GEOMETRIA

INGEGNERIA EDILE - A. A. 2017-2018

A. DE PARIS

0.1. **Premessa.** Per superare l'esame di Geometria, basta conoscere gli argomenti specificati nel programma, come ad esempio: spazi vettoriali, matrici, determinanti, sistemi lineari. Tra le domande d'esame ci potrà dunque essere

- Che cos'è uno spazio vettoriale?
- Che cos'è una matrice?

O simili.

La risposta alle domande del tipo

"che cos'è. . . ?"

è contenuta nelle *definizioni*.

Non basta però conoscere gli oggetti matematici: bisogna sapere anche alcuni fatti (affermazioni) che riguardano tali oggetti. Ad esempio, per conoscere il teorema di Pitagora, non basta conoscere che cosa siano un cateto, l'ipotenusa, il quadrato costruito su di essi, ecc., ma bisogna soprattutto sapere l'affermazione riguardante questi oggetti: il quadrato costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo è equivalente all'unione dei due quadrati costruiti sui cateti.

I fatti (affermazioni) da conoscere sono contenuti nelle *proposizioni*.

Infine, cosa forse più importante, bisogna sapere *perché* sono vere le proposizioni enunciate. Bisogna quindi fare dei ragionamenti.

La risposta alle domande del tipo

"perché è vera la Proposizione . . . ?"

è contenuta nelle *dimostrazioni*.

In buona sostanza, la preparazione "tecnica" di un esame di matematica consiste nello studio di definizioni, proposizioni e dimostrazioni. In effetti lo studente troverà in questo testo anche qualcos'altro: ad esempio *prerequisiti*, *assiomi*, *notazioni*, *osservazioni*, *corollari*, *esempi*, *esercizi*. Ora spiegheremo brevemente in cosa consistono, ma anticipiamo subito che tutte queste cose possono essere viste come particolari tipi di definizioni, proposizioni o dimostrazioni. Cominciamo ad esporre brevemente cosa intendiamo per *prerequisito*.

Quando si spiega che cos'è una certa cosa (cioè si dà una definizione), lo si fa in termini di cose più semplici. Ad esempio, per definire "cateto" c'è bisogno (tra l'altro) di aver prima definito "lato"; per definire "lato" c'è bisogno della definizione di "segmento"; per definire "segmento" c'è bisogno di "insieme" e "punto" . . .. Non si può però andare indietro all'infinito: c'è bisogno di assumere qualcosa come punto di partenza. Ad esempio per noi "insieme" e "punto" saranno "nozioni primitive", non saranno cioè spiegate in termini di altre nozioni più semplici.

Dunque per noi un prerequisito è una "definizione iniziale", è qualcosa che noi assumiamo non abbia bisogno di ulteriore spiegazione. Usiamo la parola "prerequisito" perché tra questi includeremo anche qualche nozione che assumiamo nota non per la sua semplicità, ma perché è stata presentata nei corsi preuniversitari (e in qualche caso è anche richiamata in altri corsi del primo anno). Questi prerequisiti però saranno davvero pochi: il pericolo di non capire qualcosa per "carenza di basi" sarà molto molto basso. In pratica è come se ricominciassimo tutto da zero (o, al Massimo, da tre).

Un discorso analogo può essere fatto per le proposizioni. Quando dimostriamo una proposizione, cioè spieghiamo perché una proposizione è vera, lo facciamo usando il fatto che sono vere altre proposizioni (di solito più semplici). C'è bisogno dunque di assumere qualche proposizione "di partenza". Ad esempio per noi il fatto che *comunque si prendano due punti distinti, esiste una ed una sola retta che li contiene entrambi* sarà una "verità evidente", non sarà cioè dimostrata a partire da altre verità più semplici da comprendere. In questi casi scriveremo **Assioma** invece di **Proposizione**. Dunque per noi un assioma è una "proposizione iniziale", è qualcosa che noi assumiamo non abbia bisogno di ulteriore dimostrazione ([1]).

Per limiti di tempo, dovremo rinunciare a riportare le dimostrazioni di alcune proposizioni. Questo però non significa che per noi tali proposizioni sono assiomi (anche se poi agli effetti pratici è come se lo fossero). Per lo stesso motivo rinunceremo ad enunciare esplicitamente alcuni assiomi e prerequisiti.

