Università degli Studi di Napoli Federico II
Dipartimento di Ingegneria Industriale

Teorema di Buckingham

Numero di giri specifico

Ogni grandezza fisica ha opportune dimensioni rispetto alle unità di misura delle grandezze fondamentali che per la meccanica sono tre.
Adottata la terna M, L, T e le corrispondenti unità kg, m, s una grandezza fisica Q1 della meccanica avrà il seguente legame dimensionale:

$$[Q_1] = kg^{\alpha_1} \cdot m^{\beta_1} \cdot s^{\gamma_1}$$

Considieriamo la pressione *p* $$[p] = \frac{N}{m^2}$$

poichè $$[F] = kg \cdot m \cdot s^{-2}$$

sarà $$[p] = kg^1 \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$$

E' possibile assumere un'altra terna di grandezze come terna di grandezze fondamentali ?

Si possono determinare tre grandezze Q1, Q2 e Q3 che hanno rispetto M, L,T le dimensioni seguenti

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{matrix} \quad \text{Se e solo se} \longrightarrow \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Questo perché, Q1, Q2 e Q3 devono esprimersi non in termini di L, M e T, ma attraverso la nuova terna di grandezze fondamentali si deve anche poter esprimere M, L e T.

$$[Q_1]=[M]^{\alpha_1}[L]^{\beta_1}[T]^{\gamma_1};$$
$$[Q_2]=[M]^{\alpha_2}[L]^{\beta_2}[T]^{\gamma_2};$$
$$[Q_3]=[M]^{\alpha_3}[L]^{\beta_3}[T]^{\gamma_3}.$$

$$\begin{cases}\log[Q_1]=\alpha_1\log[M]+\beta_1\log[L]+\gamma_1\log[T]\\ \log[Q_2]=\alpha_2\log[M]+\beta_2\log[L]+\gamma_2\log[T]\\ \log[Q_3]=\alpha_3\log[M]+\beta_3\log[L]+\gamma_3\log[T]\end{cases}$$

Per esprimere $\log[M], \log[L]$ e $\log[T]$ in funzione di $\log[Q_1], \log[Q_2]$ e $\log[Q_3]$, occorre che sia

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}\neq 0$$

Infatti, con il metodo di Cramer,

$$\log[M]=\frac{\begin{vmatrix}\log[Q_1] & \beta_1 & \gamma_1\\ \log[Q_2] & \beta_2 & \gamma_2\\ \log[Q_3] & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}\neq 0}$$

Se ciò accade, si potrà esprimere M, L e T in funzione di Q1, Q2 e Q3.

Le tre grandezze vengono dette dimensionalmente indipendenti.
Ciò significa che tramite esse non è possibile costruire un numero puro:

$$[Q_1]^p \cdot [Q_2]^q \cdot [Q_3]^r \neq \text{numero puro semplice}$$

a meno che non sia

$$p = q = r = 0$$

.
Ciò è dimostrabile per assurdo, infatti se

$$[Q_1]^p \cdot [Q_2]^q \cdot [Q_3]^r = \left([M]^{\alpha_1}[L]^{\beta_1}[T]^{\gamma_1}\right)^p \cdot \left([M]^{\alpha_2}[L]^{\beta_2}[T]^{\gamma_2}\right)^q \cdot \left([M]^{\alpha_3}[L]^{\beta_3}[T]^{\gamma_3}\right)^r$$

fosse un numero puro, vorrebbe dire che

$$\alpha_1 p + \alpha_2 q + \alpha_3 r = 0$$
$$\beta_1 p + \beta_2 q + \beta_3 r = 0$$
$$\gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 r = 0$$

ma questo sistema ha soluzione non banale solo se

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

in contraddizione con la condizione di indipendenza dimensionale di Q_1, Q_2 e Q_3.

Così, ad esempio, se fisso la mia attenzione su massa specifica ρ, lunghezza L e velocità U, poiché è:

$$[\rho] = kg^1 \cdot m^{-3} \cdot s^0$$
$$[L] = kg^0 \cdot m^1 \cdot s^0$$
$$[U] = kg^0 \cdot m^1 \cdot s^{-1}$$

si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Ne segue che si possono effettivamente assumere le tre precedenti grandezze come nuova terna di grandezze fondamentali.
Naturalmente una grandezza fisica, ad esempio la viscosità μ che ha dimensioni 1,-1,-1 rispetto a kg, m, s

$$[\mu] = kg^{1} \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$$

avrà rispetto alle unità di misura ρ, L, ed U,

$$[\mu] = [\rho]^{a} \cdot [L]^{b} \cdot [U]^{c}$$

di dimensioni a, b, c.

