\pi z s) \cdot 2\pi z s$$

$$\Rightarrow \sigma_m 2\pi z s \cdot 2\pi z s = P\pi z^2$$

$$\Rightarrow \sigma_m = \frac{Pz}{2s2\pi z s}$$

d'altra parte, risulta  $z = p r \cos \alpha = R \cos \alpha \Rightarrow \sigma_m = \frac{PR}{2s}$ .

Applicando l'equazione di equilibrio generale, si ha

$$\frac{\sigma_m}{R} + \frac{\sigma_m}{s} = \frac{P}{s} \Rightarrow \frac{\sigma_m}{R} = \frac{P}{s} - \frac{\sigma_m}{s} = \frac{P}{s} - \frac{P}{2s} = \frac{P}{2s} \Rightarrow \sigma_m = \frac{PR}{2s}$$

e ritroviamo il risultato già stabilito mediante considerazioni di simmetria.

Applicando il criterio di Von Mises con le tensioni calcolate si ha:

$$\sigma_m = \frac{PR}{2s}; \quad \sigma_m = \frac{PR}{2s}; \quad \sigma_z = -P$$

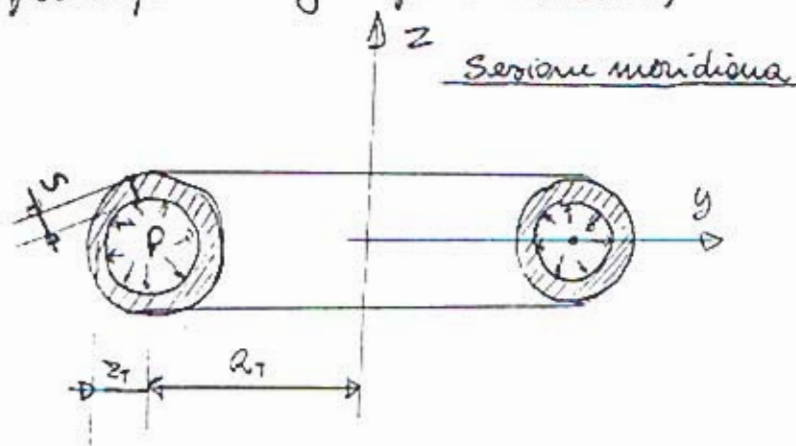
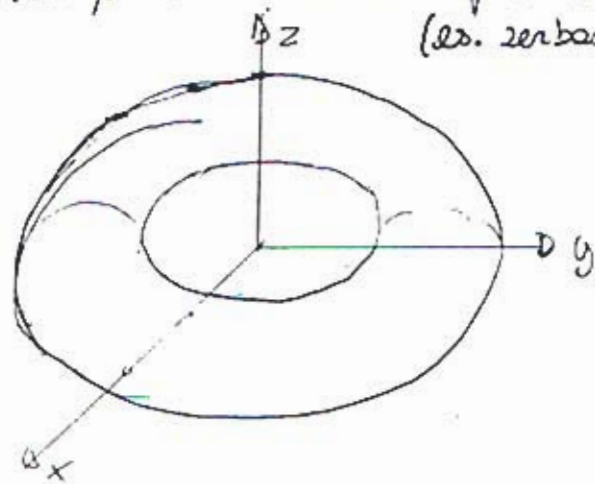
$$2\sigma_{id}^2 = 0 + \left(\frac{PR}{2s} + P\right)^2 + \left(\frac{PR}{2s} + P\right)^2 = 2\left(\frac{PR}{2s} + P\right)^2 \leq 2\sigma_{amm}^2$$

$$\Rightarrow \frac{PR}{2s} + P \leq \sigma_{amm}$$

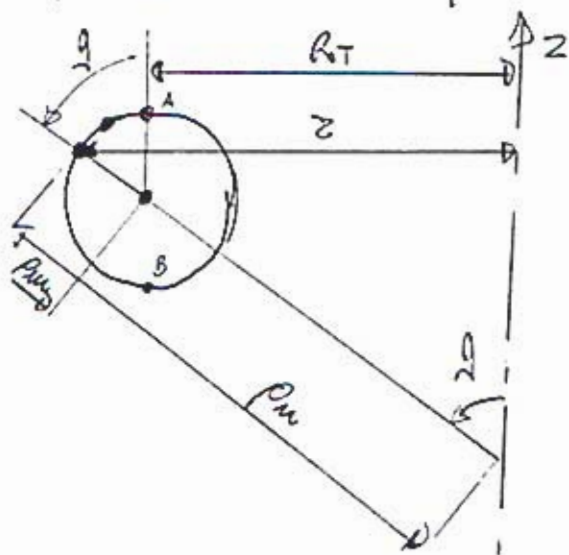
$$\Rightarrow \frac{s}{R} \geq \frac{P}{2(\sigma_{amm} - P)} \Leftrightarrow s_{min} = \frac{PR}{2(\sigma_{amm} - P)}$$

Recipiente toroidale in pressione, pieno di peso.