Il discorso riguardante *notazioni*, *osservazioni*, *corollari*, *esempi* ed *esercizi* è più semplice:

- **Notazione**: è in effetti una definizione; la differenza è che mentre introducendo una definizione spieghiamo il significato di una certa parola nuova, introducendo una notazione spieghiamo il significato di un certo simbolo nuovo ([2]).
- **Osservazione**: in genere contiene alcune semplici affermazioni e deduzioni, che sarebbe pesante presentare in proposizioni e dimostrazioni separate.
- **Corollario**: segue subito una proposizione, ed è una nuova proposizione la cui dimostrazione si ottiene sulla base della proposizione precedente con poche rapide deduzioni.

Il significato di "esempi" e di "esercizi" dovrebbe essere abbastanza chiaro, quindi non ci soffermiamo.

Dunque la preparazione dell'esame consiste nell'apprendimento delle Definizioni, Proposizioni e Dimostrazioni (e delle loro "varianti"). Questo testo contiene un'esposizione rapida, ma sufficientemente dettagliata, di questi elementi. È pensato soprattutto come supporto per poter ripassare rapidamente gli argomenti in vista dell'esame. D'altra parte, dovrebbe essere utile anche in fase di studio durante il corso. Per questo motivo, al di fuori degli elementi definizione-proposizione-dimostrazione, abbiamo inserito qualche piccolo commento illustrativo o di raccordo. Siccome questi commenti possono essere omessi senza pregiudicare lo sviluppo logico della teoria, talvolta possono contenere delle nozioni non formalmente presentate in precedenza (ma che in genere sono ben conosciute).

Un'illustrazione più ampia viene fatta durante le lezioni. Ma ci teniamo a precisare che quello che si dice "in più" a lezione non è strettamente materia d'esame:

[1] I matematici però preferiscono non assumersi nessuna responsabilità sulla verità degli assiomi, ma soltanto sul fatto che se sono veri gli assiomi, allora sono vere le conseguenze. Quindi, più che come verità evidenti, gli assiomi vanno visti come proposizioni di partenza su cui ragionare.

[2] Spesso le notazioni vengono incluse nelle definizioni, e qualche volta faremo anche noi così.

serve solo come facilitazione all'apprendimento, e per rendere meno pesante l'esposizione. Sconsigliamo vivamente gli studenti di conservare gli appunti di tutto ciò che si dice a lezione: appesantirebbe troppo il ripasso finale.

Naturalmente, lo studio di questi argomenti non è fine a sé stesso: serve come strumento per la risoluzione di problemi di vario tipo. Per questo, l'effettivo apprendimento delle definizioni e dei risultati trattati si controlla soprattutto risolvendo esercizi.

1. Fondamenti

Il contenuto di questa sezione non è in genere oggetto di domande in sede di esame. Serve per stabilire in maniera chiara e molto rigorosa tutte le nozioni fondamentali, in modo da evitare ambiguità o possibili incomprensioni nei contenuti successivi. Per questo motivo, conviene leggere attentamente e capire, ma non è necessario preoccuparsi di memorizzare.

1.1. Insiemi.

Prerequisito 1.1. *Assumiamo come note la nozione di* insieme *e di* elemento *di un insieme.*

Per dire che x è un elemento di un insieme X, useremo anche altre espressioni, come ad esempio: "x appartiene a X", "x sta in X", "X ha x come elemento", ecc.

Notazione 1.2. *Riportiamo qui alcune notazioni abbreviative molto usate:*

Simbolo	**Significato**
$\in$	*appartiene a*
$\notin$	*non appartiene a*
$\ni$	*ha tra i suoi elementi*
$=$	*uguale a*
$\neq$	*diverso da*
$:=$	*uguale per definizione a*
$\forall$	*per ogni*
$\exists$	*esiste*
$\exists!$	*esiste un solo*
$\mid$	*tale che*
$\Rightarrow$	*implica che*
$\Leftarrow$	*è conseguenza di*
$\Leftrightarrow$	*equivale a*
$:\Leftrightarrow$	*equivale per definizione a*

Notazione 1.3. *Un insieme può essere presentato scrivendo tra parentesi graffe* $\{\cdots\}$ *chi sono i suoi elementi. In particolare l'insieme vuoto, cioè privo di elementi, si può indicare con* $\{\}$*, anche se si usa più spesso il simbolo* $\emptyset$.

