

Marco Barchiesi

Analisi matematica II

Anno accademico 2018-2019,

Corso da 9 CFU (72 ore)

Aggiornato al 13 giugno 2019

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica, dei Materiali, Elettrica, Navale e Logistica, polo SG

Libro di testo. Gli appunti del corso, che trovate nella cartella del materiale didattico. Consiglio di usare anche un libro di testo, per esempio *Analisi Matematica Due*, N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Liguori Editore. Siete comunque liberi di utilizzare altri testi a vostra scelta.

Obiettivi formativi. Fornire i concetti fondamentali, in vista delle applicazioni, relativi al calcolo differenziale e integrale per le funzioni reali di più variabili reali; fare acquisire abilità operativa consapevole.

Qui di seguito la ripartizione del programma lezione per lezione.

Lezione 1 (giovedì 7/03/2019, ore 10:30-12:30, durata 2h)

Successioni di funzioni

- Definizione di convergenza puntuale per successioni di funzioni, esempio.
- La convergenza puntuale non preserva la continuità, esempio (i).
- La convergenza puntuale non preserva la derivabilità, esempio (ii).
- La convergenza puntuale non commuta con l'integrazione, esempio (iii).
- Definizione di convergenza uniforme per successioni di funzioni.
- Definizione di sup-norma di una funzione. Proprietà della sup-norma.
- Riformulazione equivalente della definizione di convergenza uniforme: $f_n \rightarrow f$ uniformemente in $E \subseteq \mathbb{R}$ (per $n \rightarrow \infty$) se e solo se $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ (per $n \rightarrow \infty$). In particolare il grafico di f_n è incluso nell'intorno tubolare del grafico di f .

Lezione 2 (venerdì 8/03/2019, ore 8:30-10:30, durata 2h)

- La convergenza uniforme implica quella puntuale, ma non vale il viceversa. In particolare negli esempi (i) e (iii) non vi è convergenza uniforme.
- Nell'esempio (ii) vi è convergenza uniforme, quindi neanche la convergenza uniforme preserva la derivabilità.
- Teorema: la convergenza uniforme preserva la continuità (cioè: il limite uniforme di una successione di funzioni continue è una funzione continua). Dimostrazione.
- Generalizzazione: scambio dei segni $\lim_{n \rightarrow \infty}$ e $\lim_{x \rightarrow x_0}$. Dimostrazione facoltativa.
- Teorema: scambio dei segni $\lim_{n \rightarrow \infty}$ e $\int_a^b dx$ (teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale). Dimostrazione (nel caso particolare in cui f_n sono funzioni continue e nel caso generale).
- Teorema: scambio dei segni $\lim_{n \rightarrow \infty}$ e $\frac{d}{dx}$ (teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata). Dimostrazione.

Serie di funzioni

- Definizione di convergenza puntuale e uniforme per serie di funzioni.
- Definizione di convergenza totale di una serie di funzioni.
- Criterio di Weierstrass per le serie di funzioni: la convergenza totale implica quella uniforme. Dimostrazione omessa. Esempio di serie totalmente convergente.

Lezione 3 (lunedì 11/03/2019, ore 13:30-15:30, durata 2h)

- La convergenza uniforme non implica quella totale: esempio di serie che converge uniformemente ma non totalmente.
- Teorema: scambio dei segni $\sum_{n=0}^{\infty}$ e $\int_a^b dx$ (teorema di integrazione di una serie termine a termine). Dimostrazione.
- Teorema: scambio dei segni $\sum_{n=0}^{\infty}$ e $\frac{d}{dx}$ (teorema di derivazione di una serie termine a termine). Dimostrazione.

Serie di potenze

- Definizione di serie di potenze.
- Lemma di Abel. Dimostrazione.
- Definizione di insieme di convergenza e di raggio di convergenza di una serie di potenze.
- Osservazioni varie sul legame tra il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie.
- Teorema: il limite f di una serie di potenze di raggio di convergenza $R > 0$ è di classe C^∞ in $(-R, R)$. Inoltre la serie coincide con la serie di Taylor di f in $(-R, R)$. Dimostrazione.
- Criterio di sviluppabilità in serie di Taylor. Dimostrazione. Esempi.
- Criterio del rapporto (D'Alembert) e della radice (Cauchy-Hadamard) per il raggio di convergenza di una serie di potenze. Dimostrazione.

