Superfici

Le definizioni e gli enunciati dei teoremi oggetto delle lezioni

a cura dei Prof.ri Del Prete e Lignola

Definizione di Superficie semplice di tipo elementare

Un sottoinsieme S di R^3 omeomorfo a un Dominio di Jordan X di R^2 a unico contorno dicesi una **superficie semplice di tipo elementare** e l'omeomorfismo dicesi una **rappresentazione di S di base** X. (Def. 2.10, Cap. V)
Se ϕ è una rappresentazione di S di base X, il sottoinsieme $\phi(Fr(X))$ dicesi il **bordo** di S. I punti di S che non appartengono al bordo diconsi interni ad S.

Proprietá ed esempi di superfici semplici S di tipo elementare:

1. Per ogni dominio di Jordan Y di R^2, esiste una rappresentazione di S di base Y. Il bordo di S non dipende dalla rappresentazione.

2. Se $P = P(u,v)$ è una rappresentazione parametrica di S di base X , le uguaglianze
$x = x(u,v) \quad y = y(u,v) \quad z = z(u,v) \quad (u,v) \in X$
diconsi **equazioni parametriche di S.**

3. Due qualunque punti di S sono gli estremi di una curva semplice aperta i cui punti appartengono ad S

4. Proprietá topologiche: S é un compatto e connesso di R^3. Il bordo di S é una curva semplice e chiusa. L'interno di S nella topologia di R^3 é vuoto.

5. Se f é una funzione continua in un dominio di Jordan X, il Grafico di f rispetto a uno dei tre piani coordinati é una superficie semplice di tipo elementare.

Superfici adiacenti
Due superfici semplici di tipo elementare S ed S' si dicono adiacenti se la loro intersezione é una curva semplice aperta inclusa nei bordi di entrambe. L'unione di due superfici semplici di tipo elementare adiacenti é ancora una superficie semplice.

Superfici senza bordo

Superfici cilindriche e superfici di rotazione

Definizione di Superficie semplice di tipo elementare regolare
Sia X un Dominio di Jordan di R^2 a unico contorno, **generalmente regolare e con frontiera priva di punti cuspidali** ed S una **superficie semplice di tipo elementare** omeomorfa ad X. Una rappresentazione parametrica $P = P(u,v)$ di S di base X dicesi **regolare** se:
- $P(u,v)$ é di classe C^1 in X.
- La matrice Jacobiana di $P(u,v)$ ha rango 2 in X.

S dicesi **regolare** se ha una rappresentazione parametrica regolare.

Proprietá ed esempi di superfici semplici S di tipo elementare regolari (di base X):

1. Se f é una funzione di classe C^1 in un dominio di Jordan X, generalmente regolare con frontiera priva di punti cuspidali, il Grafico di f rispetto a uno dei tre piani coordinati é una superficie semplice di tipo elementare regolare.

2. Se S é regolare e $P_0 = P(u_0, v_0)$ é un punto di S, le rette tangenti in P_0 alle curve semplici e regolari giacenti su S e passanti per P_0 giacciono tutte in uno stesso piano che dicesi **piano tangente in P_0 a S**. Tale piano é individuato dai vettori $P_u(u_0, v_0)$ e $P_v(u_0, v_0)$.

3. Se S é regolare, S si dice orientabile se i due versori normali al piano tangente nel generico punto di S descrivono due campi vettoriali continui.

4. Ogni superficie semplice regolare della quale esista una rappresentazione parametrica globale é orientabile e i versori normali hanno l'espressione $\pm \frac{\mathbf{p_u} \wedge \mathbf{p_v}}{\|\mathbf{p_u} \wedge \mathbf{p_v}\|}$.

5. Ogni rappresentazione parametrica regolare $\mathbf{p}$ di S di base X determina un orientamento sulla superficie, quello tale che il versore normale ha l'espressione $+\frac{\mathbf{p_u} \wedge \mathbf{p_v}}{\|\mathbf{p_u} \wedge \mathbf{p_v}\|}$.

6. Se S é stata orientata, una rappresentazione parametrica si dice concorde o discorde con l'orientamento scelto su S a seconda che questo coincida o sia l'opposto dell'orientamento determinato da $\mathbf{p}$ su S.