Definizione 1.4. *Siano X e Y insiemi. Se avviene che*

$$\forall x \in X \text{ si ha } x \in Y \ ,$$

potremo dire che X è incluso *(o* contenuto*) in Y, che Y* include *(o* contiene*) X, o anche che X è un* sottoinsieme *di Y. In tal caso si potrà scrivere*

$$X \subseteq Y \ ,$$

o anche, in forma invertita,

$$Y \supseteq X \ .$$

Se abbiamo un'inclusione $X \subseteq Y$ con $X \neq Y$ possiamo aggiungere gli avverbi propriamente *o* strettamente *ai termini "incluso", "contenuto", "include", "contenente", e l'aggettivo* proprio *al termine "sottoinsieme"; in tal caso potremo anche scrivere $X \subsetneq Y$, o $Y \supsetneq X$.*

In molti testi si usano i simboli $\subseteq$ e $\subset$ per "incluso" e "incluso propriamente". In alcuni altri si usano invece $\subset$ e $\subsetneq$.

Osservazione 1.5. *Siano X e Y insiemi. Si ha $X \subseteq Y$ se e solo se vale l'implicazione*

$$x \in X \Rightarrow x \in Y \ .$$

Inoltre abbiamo

$$X = Y \iff X \subseteq Y \text{ e } Y \subseteq X \ .$$

Il motivo è sostanzialmente un assioma: X è uguale ad Y se e solo se ogni elemento di x è anche elemento di Y ed ogni elemento di Y è anche elemento di X; in altri termini, se e solo se vale l'equivalenza

$$x \in X \iff x \in Y \ .$$

Definizione 1.6. *Siano X ed Y insiemi.*

- *L'*intersezione *di X e Y è l'insieme i cui elementi sono gli elementi che stanno sia in X, sia in Y.*
- *L'*unione *di X e Y è l'insieme i cui elementi sono tutti gli elementi di X, tutti gli elementi di Y, e nessun altro.*
- *La* differenza *tra X e Y è l'insieme i cui elementi sono gli elementi di X che non appartengono a Y.*

Useremo le notazioni $X \cap Y$, $X \cup Y$ e $X \smallsetminus Y$ rispettivamente per l'intersezione, l'unione e la differenza.
Gli insiemi X ed Y si dicono disgiunti *se $X \cap Y = \emptyset$.*

Nel caso in cui $Y \subseteq X$, la differenza $X \smallsetminus Y$ può anche essere chiamata *complemento* o *(sotto)insieme complementare* di Y rispetto ad X.

1.2. **Numeri naturali.** Cose fondamentali e molto conosciute, che potrebbero essere assunte come prerequisiti, spesso vengono invece definite sulla base della nozione di insieme (che per noi è "primitiva", un prerequisito).

Definizione 1.7. *Definiamo* zero, uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove*, denotati rispettivamente con* $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$*, nel modo seguente:*

$$0 := \emptyset \ , \quad 1 := \{0\} \ , \quad 2 := \{0,1\} \ , \quad 3 := \{0,1,2\} \ , \quad 4 := \{0,1,2,3\} \ ,$$
$$5 := \{0,1,2,3,4\} \ , \quad 6 := \{0,1,2,3,4,5\} \ , \quad 7 := \{0,1,2,3,4,5,6\} \ ,$$
$$8 := \{0,1,2,3,4,5,6,7\} \ , \quad 9 := \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\} \ .$$

Conviene mantenere una certa distinzione tra i simboli 0 e $\emptyset$, anche se per noi sono la stessa cosa: useremo l'uno o l'altro a seconda del contesto ([3]).

[3] C'è poi anche la questione della distinzione tra zero e la lettera "O" (per cui in certi ambiti informatici il simbolo per indicare zero viene sbarrato, un po' come per l'insieme vuoto), ma questo è un fatto diverso.

Notiamo che $1 = 0 \cup \{0\}$, $2 = 1 \cup \{1\}$, $3 = 2 \cup \{2\}$, eccetera. L'insieme dei numeri naturali può essere quindi definito come segue.

Proposizione 1.8. *Esiste un unico insieme ω tale che:*

- $0 \in \omega$*;*
- $n \in \omega \Rightarrow n$ *è un insieme e* $n \cup \{n\} \in \omega$*;*
- *ogni insieme X tale che*
  - $0 \in X$ *e*
  - $x \in X \Rightarrow x$ *è un insieme e* $x \cup \{x\} \in X$*,*

  contiene ω.

Questa proposizione è abbastanza evidente, ma potrebbe essere anche dimostrata sulla base di assiomi ancora più evidenti (tra cui l'esistenza di un insieme che soddisfa le prime due proprietà). Rinunciamo a farlo per lasciare spazio a cose di maggior interesse per il corso di Geometria.

Definizione 1.9. *L'insieme che abbiamo chiamato ω nella proposizione 1.8 sarà d'ora in poi invece denotato con $\mathbb{N}_0$. Gli elementi di $\mathbb{N}_0$ sono i* numeri naturali*. Per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, $n \cup \{n\}$ è il* successivo *di n, e diremo anche che n è il precedente di $n \cup \{n\}$.*
Useremo anche la notazione $\mathbb{N}$ per $\mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$.