Lezione 4 (giovedì 14/03/2019, ore 10:30-12:30, durata 2h)

- [Esercizi sulle serie di funzioni.](#)

Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$

- Definizione di spazio vettoriale normato e proprietà fondamentali. Distanza indotta e proprietà fondamentali. Esempi di spazi normati. Convergenza di successioni.
- Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$: definizione della norma euclidea $\|x\| := (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}}$ e della distanza indotta.
- Richiami di algebra lineare: la base canonica $\{e_1, \dots, e_n\}$ di $\mathbb{R}^n$. Ogni vettore $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ si scrive in modo unico come combinazione lineare $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$.
- Il prodotto scalare $x \cdot y$ in $\mathbb{R}^n$. Proprietà fondamentali del prodotto scalare.
- Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz. Dimostrazione omessa.

Lezione 5 (venerdì 15/03/2019, ore 8:30-10:30, durata 2h)

- Ulteriori norme su $\mathbb{R}^n$: le norme $\|x\|_p$ con $p \in [1, +\infty]$. La norma euclidea coincide con $\|\cdot\|_2$.
- Disuguaglianza di Minkowski e Disuguaglianza di Hölder (generalizza Cauchy-Schwartz). Dimostrazioni omesse.

Topologia di $\mathbb{R}^n$

- Definizione di palla aperta, palla chiusa, insieme aperto, insieme chiuso, insieme limitato, insieme compatto. Esempi.
- Teorema di Heine-Borel: un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato. Dimostrazione omessa.
- Punto interno, punto esterno, punto di frontiera, punto di accumulazione, punto isolato. Esempi.
- Interno di un insieme, chiusura di un insieme, frontiera di un insieme. Principali proprietà. Esempi.

Lezione 6 (lunedì 18/03/2019, ore 13:30-15:30, durata 2h)

Successioni di vettori di $\mathbb{R}^n$

- Definizione di successione convergente in $\mathbb{R}^n$ (riscrittura di quella vista per spazi normati).
- Proposizione: la convergenza di una successione in $\mathbb{R}^n$ equivale alla convergenza in $\mathbb{R}$ di tutte le sue componenti. Dimostrazione.

Funzioni di più variabili reali a valori vettoriali

- Funzioni $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Definizione di limite di funzione tramite le norme euclidee in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.
- Proposizione: una funzione $f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x))$ a valori in $\mathbb{R}^m$ converge ad l se e solo se tutte le funzioni componenti f_k convergono ad l_k . Dimostrazione.
- Principali proprietà dei limiti: unicità e linearità. Dimostrazioni come in $\mathbb{R}$.
- Definizione di funzione continua in un punto. Definizione di funzione continua su un insieme.
- Proposizione: la somma, il prodotto scalare e la composizione di funzioni continue è una funzione continua.
- Esempi di funzioni continue. La traslazione, l'omotetia, la norma, la proiezione k -esima, e il prodotto scalare sono funzioni continue. Dimostrazioni.
- Teorema di Weierstrass in $\mathbb{R}^n$. Dimostrazione. Ingredienti necessari ed esempi di funzioni definite su intervalli in $\mathbb{R}$ non aventi massimo o minimo.
- Richiami sul Teorema dei valori intermedi in $\mathbb{R}$, ingredienti necessari. Insiemi connessi (per archi).

Lezione 7 (giovedì 21/03/2019, ore 10:30-12:30, durata 2h)

- Teorema dei valori intermedi in $\mathbb{R}^n$. Dimostrazione.

Tecniche per lo studio del limite di funzioni di più variabili

- Primo criterio per non esistenza del limite: differenza tra limite destro e sinistro lungo una curva. [Esempio di applicazione.](#)
- Secondo criterio per non esistenza del limite: differenza dei limiti lungo due curve distinte. [Esempio di applicazione.](#) Uso di Geogebra3D per la visualizzazione della funzione. Osservazione: il fatto che i limiti lungo le direzioni principali esistano e coincidano non garantisce che il limite della funzione esista.
- Criterio per la continuità in un punto (Hölderianità locale). [Due esempi di applicazione.](#) Osservazione: la condizione è solo sufficiente, ma non necessaria. Esempio.

Lezione 8 (giovedì 21/03/2019, ore 13:30-15:30, durata 2h)

Richiami di geometria

- Definizione di funzione lineare: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dice lineare se soddisfa: (i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$; (ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Proposizione: una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è lineare se e solo se esiste una matrice A di m righe ed n colonne tale che $f(x) = Ax$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.
- Definizione di norma euclidea di una matrice.
- Proposizione: sia A una matrice $m \times n$. Allora $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Dimostrazione.

Calcolo differenziale in più variabili

- Definizione di derivata parziale $\partial_{x_k} f(\bar{x})$ della funzione $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ rispetto alla variabile x_k nel punto $\bar{x}$.
- Definizione di gradiente $\nabla f(\bar{x})$ di una funzione $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nel punto $\bar{x}$.
- Definizione di matrice jacobiana $J_f(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x})$ di una funzione $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ nel punto $\bar{x}$.