Poiché la terna ρ, L, ed U è dimensionalmente indipendente, una relazione del tipo (1), vale per qualunque grandezza, nessuna esclusa. Gli esponenti a ,b, c cioè le dimensioni di μ (in questo caso) rispetto alle unità di misura di ρ, L, ed U si determinano scrivendo

$$kg^{1} \cdot m^{-1} \cdot s^{-1} = \left(kg \cdot m^{-3}\right)^{a} \cdot m^{b} \cdot \left(m \cdot s^{-1}\right)^{c}$$

e quindi
$$\begin{cases} 1 = a \\ -1 = -3a + b + c \\ -1 = -c \end{cases}$$

da cui a = 1, b = 1, c = 1.

Allora il rapporto tra μ e $\rho^1 \cdot L \cdot^1 U^1$ è un numero puro.

Teorema di Π o teorema di BUCKINGHAM

Sia y una grandezza fisica che compare in un fenomeno fisico, funzione di altre 5 grandezze:

$$y = f\left(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5\right)$$

nell'ipotesi che Q1, Q2, e Q3 siano della stessa specie di quelle assunte per costruire la nuova terna di grandezze fondamentali e quindi siano dimensionalmente indipendenti, possiamo scrivere

$$y = f\left(Q_1, Q_2, Q_3, \frac{Q_4}{Q_1^{\alpha_4} Q_2^{\beta_4} Q_3^{\gamma_4}} Q_1^{\alpha_4} Q_2^{\beta_4} Q_3^{\gamma_4}, \frac{Q_5}{Q_1^{\alpha_5} Q_2^{\beta_5} Q_3^{\gamma_5}} Q_1^{\alpha_5} Q_2^{\beta_5} Q_3^{\gamma_5}\right) \qquad (1)$$

in cui $\alpha_4, \beta_4, \gamma_4$ sono scelti in modo che

$$\frac{Q_4}{Q_1^{\alpha_4} Q_2^{\beta_4} Q_3^{\gamma_4}}$$ sia un numero puro -> N4

E $\alpha_5, \beta_5, \gamma_5$ sono scelti in modo che

$$\frac{Q_5}{Q_1^{\alpha_5} Q_2^{\beta_5} Q_3^{\gamma_5}}$$ sia un numero puro -> N5

→ Potremo allora scrivere → $y = f'(Q_1, Q_2, Q_3, N_4, N_5)$

La (1) si può trasformare nella forma

$$\frac{y}{Q_1^{\alpha_y} Q_2^{\beta_y} Q_3^{\gamma_y}} \cdot Q_1^{\alpha_y} \cdot Q_2^{\beta_y} \cdot Q_3^{\gamma_y} = f'(Q_1, Q_2, Q_3, N_4, N_5) \qquad (2)$$

Dove $\alpha_y, \beta_y, \gamma_y$ sono scelti in modo che $\frac{y}{Q_1^{\alpha_y} Q_2^{\beta y} Q_3^{\gamma_y}}$ sia un numero pure N_y

$$\frac{y}{Q_1^{\alpha_y} Q_2^{\beta_y} Q_3^{\gamma_y}} \cdot Q_1^{\alpha_y} \cdot Q_2^{\beta_y} \cdot Q_3^{\gamma_y} = f'(Q_1, Q_2, Q_3, N_4, N_5) \qquad (2)$$

Il primo membro dipende dimensionalmente da Q1,Q2, Q3 secondo il prodotto ; per omogeneità dimensionale la dipendenza del secondo membro da Q1,Q2, Q3 deve ridursi al prodotto possiamo allora scrivere

$$N_y \cdot Q_1^{\alpha_y} \cdot Q_2^{\beta_y} \cdot Q_3^{\gamma_y} = Q_1^{\alpha_y} Q_2^{\beta y} Q_3^{\gamma_y} \cdot \varphi(N_4, N_5)$$

$$N_y = \varphi(N_4, N_5)$$

Siamo partiti considerando un fenomeno in cui intervengono 6 grandezze; ne abbiamo scelte 3 come dimensionalmente indipendenti e abbiamo ottenuto una relazione tra numeri puri.
Il ragionamento fatto nelle 6 grandezze con la scelta di 3 grandezze come dimensionalmente indipendenti si poteva ottenere in generale partendo da “n” grandezze e considerando le “m” grandezze indipendenti (m=2 nei problemi di cinematica, m=3 nei problemi di dinamica). In questo caso si ottiene una relazione tra “n-m” numeri puri

TEOREMA DI BUCKINGHAM

SE IN UN FENOMENO FISICO INTERVENGONO “n” GRANDEZZE E “m” È IL NUMERO DELLE GRANDEZZE FONDAMENTALI, IL LEGAME TRA LE “n” GRANDEZZE È RICONDUCIBILE AD UN LEGAME TRA “n-m” NUMERI PURI.