La definizione ora presentata è abbastanza diffusa, ma ne esistono anche di diverse.

Notazione 1.10. *Un elenco di numeri naturali che inizia da un certo n e contiene via via tutti i successivi fino ad un certo m, può venir scritto anche in forma abbreviata: $n, \dots, m$. Allo stesso modo, quando questi numeri vengono usati come indici per una lettera, come ad esempio x, si potrà scrivere $x_n, \dots, x_m$ come abbreviazione per l'elenco che parte da x_n e contiene via via le x con gli indici successivi fino ad m.*

Ad esempio $0, \dots, 3$ è un'abbreviazione per $0, 1, 2, 3$; o anche $a_1, \dots, a_5$ è un'abbreviazione per a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

1.3. **Funzioni.** Un'altra cosa molto fondamentale che viene invece definita sulla base degli insiemi sono le coppie ordinate. Parlando informalmente, una coppia ordinata è un insieme con due elementi, ma con un'informazione in più: chi sia il "primo". Quindi una coppia ordinata (a, b) può essere definita come $\{\{a, b\}, \{a\}\}$ (definizione di Kuratowski), o anche come $\{\{a, b\}, a\}$. Qui di seguito usiamo un trucco ancora diverso; inoltre non usiamo il termine "coppia ordinata" (che comparirà più avanti in un contesto un po' più generale) e anche la notazione qui è un po' diversa.

Notazione 1.11. *Dati elementi qualsiasi a, b (che potrebbero essere anche uguali), indichiamo con*

$$(a \mapsto b)$$

l'insieme

$$\{\,\{0, a\}\,, \{1, b\}\,\}\ .$$

Osservazione 1.12. *Si ha*

$$(a \mapsto b) = (c \mapsto d) \iff a = c \text{ e } b = d\ .$$

Spiegare perché non è così facile come sembra: lo abbiamo fatto a lezione (e, come tutto questo paragrafo di fondamenti, non è una cosa che si chiede in sede d'esame).

In particolare $(a \mapsto b)$ può essere uguale a $(b \mapsto a)$ solo quando $a = b$.

Il fatto ora osservato aiuta anche a capire perché $(a \mapsto b)$ può essere anche interpretata come una coppia ordinata. Infatti le coppie ordinate operano una distinzione tra (a, b) e (b, a), cosa che con i semplici insiemi di due elementi non si può fare. Se si pensa alle coordinate dei punti del piano (cose che tratteremo più avanti), si capisce anche che spesso non è l'ordine che conta, ma il fatto che ai due numeri si attribuisce un diverso "significato" (non ci sono particolari motivi per dire che "orizzontale" viene prima di "verticale"; anzi, addirittura un sistema di riferimento non deve nemmeno essere obbligatoriamente disposto orizzontalmente e verticalmente).

Definiamo ora una funzione come un insieme di elementi, tutti del tipo $(a \mapsto b)$, dove però per ciascun a non ci può essere più di un elemento che "parte da a".

Definizione 1.13. *Una* funzione *è un insieme f tale che*

$$\forall x \in f \; \exists a \,|\, \exists! b \,|\, x = (a \mapsto b) \; .$$

Nella maggior parte dei testi si usano proprio le coppie ordinate (a, b) (che noi definiremo tra poco) invece delle nostre $(a \mapsto b)$. L'interpretazione intuitiva di una funzione è quella di una certa "regola" che a certi elementi associa certi altri elementi (ed infatti, nella maggior parte dei casi, per definire un insieme bisogna usare qualche proprietà che individua i suoi elementi, e quindi la "regola" è la proprietà che individua le volute $(a \mapsto b)$).

Definizione 1.14. *Sia f una funzione. Il* dominio *di f è l'insieme*

$$A := \{a \,|\, \exists b \,|\, (a \mapsto b) \in f\} \; ,$$

che può anche essere chiamato campo di esistenza*.*

Per ciascun $a \in A$, l'unico b tale che $(a \mapsto b) \in f$ viene detto immagine*, o* corrispondente*, di a tramite f, o anche il* valore di f in a*. Si dice anche che f* associa b ad a*, o anche che* manda a in b*. L'immagine b di a viene denotata con*

$$f(a) \; ;$$

inoltre si potrà anche scrivere

$$a \overset{f}{\mapsto} b \; ,$$

e spesso anche solo $a \mapsto b$ (con f sottinteso).