- Osservazione: l'esistenza di tutte le derivate parziali $\partial_{x_k} f(\bar{x})$ nel punto $\bar{x}$ non implica la continuità di f in $\bar{x}$. Esempio.
- Significato geometrico delle derivate parziali per funzioni scalari di 2 variabili. Visualizzazione tramite Geogebra3D.
- Definizione di derivata direzionale $\partial_\omega f(\bar{x})$ della funzione $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ rispetto alla direzione ω nel punto $\bar{x}$. Significato geometrico per funzioni scalari di 2 variabili.

Lezione 9 (venerdì 23/03/2019, ore 8:30-10:30, durata 2h)

- Definizione di funzione differenziabile in un punto, definizione di differenziale $df(\bar{x})$ della funzione f nel punto $\bar{x}$.
- Proposizione: $f = (f_1, \dots, f_m)$ a valori in $\mathbb{R}^m$ è differenziabile in $\bar{x}$ se e solo se ciascuna funzione componente f_k , $k = 1, \dots, m$ è differenziabile in $\bar{x}$. Dimostrazione.
- Proposizione: se una funzione f è differenziabile nel punto $\bar{x}$, allora esistono tutte le derivate parziali di f in $\bar{x}$, e $f'(\bar{x})(h) = J_f(\bar{x})h$ per ogni $h \in \mathbb{R}^n$, cioè la matrice che rappresenta il differenziale di f in $\bar{x}$ è la matrice jacobiana di f in $\bar{x}$. Dimostrazione.
- Formula per la derivata direzionale $\partial_\omega f(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot \omega$ quando f è differenziabile. Dimostrazione.
- Interpretazione geometrica del gradiente $\nabla f(\bar{x})$ come direzione in cui è massima la crescita della funzione f a partire dal punto $\bar{x}$.
- Proposizione: sia f differenziabile in $\bar{x}$. Allora f è continua in $\bar{x}$. Dimostrazione.
- Esempi di funzioni che ammettono derivate parziali, ma non sono continue e quindi differenziabili.
- Schema riassuntivo sulle implicazioni tra continuità, derivabilità e differenziabilità.
- Iperpiano tangente e l'equazione che lo individua. Condizioni affinché esista: devono esserci le derivate direzionali in ogni direzione e deve valere la formula che le lega al gradiente. In particolare, se la funzione è differenziabile in un punto $\bar{x}$, allora esiste l'iperpiano tangente al grafico in $\bar{p} = (\bar{x}, f(\bar{x}))$.
- Esempio di funzione che ammette derivate direzionali in ogni direzione, ma queste non soddisfano la formula che le lega al gradiente. In particolare la funzione non è differenziabile. Visualizzazione tramite Geogebra3D.

Lezione 10 (lunedì 25/03/2019, ore 13:30-15:30, durata 2h)

- Teorema del differenziale. Dimostrazione (nel caso $n = 2$, $m = 1$) facoltativa.
- Definizione: $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, è di classe $C^1(A)$ se tutte le sue derivate parziali esistono e sono continue in A .
- Formule per il calcolo del gradiente (combinazione lineare, prodotto e rapporto).
- Differenziabilità della funzione composta $g \circ f$, con $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$. Formula della matrice jacobiana della funzione composta $J_{g \circ f}(\bar{x}) = J_g(f(\bar{x}))J_f(\bar{x})$. Dimostrazione omessa.
- Caso particolare quando $m = p = 1$. [Esempio di calcolo del gradiente.](#)
- Caso particolare quando $n = p = 1$. [Esempio di calcolo del gradiente.](#)
- [Esercizi sul piano tangente.](#)
- Definizione di punto di minimo/massimo locale/globale per funzioni reali di più variabili.
- Teorema di Fermat in più variabili. Dimostrazione.
- Definizione di punto critico: $\bar{x}$ si dice punto critico per f se $\nabla f(\bar{x}) = 0$. Il teorema di Fermat ci dice che per un punto interno questa è condizione necessaria all'essere massimo o minimo locale sotto ipotesi di derivabilità. Il teorema di Fermat nulla dice sui punti di bordo o su quelli interni senza derivabilità.

- La condizione non è sufficiente. Esempio di punto di sella e descrizione della sua geometria: punto critico che è di massimo oppure di minimo lungo differenti direzioni. Visualizzazione tramite Geogebra3D.