Numero di giri specifico

Gli indici di similitudine geometrica e cinematica sono efficacemente riassunti dal numero caratteristico di giri ns, un parametro che permette di correlare le grandezze che definiscono le prestazioni della macchina (velocit`a di rotazione n, portata volumetrica Q, prevalenza Hp) con i parametrici geometrici e cinematici caratteristici della macchina stessa. Per ricavare l'espressione di ns, si ricorre all'equazione di continuit`a e all'equazione di Eulero

$$Q = \eta_v c_m \Omega = \eta_v c_{2m} \pi b_2 D_2 = \eta_v \frac{c_{2m}}{u_2} u_2 \pi \frac{b_2}{D_2} D_2^2 = \eta_v \pi \delta_2 D_2^2 \varphi_2 u_2$$

$$L = \frac{gH_p}{\eta_{is}} = (u_2 c_{2t} - u_1 c_{1t}) = \psi_2 u_2^2 - \psi_1 u_1^2$$

Ricordando che la velocita periferica e funzione della velocita di rotazione e del diametro:

$$u = \pi D n$$

$$Q = (1/\pi)\eta_v \delta_2\varphi_2 (u_2^3/n^2)$$
$$gHp = \eta_{is} (\psi_2 - \delta^2\psi_1) u^2_2$$

L'equazione di continuita puo quindi essere posta in una forma che contiene soltanto, oltre ad alcune costanti, le grandezze che caratterizzano le prestazioni della macchina (n, Q, Hp) e gli indici di similitudine:

$$Q = (g^{3/2}/\Pi)(\eta_v/\eta_{is}^{3/2})(\delta_2\phi_2/\psi_2 - \delta^2\psi_1)^{3/2}(H_p^{3/2}/n^2)$$

Indici di similitudine geometrica	Indici di similitudine cinematica
$\delta_1 = \dfrac{b_1}{D_1}$	$\varphi_1 = \dfrac{c_{1m}}{u_1}$
$\delta_2 = \dfrac{b_2}{D_2}$	$\psi_1 = \dfrac{c_{1t}}{u_1}$
$\delta = \dfrac{D_1}{D_2}$	$\varphi_2 = \dfrac{c_{2m}}{u_2}$
	$\psi_2 = \dfrac{c_{2t}}{u_2}$

Tabella 1.1. Definizione degli indici di similitudine

Il numero caratteristico di giri (anche detto numero di giri specifico) si ottiene raggruppando a primo membro i termini n, Q e H, ovvero i parametri rappresentativi delle prestazioni della macchina, ed estraendo la radice quadrata:

$$n_s = n\frac{Q^{\frac{1}{2}}}{H_p^{\frac{3}{4}}}$$

Il numero caratteristico di giri, denito secondo l'equazione precedente,
non e un parametro adimensionale; per determinarne il valore, occorre inserire nell'equazione 1.8 il numero di giri reale in [rpm], la portata volumetrica in [m3/s] e la prevalenza in [m]. Cio nonostante, esso puo essere considerato un parametro caratteristico della macchina in quanto puo essere espresso in funzione esclusivamente degli indici di similitudine geometrica e cinematica:

$$n_s = (g^{3/4} / \Pi^{1/2})\,(\eta_v^{\ 1/2} / \eta_{is}^{\ 3/4})(\delta_2 \phi_2)^{1/2} / (\psi_2 - \delta^2 \psi_1)^{3/4}$$

Cio signica che una data macchina, funzionante in condizioni di progetto o, quanto meno, in condizioni di similitudine cinematica con il punto di funzionamento nominale, e univocamente identicata da un unico numero caratteristico di giri. Inoltre, come si vede dalla gura da quanto ora evidenziato emerge che la forma della girante e il numero caratteristico di giri sono strettamente correlati. Di conseguenza, il numero caratteristico di giri svolge un'importante funzione progettuale e di indirizzo nella scelta della macchina adatta a un particolare scopo; ad esempio, per le turbopompe vale la seguente classicazione:

$n_s = 15 \div 40$ giranti centrifughe
$n_s = 50 \div 150$ giranti a flusso misto
$n_s = 120 \div 300$ giranti a flusso assiale