Se B è un qualunque insieme che contiene tutte le immagini tramite f (oltre ad eventuali altri elementi), si dirà che f è a valori in B*. La notazione*

$$f : A \to B$$

indica che f ha dominio A ed è a valori in B. Si potrà dire anche che f è una funzione da A a B*, o anche* da A in B*. L'insieme di tutte le funzioni da A a B si può denotare con*

$$B^A \; .$$

Nei corsi di analisi è spesso usata una notazione o dicitura del tipo $f(x)$ per le funzioni, dove x è la "variabile" (spesso si trova anche scritto $y = f(x)$). In sostanza, può essere vista un'abbreviazione per "la funzione che ad ciascun x nel dominio associa $f(x)$".

Osservazione 1.15. *Siano $f : A \to B$ ed $f' : A' \to B'$ funzioni. Allora*

$$f = f' \iff A = A' \text{ e } \forall a \in A, f(a) = f'(a) \ .$$

Più avanti presenteremo una "variante" della nozione di funzione, per la quale ci vorrà anche $B = B'$.

Definizione 1.16. *Siano f e g funzioni. La* funzione composta *$g \circ f$ è definita dall'insieme*

$$\left\{ (a \mapsto c) \mid \exists b \mid a \overset{f}{\mapsto} b \overset{g}{\mapsto} c \right\} \ .$$

Nei testi in cui si usa la notazione $f(x)$, la funzione composta $g \circ f$ è denotata con $g(f(x))$ (e in questo contesto la g si preferisce denotarla con $g(y)$, invece che con $g(x)$).

Definizione 1.17. *Sia A un insieme. La* funzione identica *di A è la funzione $f : A \to A$ tale che*

$$f(a) = a \quad \forall a \in A \ .$$

1.4. **Famiglie con indici.** Un'altra nozione basilare, quella di n-upla ordinata (ed in particolare quella di coppia ordinata), che è semplicemente una sequenza finita di elementi, può essere efficacemente definita in termini di funzioni. Vediamo come.

Definizione 1.18. *Una n-*upla (ordinata) *di elementi di un insieme X, dove n è un numero naturale, è una funzione il cui dominio è n (che, ricordiamo, è per definizione l'insieme $\{0, \dots, n'\}$, dove n' è il precedente di n).*
Una n-upla può essere denotata, ed in effetti determinata, elencando, tra parentesi e separate da virgole, prima l'immagine di 0 e poi via via dei successivi.
Queste immagini vengono dette componenti *della n-upla. Le 2-uple sono anche dette* coppie *e le 3-uple* terne.

In base alle definizioni appena date, ad esempio la terna

$$(8, 5, 5)$$

è formalmente definita come la funzione che ad 0 associa 8, a 1 associa 5 e a 2 associa 5. A sua volta, questa funzione è formalmente definita come l'insieme

$$\{(0 \mapsto 8), (1 \mapsto 5), (2 \mapsto 5)\} \ .$$

Osservazione 1.19. *Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ n-uple. Allora $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ se e solo se componenti di $\mathbf{x}$ sono uguali alle rispettive componenti $\mathbf{y}$, nell'ordine in cui vengono elencate. In particolare, due coppie*

$$(x_1, x_2) \quad e \quad (y_1, y_2)$$

sono uguali se e solo se

$$x_1 = y_1 \quad e \quad x_2 = y_2 \ .$$

Se una n-upla è stata formalmente definita come una funzione $\{0, \dots, n'\} \to X$, capiamo allora che una funzione da $\mathbb{N}_0 \to X$ può essere interpretata come una sequenza infinita. Più in generale ancora, una qualunque funzione $I \to X$ può essere interpretata come una famiglia di elementi di X ciascuno con un "indice" preso in I. Formalizziamo questo fatto.

Definizione 1.20. *Una* famiglia di elementi *di un insieme X con* indici *in un insieme I è definita semplicemente da una funzione $I \to X$. Per una tale famiglia si potrà usare la notazione*

$$(x_i)_{i \in I} \ ,$$

ed in tal caso per ciascun dato $i \in I$, x_i indicherà la sua immagine, che potrà essere chiamato elemento con indice i *(della data famiglia).*
Le famiglie con indici in $\mathbb{N}_0$ vengono anche chiamate successioni.

Utilizzando la notazione di sopra, gli indici delle componenti di una n-upla diventano automaticamente $0, \dots, n'$ (con n' precedente di n). Ma questo non pregiudica la possibilità di usare anche indici diversi, sia perché uno stesso oggetto si può sempre denotare in modi diversi, sia perché non è obbligatorio utilizzare la notazione "di default" per le famiglie. Quindi, non ci sono grossi problemi ad utilizzare per le n-uple la notazione più comune $(x_1, \dots, x_n)$.