Lezione 11 (giovedì 28/03/2019, ore 10:30-12:30, durata 2h)

- [Esercizi sulla continuità, derivabilità, differenziabilità.](#)
- Definizione delle derivate parziali seconde. Matrice hessiana $H_f(\bar{x}) = D^2 f(\bar{x})$ di f nel punto $\bar{x}$.
- Osservazione: in genere gli ordini di derivazione non commutano: $\partial_{x_j} \partial_{x_k} \neq \partial_{x_k} \partial_{x_j}$. Esempi di un funzioni che presentano questo fenomeno (facoltativi).
- Teorema di Schwarz. Dimostrazione omessa.
- Definizione: $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, è di classe $C^2(A)$ se tutte le sue derivate parziali seconde esistono e sono continue in A .
- Osservazione: la composizione di due funzioni di classe C^1 è di classe C^1 ; la composizione di due funzioni di classe C^2 è di classe C^2 .
- Osservazione: se f è di classe C^2 allora la matrice hessiana è simmetrica.

Lezione 12 (venerdì 29/03/2019, ore 8:30-10:30, durata 2h)

- Osservazione: se f è di classe C^2 , la funzione composta $F(s) = f(x + s\omega)$, con $x, \omega \in \mathbb{R}^n$ fissati, ha derivata prima $F'(s) = \nabla f(x + s\omega) \cdot \omega$ e derivata seconda $F''(s) = H_f(x + s\omega)\omega \cdot \omega$. Dimostrazione.
- Formula di Taylor di ordine 1 con resto di Lagrange. Dimostrazione.
- Formula di Taylor di ordine 2 con resto in forma di Lagrange. Dimostrazione.
- Formula di Taylor di ordine 2 con resto in forma di Peano. Dimostrazione.
- Definizione di forma quadratica $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Matrice simmetrica A associata: $F(x) = (Ax) \cdot x$.
- Richiamo sulle matrici simmetriche, loro diagonalizzabilità rispetto la base $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n\}$ degli autovettori di A . Espressione della forma quadratica tramite gli autovalori λ_k di A : $F(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \hat{x}_k^2$.
- Definizione di forma quadratica definita positiva, definita negativa, semidefinita positiva, semidefinita negativa, indefinita. Caratterizzazione di queste proprietà in termini degli autovalori della matrice associata: se gli autovalori di A sono tutti positivi, allora A è definita positiva; se sono tutti negativi, A è definita negativa; se sono tutti ≥ 0 , A è semidefinita positiva; se sono tutti ≤ 0 , A è semidefinita negativa; se A ha un autovalore positivo e uno negativo, allora A è indefinita.
- Osservazione: F è definita positiva se e solo se esiste un $m > 0$ tale che $F(x) \geq m \|x\|^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. F è definita negativa se e solo se esiste un $m < 0$ tale che $F(x) \leq m \|x\|^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.
- Proposizione: capire se una forma quadratica $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è definita/semidefinita/indefinita tramite il determinante della matrice 2×2 associata ad F . Dimostrazione omessa.

Lezione 13 (lunedì 1/04/2019, ore 13:30-15:30, durata 2h)

- Condizioni necessarie del secondo ordine per massimi/minimi. Dimostrazione.
- Condizioni sufficienti del secondo ordine per massimi/minimi. Dimostrazione.
- Classificazione dei punti critici di una funzione in base alla sua matrice hessiana: massimi locali, minimi locali e punti di sella.
- [Esercizi sullo studio di funzioni: uso dell'Hessiano sui punti critici per stabilire se sono massimi e minimi locali. Studio del punto critico nel caso in cui l'Hessiano sia semidefinito \(e quindi inusabile\) tramite analisi dell'incremento locale,](#)

Lezione 14 (giovedì 4/04/2019, ore 10:30-12:30, durata 2h)

- Ancora esercizi sullo studio di funzioni: massimi e minimi locali in presenza di punti di non derivabilità, tecniche elementari per stabilire se punti di massimo/minimo locali sono anche globali (studio dei valori della funzione lungo curve scelte opportunamente).
- Utilizzo di Geogebra3D per visualizzare le funzioni analizzate analiticamente.
- Definizione di insieme di livello. Esempi.
- Perpendicolarità del gradiente alle linee di livello.
- Definizione di funzione definita implicitamente.
- Esempio di funzione implicita, dimostrazione della sua esistenza.
- Teorema di Dini della funzione implicita. Dimostrazione omessa.
- Calcolo delle derivate della funzione implicita.
- Interpretazione geometrica del Teorema del Dini.
- Osservazione sull'usabilità del Teorema del Dini.