(es. serbatoio per impianto a gas per automobili)



1) determinazione di  $\rho_m$  e  $\rho_n$



Per il punto generico della superficie individuato nelle sezione dell'angolo  $\theta$  risulta:

$$\rho_m = z_T$$

$$\rho_m \sin \theta = z = R_T + z_T \sin \theta$$

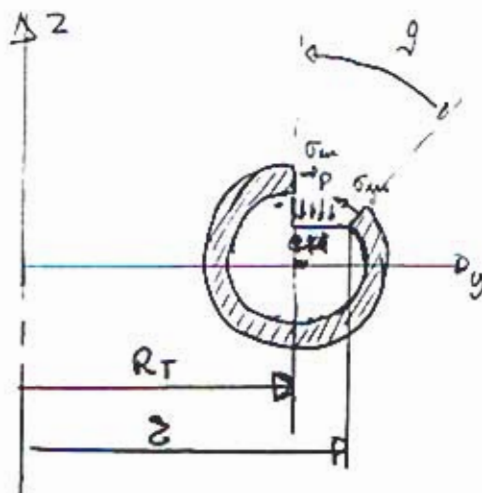
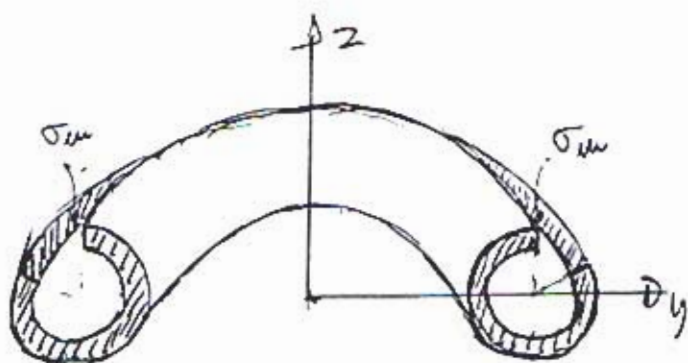
$$\Rightarrow \rho_m = z_T + R_T / \sin \theta$$

Per  $\theta = k\pi$  si ha  $\sin \theta = 0 \Rightarrow \rho_m = \infty$  (Punti A. e per  $-\pi < \theta < 0$   $\rho_m < 0$ ).

I punti in cui le curvature hanno segni oppo si chiamano punti di sella.



2) calcolo di  $\sigma_m$  mediante l'imposizione dell'equilibrio assiale



- Proiezione sull'asse z delle forze esercitate da  $\sigma_m$

$$(\sigma_m \sin \varphi) \cdot 2\pi z S$$

- forza esercitata dalla pressione

$$P(\pi z^2 - \pi R_T^2)$$

equilibrio:

$$\sigma_m \sin \varphi \cdot 2\pi z S = P(\pi z^2 - \pi R_T^2)$$

Ponendo  $z = R_T + z_T \sin \varphi$  (pag. 10)

si ha, dopo le semplificazioni:

$$\sigma_m = \frac{P z_T}{2S} \cdot \frac{2R_T + z_T \sin \varphi}{R_T + z_T \sin \varphi}$$

3) calcolo di  $\sigma_m$  mediante l'equazione indefinita dell'equilibrio

$$\frac{\sigma_u}{\rho_u} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{P}{S} \Rightarrow \sigma_u = \rho_u \left( \frac{P}{S} - \frac{\sigma_m}{\rho_m} \right)$$

Sostituendo i valori di  $\rho_u$  e  $\rho_m$  si ha, dopo le opportune semplificazioni:

$$\sigma_u = \frac{P z_T}{2S}$$

4) determinazione dello spessore di progetto mediante il criterio di Von Mises e quello della massima tensione.

$$\sigma_u = \frac{P z_T}{2S} ; \sigma_m = \frac{P z_T}{2S} \frac{2R_T + z_T \sin \varphi}{R_T + z_T \sin \varphi} ; \sigma_z = -P$$

$\sigma_m$  è massima per  $\varphi = -\pi/2$  e vale:

$$\sigma_m^* = \frac{P z_T}{2S} \frac{2R_T - z_T}{R_T - z_T}$$

a) Criterio della max tensione:

$$\sigma_{id(1)} = \sigma_m^* \leq \sigma_{amm(1)} \Rightarrow S \geq \left( \frac{P z_T}{2} \cdot \frac{2R_T - z_T}{R_T - z_T} \right) \frac{1}{\sigma_{amm(1)}}$$

b) criterio di Von Mises (ponendo, per semplificare,  $\sigma_z = 0$ )