Con la nozione di famiglia, possiamo facilmente parlare di unioni ed intersezioni di molti (anche infiniti) insiemi, estendendo quindi la definizione 1.6.

Definizione 1.21. *Sia $(X_i)_{i \in I}$ una famiglia di insiemi.*

- *L'*intersezione *degli X_i è l'insieme degli elementi che appartengono ad X_i per ogni $i \in I$;*
- *L'*unione *degli X_i è l'insieme di quegli elementi per ciascuno dei quali ci sia almeno un $i \in I$ tale che X_i lo contenga come elemento.*

Potremo usare le notazioni

$$\bigcap_{i \in I} X_i \qquad e \qquad \bigcup_{i \in I} X_i$$

rispettivamente per l'intersezione e l'unione.

Nel caso particolare di una n-upla di insiemi $(X_1, \dots, X_n)$ si potranno anche usare le notazioni

$$\bigcap_{i=1}^{n} X_i \qquad e \qquad \bigcup_{i=1}^{n} X_i \ ,$$

o, per esteso,

$$X_1 \cap \cdots \cap X_n \qquad e \qquad X_1 \cup \cdots \cup X_n \ .$$

1.5. **Prodotto cartesiano.**

Definizione 1.22. *Sia $(X_i)_{i \in I}$ una famiglia di insiemi. Il* prodotto cartesiano *degli X_i è l'insieme*

$$\prod_{i \in I} X_i := \left\{ (x_i)_{i \in I} \mid x_i \in X_i \ \forall i \in I \right\} \ .$$

Conserveremo la notazione $\prod_{i \in I} X_i$ per il prodotto cartesiano.

Nel caso particolare di una n-upla di insiemi $(X_1, \dots, X_n)$, si potranno anche usare le notazioni

$$\prod_{i=1}^{n} X_i \qquad oppure \qquad X_1 \times \cdots \times X_n \ .$$

Esempio 1.23.

$$\{a, b\} \times \{3, 5\} = \{(a, 3), (a, 5), (b, 3), (b, 5)\}$$

$$\{1, 2, 3\} \times \{\alpha\} \times \{x, y\} = \{(1, \alpha, x), (1, \alpha, y), (2, \alpha, x), (2, \alpha, y), (3, \alpha, x), (3, \alpha, y)\}$$

Osservazione 1.24. *Nel caso di una famiglia di insiemi $(X)_{i\in I}$, in cui quindi tutti gli X_i sono uguali ad un fissato insieme X si ha*

$$\prod_{i\in I} X = X^I$$

(che, ricordiamo dalla definizione 1.14, indica l'insieme di tutte le funzioni da I in X).

Nel caso particolare di una n-upla, abbiamo

$$\prod_{i=1}^{n} X = X^n \ .$$

1.6. **Matrici.**

Definizione 1.25. *Siano m ed n numeri naturali ed X un insieme. Una* matrice di tipo $m\times n$ su X *è una famiglia di elementi di X con indici in $m\times n = \{0,\ldots,m'\}\times\{0,\ldots,n'\}$:*

$$\left(a_{(i,j)}\right)_{(i,j)\in\{0,\ldots,m'\}\times\{0,\ldots,n'\}} \ .$$

Per ogni fissato $i\in\{0,\ldots,m'\}$, diremo che la n-upla

$$\left(a_{(i,0)},\ldots,a_{(i,n')}\right)$$

è una riga *della matrice.*
Per ogni fissato $j\in\{0,\ldots,n'\}$, diremo che la m-upla

$$\left(a_{(0,j)},\ldots,a_{(m',j)}\right)$$

è una colonna *della matrice.*

Notazione 1.26. *Una matrice di tipo $m\times n$ viene anche denotata (e anzi determinata) scrivendo una tabella rettangolare, inclusa tra un'unica coppia di parentesi tonde: con le righe scritte senza virgole e via via una sotto l'altra, ed in modo che le colonne appaiano scritte in verticale, via via una di fianco all'altra.*
Gli elementi di una matrice possono essere anche chiamati termini, *o* entrate.

Per semplificare la notazione, spesso anche gli indici vengono indicati senza virgola e parentesi: a_{ij} invece di $a_{(i,j)}$. Inoltre, come per le n-uple, si usano più spesso indici $i\in\{1,\ldots,m\}$, $j\in\{1,\ldots,n\}$ al posto di quelli "di default" che partono da 0. Quindi una tipica matrice sarà scritta così:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Quando non dà luogo ad ambiguità, si può usare anche la notazione breve

$$\left(a_{ij}\right) \ ,$$

dove si sottointenderà che gli indici sono $i\in\{1,\ldots,m\}$, $j\in\{1,\ldots,n\}$.