Lezione 15 (venerdì 5/04/2019, ore 8:30-10:30, durata 2h)

- Ulteriori osservazioni sulla definizione della funzione implicita: unicità della funzione implicita individuata dall'equazione $f(x) = 0$ quando aggiungiamo la condizione $g(\bar{x}_1) = \bar{x}_2$.
- Esempio della circonferenza.
- Estensione del Teorema del Dini: regolarità della funzione implicita g a partire dalla regolarità di f , formula per le derivate parziali seconde.
- Osservazione sulla sviluppabilità della funzione implicita g tramite formula di Taylor.
- [Esercizi sulle funzioni implicite. Analisi qualitativa della funzione implicita.](#)
- Generalizzazione del teorema del Dini in dimensione tre, interpretazione geometrica.
- [Esercizio sulle funzioni implicite in dimensione tre.](#)

Lezione 16 (lunedì 8/04/2019, ore 13:30-15:30, durata 2h)

- Definizione di massimo e minimo locale vincolato.
- Teorema dei moltiplicatori di Lagrange in $\mathbb{R}^2$. Dimostrazione.
- Definizione di Lagrangiana. Se un punto è di massimo/minimo locale vincolato allora è un punto critico per la Lagrangiana.
- Osservazione: se $\bar{x}$ è un punto di massimo/minimo locale vincolato, allora le linee di livello $f(x) = f(\bar{x})$ e $g(x) = c$ sono tangenti in $\bar{x}$.
- [Esercizio: utilizzo del teorema dei moltiplicatori di Lagrange per lo studio di massimi e minimi vincolati.](#) Analisi con Geogebra3D delle linee di livello.
- Vincoli esplicitabili. Confronto con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
- [Esercizio: utilizzo del metodo diretto per lo studio di massimi e minimi vincolati nel caso di vincoli esplicitabili.](#)

Lezione 17 (giovedì 11/04/2019, ore 10:30-12:30, durata 2h)

Equazioni differenziali ordinarie

- Definizione di equazione differenziale, di ODE e PDE.
- Equazioni differenziali in forma normale, ordine o grado di un'equazione differenziale, problemi di Cauchy di grado $1, \dots, n$.
- Soluzioni di equilibrio.

- Teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy di ordine 1. Dimostrazione omessa.
- Esempio di problema di Cauchy con più soluzioni quando non vi sono ipotesi di lipschitzianità.
- Accenno al Teorema di esistenza locale di Peano per il problema di Cauchy.
- Corollario del teorema di esistenza e unicità del problema di Cauchy (le soluzioni non si toccano): se $u' = f(t, u)$, $v' = f(t, v)$ e $u(t_0) < v(t_0)$, allora $u(t) < v(t)$ per ogni t nell'intervallo in cui entrambe le soluzioni sono definite.
- Teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy di ordine n . Dimostrazione omessa.
- Proposizione: se f e $\partial_y f$ sono continue su $I \times J$, allora f è lipschitziana in y , uniformemente in t su $I \times J$. Dimostrazione. Osservazione: il risultato vale in particolare se $f \in C^1$.
- Teorema di regolarità delle soluzioni: se $f \in C^k$, allora $u \in C^{k+1}$. Dimostrazione.
- Teorema di esistenza globale per il problema di Cauchy. Dimostrazione omessa.

Lezione 18 (venerdì 12/04/2019, ore 8:30-10:30, durata 2h)

- Proposizione: riformulazione integrale del problema di Cauchy. Dimostrazione.
- Equazioni a variabili separabili: soluzioni di equilibrio, metodo generale di risoluzione. [Esercizi](#).
- Equazioni riconducibili ad equazioni a variabili separabili mediante sostituzione.
- Equazioni della forma $u' = g(u/t)$. [Esercizio](#).

Lezione 19 (lunedì 29/04/2019, ore 12:30-15:30, durata 3h)

- **Prova valutativa**

Lezione 20 (giovedì 2/05/2019, ore 10:30-12:30, durata 2h)