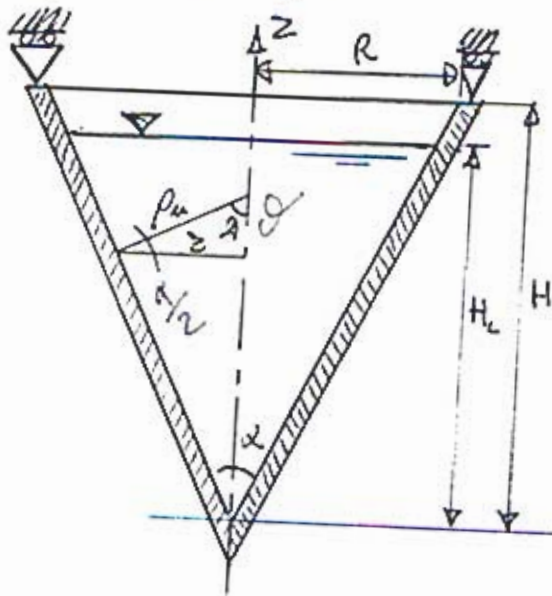
$$2\sigma_{id(2)}^2 = \left( \frac{P z_T}{2S} - \frac{P z_T}{2S} \frac{2R_T - z_T}{R_T - z_T} \right)^2 + \left( \frac{P z_T}{2S} \right)^2 + \left( \frac{P z_T}{2S} \frac{2R_T - z_T}{R_T - z_T} \right)^2 =$$

$$= \left( \frac{P z_T}{2S} \right)^2 \cdot \frac{6R_T(R_T - z_T) + 2z_T^2}{(R_T - z_T)^2} \leq 2\sigma_{amm(2)}^2$$

$$\Rightarrow S \geq \left( \frac{P z_T}{2} \cdot \frac{1}{R_T - z_T} \sqrt{3R_T(R_T - z_T) + z_T^2} \right) \frac{1}{\sigma_{amm(2)}}$$

Recipiente conico sospeso contenente liquido  
(esempio: parte inferiore di un silo)

(13)



1) raggi di curvatura e caratteristiche geometriche:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

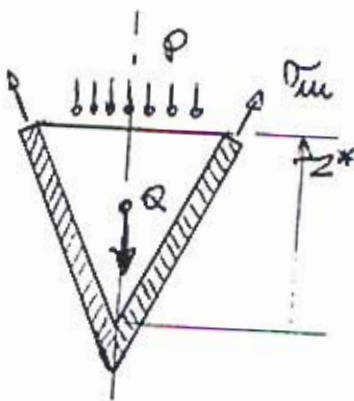
$$\frac{R}{H} = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\tan \varphi}$$

$$\Rightarrow r(z) = \frac{R}{H} z = \frac{z}{\tan \varphi}$$

$$\rho_m = \infty; \quad \rho_m = r / \sin \varphi = z / (\sin \varphi \tan \varphi)$$

2) determinazione delle tensioni

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\rho_m} + \frac{\sigma_{rr}}{\rho_m} = \frac{p}{s} \Rightarrow \sigma_{rr} = \rho_m \frac{p}{s} = \frac{\rho z}{5 \sin \varphi \tan \varphi}$$



$$\sigma_{rr} = \frac{Q'}{2\pi z s \sin \varphi}$$

$$Q' = p \cdot \pi z^2 + Q = \gamma_L (H_L - z^*) \pi z^2 + Q_L + Q_F$$

$$Q_L = \frac{\pi}{3} z^2 z^* \gamma_L \quad (\text{peso del liquido da } 0 \text{ a } z^*)$$

$$Q_F = \frac{\pi}{3} \frac{2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{2 \sin^2 \varphi} 5 z^2 z^* \gamma_R \quad (\text{peso del recipiente da } 0 \text{ a } z^*, \text{ ottenuto sottraendo i volumi del caso esterno ed interno})$$

Portando tutto in funzione di  $z$ , si ha:

$$Q' = \pi \gamma_L \frac{(H_L - z^*) z^{*2}}{\tan^2 \varphi} + \frac{\pi}{3} \gamma_L \frac{z^{*3}}{\tan^2 \varphi} + \frac{\pi}{3} \gamma_R \frac{2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{2 \sin^2 \varphi} z^{*2} s$$

$$2\pi z s \sin \varphi = 2\pi z s \sin \varphi / \tan \varphi$$

$$\Rightarrow \sigma_{rr} = \frac{\gamma_L (H_L - z^*) z^*}{2 s \sin \varphi \tan \varphi} + \frac{\gamma_L z^{*2}}{6 s \sin \varphi \tan \varphi} + \gamma_R \frac{2 \sin^2 \varphi + 1}{6 \sin^2 \varphi} z^*$$

3) calcolo dello spessore minimo mediante il criterio di V.M.