Osservazione 1.27. *Sia (a_{ij}) una matrice di tipo $m\times n$, con $m,n\neq 0$, ed $\left(a'_{ij}\right)$ una matrice di tipo $m'\times n'$. Allora*

$$A = A' \iff m = m', n = n' \text{ e } \forall i,j,\ a_{ij} = a'_{ij} \ .$$

A partire da una matrice, possiamo costruire un'altra matrice "scambiando le righe con le colonne". Per esempio, dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice così costruita si chiama la *trasposta* di A.

Una definizione rigorosa può essere data come segue.

Definizione 1.28. *Sia $A = (a_{ij})$ una matrice di tipo $m \times n$. La matrice (b_{ij}) di tipo $n \times m$ data da*

$$b_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$$

si dice matrice trasposta *di A, e viene generalmente denotata con*

$$A^{\mathrm{t}} .$$

Definizione 1.29. *Sia A una matrice di tipo $m \times n$. Allora*

$$A \text{ è simmetrica } :\iff \quad A = A^{\mathrm{t}} .$$

Una matrice di tipo $n \times n$ si dice quadrata di ordine *n.*

Osservazione 1.30. *Una matrice simmetrica deve essere per forza quadrata. Una matrice quadrata A è simmetrica se e solo se si ha*

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j .$$

1.7. **Applicazioni.** La nozione di funzione che abbiamo stabilito è una delle due più diffuse. L'altra nozione più diffusa, che è quella preferita nei testi di Algebra e di Geometria, richiede che ogni funzione abbia (oltre che un fissato dominio) anche un fissato insieme in cui prendere i valori. Noi riserveremo per questa nozione leggermente diversa il nome di *applicazione*, e la formalizziamo come segue.

Definizione 1.31. *Siano A, B insiemi. Un'*applicazione*, o* mappa*, F da A a B (o in B) è una coppia*

$$(f, B)$$

tale che f sia una funzione da A a B. Chiameremo l'insieme B insieme di arrivo *di F. La terminologia e le notazioni valide per f possono essere applicate anche ad F: si può scrivere $F : A \to B$ (ma non $F : A \to B'$ per un qualunque B' che contenga tutte le immagini), il* dominio *di F è A, l'*immagine *tramite F di un $a \in A$ è $f(a)$ e si può denotare con $F(a)$.*

Questa distinzione tra funzioni e applicazioni non è diffusa. In quasi tutti i testi questi due termini o sono sinonimi, o uno dei due non viene utilizzato. Però, come abbiamo detto, molti testi trattano solo quelle che noi abbiamo chiamato funzioni, molti altri solo quelle che noi abbiamo chiamato applicazioni (spesso chiamandole anche funzioni). In questi ultimi poi, l'insieme di arrivo viene di solito chiamato *codominio*; ma nei primi (forse anche nel testo di Analisi 1) sembra essere invalso l'uso di questo termine per indicare l'insieme di tutte le immagini degli elementi del dominio . Per questo motivo, preferiamo rinunciare ad usare il termine "codominio": nei vari testi scientifici non sempre è chiaro se si riferisca all'insieme di arrivo di quelle che abbiamo chiamato applicazioni, o all'insieme delle immagini (di funzioni e applicazioni).

Osservazione 1.32. *Siano $f : A \to B$ ed $f' : A' \to B'$ applicazioni. Allora*

$$f = f' \iff A = A', B = B' \text{ e } \forall a \in A, f(a) = f'(a) .$$

Una composizione di applicazioni $g \circ f$ si definisce, come è ovvio, componendo le rispettive funzioni "senza insieme di arrivo"; ma c'è una condizione restrittiva: il dominio di g deve coincidere con l'insieme di arrivo di f.

Definizione 1.33. *Siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ applicazioni. Allora l'applicazione $A \to C$ che ad ogni $a \in A$ associa $g(f(a))$ si dice* applicazione composta *di g ed f, e si indica con*

$$g \circ f .$$

Stabiliamo poi ancora un po' di terminologia e notazioni molto usate.

Definizione 1.34. *Sia $f : A \to B$ un'applicazione o una funzione. Dato $X \subseteq A$, l'insieme*

$$\{f(x) \mid x \in X\}$$

viene detto immagine *del sottoinsieme X ([4]). Se non c'è ambiguità, si potrà indicare l'immagine di X con*

$$f(X)$$

(altrimenti è più preciso usare la notazione $f_*(X)$).