Equazioni differenziali lineari

- Definizione: le equazioni differenziali lineari di grado n sono quelle della forma $\mathcal{L}u = b(t)$, dove la scrittura $\mathcal{L}u$ è un'abbreviazione per indicare $\mathcal{L}u := u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \dots + a_1(t)u' + a_0(t)u$. Se $b = 0$ si dicono omogenee, altrimenti si dicono non omogenee.
- Teorema di esistenza globale per le equazioni lineari. Dimostrazione.
- Osservazione sulle proprietà delle equazioni lineari: $\mathcal{L}(\lambda_1 u + \lambda_2 w) = \lambda_1 \mathcal{L}u + \lambda_2 \mathcal{L}w$ per ogni funzione $u(t), w(t)$ e ogni costante $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
- Osservazione sulle soluzioni di un'equazione lineare non omogenea: sia $\mathcal{L}\bar{u} = b(t)$. Allora $\{u : \mathcal{L}u = b(t)\} = \{u = \bar{u} + v : \mathcal{L}v = 0\}$, cioè le soluzioni sono tutte e sole quelle che si ottengono sommando ad una soluzione particolare $\bar{u}$ le soluzioni dell'equazione lineare omogenea associata.
- Proposizione: l'insieme $S := \{u : \mathcal{L}u = 0\}$ (insieme delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea $\mathcal{L}u = 0$) è uno spazio vettoriale, e una sua base è l'insieme $\{u_1, \dots, u_n\}$, dove u_k è la soluzione del problema di Cauchy $\mathcal{L}u = 0$ con dato iniziale $e_k = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$. Dimostrazione facoltativa.
- Definizione di matrice wronskiana W . Teorema del wronskiano. Dimostrazione omessa. Osservazione sul fatto che basta verificare che $\det W \neq 0$ in un punto t_0 .
- Metodo di variazione delle costanti. Soluzione generale per equazioni di ordine 1. Soluzione generale per equazioni di ordine 2.
- Equazioni lineari omogenee di ordine 2 a coefficienti costanti e loro risoluzione. Legame tra le radici del polinomio caratteristico e le soluzioni linearmente indipendenti. Dimostrazione.

Lezione 21 (venerdì 3/05/2019, ore 8:30-10:30, durata 2h)

- Esercizi sulle equazioni lineari omogenee di ordine 2 a coefficienti costanti.
- Esercizio sulle equazioni lineari non omogenee di ordine 2 a coefficienti costanti: soluzione tramite metodo di variazione delle costanti.
- Metodo “di similitudine” per la ricerca di soluzioni particolari di equazioni lineari non omogenee $\mathcal{L}u = b(t)$ nel caso in cui $b(t)$ sia un polinomio, un polinomio trigonometrico, o un polinomio di funzioni esponenziali. Esercizi sulle equazioni lineari non omogenee di ordine 1 e 2 a coefficienti costanti: soluzione tramite questo metodo.
- “Principio di sovrapposizione” per equazioni lineari.

Curve in $\mathbb{R}^n$

- Definizione di curva in $\mathbb{R}^n$, sostegno di una curva, curva semplice, curva chiusa. Esempi. In particolare, elica cilindrica e visualizzazione con Geogebra3D.
- Definizione di curva regolare, curva regolare a tratti, vettore tangente, versore tangente. Equazione della retta tangente ad una curva.
- Definizione di curve equivalenti e di cambiamento ammissibile di parametro. Proprietà della relazione (riflessività, simmetria e transitività) e classi di equivalenza. Esempi.

Lezione 22 (martedì 7/05/2019, ore 10:30-12:30, durata 2h)

- Correzione degli esercizi della prova valutativa. Argomenti: limiti di funzione, serie di potenze, studio di funzioni (derivate direzionali, piani tangenti e punti critici), equazioni differenziali.

Lezione 23 (giovedì 9/05/2019, ore 10:30-12:30, durata 2h)

- Verso di percorrenza, definizione: il punto $p_1 = \gamma(t_1)$ precede il punto $p_2 = \gamma(t_2)$ se $t_1 < t_2$. Due curve equivalenti hanno stesso orientamento [risp. orientamento opposto] se il cambio di parametro ha derivata con positiva [risp. negativa]. Suddivisione della classe di equivalenza di una curva γ nelle curve aventi stesso verso di γ e in quelle aventi verso opposto.
- Definizione di lunghezza $l(\gamma)$ di una curva γ . Significato geometrico. Curve rettificabili. Teorema di rettificabilità per curve di classe C^1 (o C^1 a tratti). In particolare $l(\gamma) = l(\beta)$ se γ e β sono due curve equivalenti. Esempi. Osservazione: $l(\gamma)$ fornisce la lunghezza del supporto se γ è iniettiva, ma non in generale.
- Definizione di ascissa curvilinea. Proprietà dell'ascissa curvilinea. Interpretazione geometrica.
- Definizione di integrale curvilineo $\int_{\gamma} f$ di una funzione f lungo una curva γ . Interpretazione geometrica come area della superficie compresa tra il sostegno della curva e il grafico della funzione.
- Proprietà dell'integrale curvilineo.
- Proposizione: se γ e β sono due curve equivalenti, allora $\int_{\gamma} f = \int_{\beta} f$ per ogni funzione f . Dimostrazione.
- Esercizi su integrali curvilinei.