Per semplicità consideriamo  $\sigma_{\theta\theta} = 0$ ,  $Q_F = 0$  (lecito quando  $z/s \gg 1$ ):

$$\sigma_{rr} = \frac{\gamma_L (H_L - z) z}{2 s \sin \varphi \tan \varphi}; \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\gamma_L}{6 s \sin \varphi \tan \varphi} (3(H_L - z) z + z^2); \quad \sigma_z = 0$$

Occorre trovare i punti in cui le tensioni sono massime (o minime) (3)  
 Le  $\sigma_u$  massima si trova eguagliando a 0 la derivata:

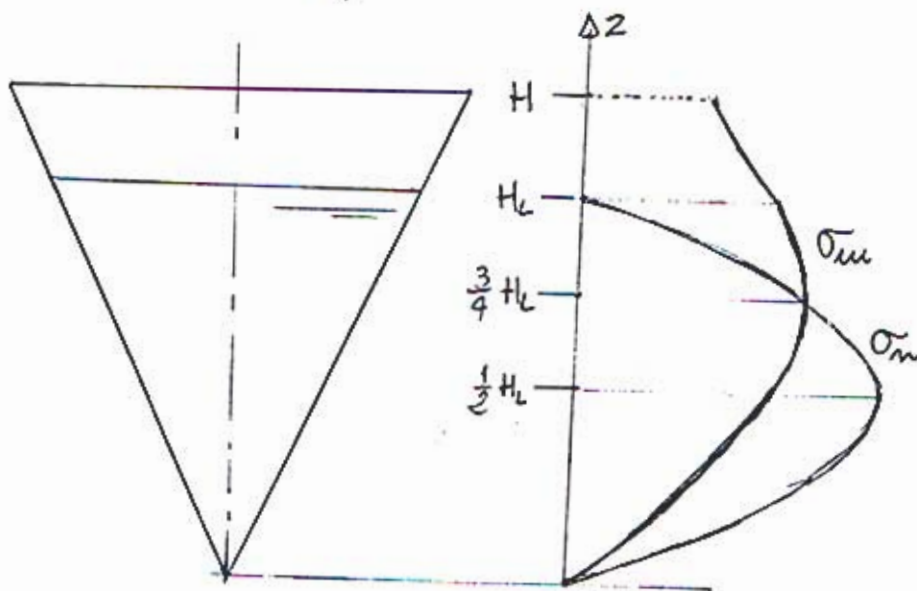
$$\frac{d\sigma_u}{dz} = \frac{\gamma_L}{52000 \cdot 9.81} (H_L - 2z) = 0 \Rightarrow z = \frac{H_L}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma_u^{\max} = \sigma_u \Big|_{z=\frac{H_L}{2}} = \frac{\gamma_L H_L^2}{4 \cdot 52000 \cdot 9.81}$$

Si procede allo stesso modo per  $\sigma_m$ :

$$\frac{d\sigma_m}{dz} = \frac{\gamma_L}{65200 \cdot 9.81} (3H_L - 6z - 2z) = 0 \Rightarrow z = \frac{3}{4} H_L$$

$$\Rightarrow \sigma_m^{\max} = \sigma_m \Big|_{z=\frac{3}{4} H_L} = \frac{3}{16} \frac{\gamma_L H_L^2}{52000 \cdot 9.81} < \sigma_u^{\max}$$



I punti potenzialmente più pericolosi sono:

$$z = \frac{1}{2} H_L ; z = \frac{3}{4} H_L ; z = H_L$$

	$z = H_L/2$	$z = 3/4 H_L$	$z = H_L$
$\frac{\sigma_u}{\gamma_L H_L^2} \cdot 52000 \cdot 9.81$	1/4	3/16	0
$\frac{\sigma_m}{\gamma_L H_L^2} \cdot 52000 \cdot 9.81$	1/6	3/16	1/6
$\frac{\sigma_{id}}{\gamma_L H_L^2} \cdot 52000 \cdot 9.81$	0.312	0.265	0.236

La massima  $\sigma_{id}$  calcolata è relativa al punto  $z = H_L/2$  e vale:

$$\sigma_{id} = 0.312 \frac{\gamma_L H_L^2}{52000 \cdot 9.81} \Rightarrow \sigma_{id} = 0.312 \frac{\gamma_L H_L^2}{(\text{peso} \cdot \text{prof}) \cdot \sigma_{amm}}$$

Attenzione! Anche se si procede normalmente in questo modo, dal punto di vista matematico questo risultato non è corretto. Infatti, per calcolare la max  $\sigma_{id}$  bisogna prima calcolare  $\sigma_{id}(z)$  e poi derivare su  $z$  per trovare il massimo.

In questo caso, il risultato esatto vale, alla terza cifra decimale, quanto quello prima calcolato (anche se è lievemente superiore), che perciò è

~~quasi~~ ingegneristicamente corretto.