Forme differenziali lineari in $\mathbb{R}^n$

- Definizione di forma differenziale lineare ω su $\mathbb{R}^n$ associata ad un campo vettoriale F su $\mathbb{R}^n$.
- Definizione di integrale $\int_{\gamma} \omega$ di una forma differenziale ω lungo una curva γ . La quantità $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} F d\gamma$ è il lavoro fatto dal campo F lungo la traiettoria γ .

Lezione 24 (venerdì 10/05/2019, ore 8:30-10:30, durata 2h)

- Proposizione: integrale di una forma differenziale lungo due curve equivalenti. Dimostrazione.
- Definizione di forma esatta, di campo conservativo e di potenziale di un campo conservativo.
- Proposizione: l'integrale di una forma esatta lungo una curva è dato dalla differenza di potenziale nei punti finale e iniziale. Dimostrazione.
- Teorema di caratterizzazione delle forme esatte: una forma è esatta se e solo se ha integrale nullo lungo ogni curva chiusa. Dimostrazione.
- Definizione di forma differenziale chiusa e di campo vettoriale irrotazionale.
- Proposizione: le forme esatte di classe C^1 sono forme chiuse. Dimostrazione.
- Esempio significativo di forma chiusa ω che non è esatta.
- Definizione (non rigorosa) di insieme semplicemente connesso. Vari esempi in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ di insiemi che sono o non sono semplicemente connessi.
- Definizione di insieme stellato rispetto un punto. Gli insiemi stellati sono semplicemente connessi. Gli insiemi convessi sono stellati rispetto ogni loro punto, e quindi semplicemente connessi.
- Teorema: se ω è forma chiusa in A e A è semplicemente connesso, allora ω è esatta in A . Dimostrazione omessa.
- Schema riepilogativo su forme esatte/chiusure e su campi conservativi/irrotazionali.
- [Esercizi su forme differenziali lineari.](#)

Lezione 25 (lunedì 13/05/2019, ore 13:30-15:30, durata 2h)

- [Ulteriori esercizi su forme differenziali lineari.](#)
- Alcuni trucchi per integrare forme differenziali.

Integrali doppi

- Costruzione dell'integrale di Riemann di una funzione f limitata definita su un rettangolo $R \subset \mathbb{R}^2$: partizionamento in sotto-rettangoli, definizione di funzione semplice, definizione di migliore funzione semplice che approssima dall'alto e dal basso f rispetto ad una data partizione, definizione di integrale superiore/inferiore, definizione di somma integrale superiore/inferiore.

Lezione 26 (giovedì 16/05/2019, ore 10:30-12:30, durata 2h)

- Definizione di funzione integrabile secondo Riemann e di integrale doppio, condizione necessaria e sufficiente di integrabilità.
- Teorema: le funzioni continue definite su un rettangolo chiuso sono integrabili. Dimostrazione.
- Definizione di funzione integrabile secondo Riemann in un insieme generico. Significato geometrico dell'integrale nel caso di funzioni positive.
- Definizione di insieme misurabile secondo Peano-Jordan. Proposizione: un insieme è misurabile se e solo se la sua frontiera ha misura nulla. Dimostrazione facoltativa. Osservazione: somma e unione di due insiemi misurabili sono misurabili.
- Teorema: le funzioni continue definite su un rettangolo chiuso sono integrabili su ogni sottoinsieme misurabile incluso nel rettangolo. Dimostrazione. Corollario: funzioni continue definite su un compatto misurabile sono integrabili.
- Teorema: proprietà di linearità, monotonia e additività dell'integrale doppio. Dimostrazione omessa.
- Proposizione: il sottografico di una funzione $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ integrabile secondo Riemann è un insieme misurabile. Dimostrazione.
- Definizione di insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ normale rispetto a x o rispetto a y .

Lezione 27 (venerdì 17/05/2019, ore 8:30-10:30, durata 2h)

- Teorema di riduzione (o di Fubini) su un rettangolo. Dimostrazione. Corollario: formula di riduzione per gli integrali doppi su domini normali.
- [Esercizi sulle formule di riduzione.](#)
- Teorema di cambiamento di variabili per integrali doppi. Dimostrazione omessa.
- Coordinate polari in $\mathbb{R}^2$, determinante Jacobiano associato ed interpretazione geometrica.
- [Risoluzione di integrali doppi tramite formule di riduzione o cambi di variabile. In particolare analisi approfondita sul perché è lecito effettuare l'integrazione.](#)

Lezione 28 (lunedì 20/05/2019, ore 13:30-15:30, durata 2h)

Integrali tripli

- Costruzione dell'integrale di Riemann di una funzione f limitata definita su un parallelepipedo $R \subset \mathbb{R}^3$: partizionamento in sotto-parallelepipedi, definizione di integrale superiore/inferiore, definizione di somma integrale superiore/inferiore, definizione di funzione integrabile secondo Riemann e di integrale triplo.
- Definizione di funzione integrabile secondo Riemann in un insieme generico. Definizione di insieme misurabile secondo Peano-Jordan. Principali risultati (del tutto simili al caso bidimensionale, quindi le dimostrazioni sono state omesse). Proposizione: un insieme è misurabile se e solo se la sua frontiera ha misura nulla. Osservazione: somma e unione di due insiemi misurabili sono misurabili. Teorema: le funzioni continue definite su un rettangolo chiuso sono integrabili su ogni sottoinsieme misurabile incluso nel rettangolo. Corollario: funzioni continue definite su un compatto misurabile sono integrabili.
- Teorema: proprietà di linearità, monotonia e additività dell'integrale triplo. Dimostrazione omessa.
- Proposizione: il sottografico di una funzione $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ integrabile secondo Riemann è un insieme misurabile. Definizione di insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ normale rispetto a z . Formula di integrazione per fili, dimostrazione omessa. [Esercizio.](#)
- Formula di integrazione per sezioni, dimostrazione omessa. [Esercizio.](#)
- Teorema di cambiamento di variabili per integrali tripli. Dimostrazione omessa.
- Coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$. [Esercizio.](#)

Lezione 29 (giovedì 23/05/2019, ore 10:30-12:30, durata 2h)

- Coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$: raggio, latitudine, longitudine. [Esercizio.](#)
- Teorema di Guldino per il volume dei solidi di rotazione. Dimostrazione. Esempio: calcolo del volume di un toro.

Integrali doppi ed integrali curvilinei

- Definizione di frontiera orientata positivamente $\partial^+ D$ di una regione piana D .
- Teorema: formula di Gauss-Green nel piano (sia per domini regolari e semplici, che più in generale per domini decomponibili regolari). Dimostrazione.

Lezione 30 (venerdì 24/05/2019, ore 8:30-10:30, durata 2h)

- Corollario: applicazione della formula di Gauss-Green per il calcolo dell'area di una regione piana.
- [Esercizi sull'applicazione delle formula di Gauss-Green al calcolo degli integrali curvilinei di forme differenziali in dimensione 2.](#)

Superfici

- Definizione di superficie regolare $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e di sostegno di una superficie. Esempio $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ con f in $C^1(D)$.
- Definizione di superfici equivalenti e di cambiamento ammissibile di parametro.
- Equazione del piano tangente ad una superficie e di versore normale ν ad una superficie. Osservazione: superfici equivalenti hanno versore normale nella stessa direzione, mentre può cambiare il verso.

Lezione 31 (venerdì 31/05/2019, ore 8:30-10:30, durata 2h)

- Area della superficie. Osservazione: superfici equivalenti hanno stessa area. Esempio nel caso del grafico di una funzione f in $C^1(D)$. [Esercizio](#).
- Teorema di Guldino per l'area delle superfici di rotazione. Dimostrazione. Esempio: calcolo dell'area di un toro.
- Definizione di integrale superficiale $\int_{\varphi} f$ di una funzione scalare $f(x, y, z)$ su una superficie φ . [Esercizi](#).

Lezione 32 (lunedì 3/06/2019, ore 13:30-15:30, durata 2h)

- Orientamento di una superficie: è dato dal verso del versore normale e suddivide le parametrizzazioni in due sottoclassi. Esempi di superfici orientabili e non (nastro di Möbius).
- Definizione di superfici chiusa, normale uscente ed entrante. Esempi.
- Definizione di superficie $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con bordo $\varphi(\partial D)$. Il suo bordo orientato positivamente è $\varphi(\partial^+ D)$, dove $\partial^+ D$ è il bordo orientato positivamente di D .
- Definizioni di flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie, definizione di circuitazione di un campo vettoriale lungo una curva, e definizione di rotore di un campo.
- Teorema del rotore (o formula di Stokes). Dimostrazione omessa. [Esercizio](#).

Lezione 33 (martedì 4/06/2019, ore 13:30-15:30, durata 2h)

- Definizione di superfici regolare a pezzi.
- Definizione di divergenza di un campo vettoriale.
- Teorema della divergenza. Dimostrazione omessa.
- [Esercizi](#). Osservazione: nell'applicare il teorema della divergenza quando la superficie non racchiude un volume si deve "aggiungere un tappo".

Lezione 34 (martedì 11/06/2019, ore 10:30-13:00, durata 3h)

- [Prova valutativa](#).