Un'applicazione $f : A \to B$ si dirà suriettiva *se*

$$f(A) = B.$$

Un'applicazione f si dirà iniettiva *se elementi distinti hanno sempre immagini distinte, cioè se vale l'implicazione*

$$x \neq y \ \Rightarrow \ f(x) \neq f(y).$$

Un'applicazione f si dirà biettiva *se è sia iniettiva che suriettiva.*

Osservazione 1.35. *Un'applicazione $f : A \to B$ è suriettiva se e solo se*

$$\forall b \in B, \exists a \in A \mid f(a) = b.$$

Un'applicazione $f : A \to B$ è iniettiva se e solo se vale l'implicazione

$$f(x) = f(y) \ \Rightarrow \ x = y.$$

Definizione 1.36. *Sia A un insieme. L'applicazione $A \to A$ che ad ogni $a \in A$ associa a stesso, si dice* applicazione identica *di A, e si denota con id_A.*

Osservazione 1.37. *Se $f : A \to B$ è una qualunque applicazione, si ha*

$$f \circ \mathrm{id}_A = f , \qquad \mathrm{id}_B \circ f = f .$$

Osservazione 1.38. *Se $f : A \to B$ è un'applicazione biettiva, per ogni $b \in B$ esiste un unico $a \in A$ tale che $f(a) = b$. Se definiamo una funzione $g : B \to A$, dicendo che ad ogni $b \in B$ essa associa l'unico $a \in A$ tale che $f(a) = b$, allora abbiamo*

$$g \circ f = \mathrm{id}_A , \qquad f \circ g = \mathrm{id}_B .$$

Definizione 1.39. *Nella situazione dell'osservazione precedente, l'applicazione g sarà detta* inversa *di f e sarà denotata con f^{-1}.*

---

[4]Nei casi in cui X è sia un sottoinsieme che un elemento di A (ad esempio quando $X = \emptyset$ e $A = \{\emptyset\}$), l'immagine del sottoinsieme X può essere cosa diversa dall'immagine dell'elemento X.

1.8. **Relazioni.** Ricordiamo che nella definizione di funzione richiediamo che ogni elemento del dominio abbia un'unica immagine:

$$\forall x \in f\ \exists a \mid \exists! b \mid x = (a \mapsto b)\ .$$

Se lasciamo cadere questa restrizione e supponiamo che f sia un qualunque insieme formato da elementi tutti del tipo $(a \mapsto b)$, cioè

$$\forall x \in f\ \exists a \mid \exists b \mid x = (a \mapsto b)\ ,$$

otteniamo quella che viene in genere chiamata *corrispondenza.* Anche per le corrispondenze non sembra esserci unanimità, tra i vari testi, su se l'insieme di arrivo debba essere fissato (come per le nostre applicazioni), oppure no (come per le nostre funzioni). Inoltre, nei testi in cui si sceglie di non fissarlo, allora addirittura anche l'insieme di partenza (che sarebbe il dominio, nel caso di funzioni e applicazioni) può essere più largo del necessario.

Le corrispondenze poi, vengono spesso anche chiamate *relazioni.* L'idea sarebbe un po' diversa (magari si potrebbe evocare questa differenza usando le $(a \mapsto b)$ per le corrispondenze, mentre le coppie (a, b) per le relazioni). Comunque, la formalizzazione di questi due concetti rivela che la sostanza è effettivamente un po' la stessa. Molti testi distinguono poi corrispondenze e relazioni richiedendo per queste ultime, più restrittivamente, che coinvolgano un solo insieme (in termini di corrispondenze, questo insieme sarebbe sia di partenza che di arrivo).

In questo corso non ci sarà bisogno di trattare le corrispondenze. Saranno invece importanti le relazioni. Per motivi di uniformità con altri corsi paralleli di Geometria, accettiamo di restringere questo concetto al caso di un solo insieme, e questo dovrà ritenersi obbligatoriamente fissato per ciascuna relazione. Useremo le coppie e non le $(a \mapsto b)$.

Definizione 1.40. *Definiamo una* relazione *in un insieme A come una coppia*

$$\mathcal{R} = (A, G)$$

tale che $G \subseteq A^2 = A \times A$, cioè G è un insieme di coppie di elementi di A. Dire che un $a_1 \in A$ è nella relazione $\mathcal{R}$ con un $a_2 \in A$, significa semplicemente dire che

$$(a_1, a_2) \in G\ .$$

In tal caso poi, si potrà scrivere

$$a_1\ \mathcal{R}\ a_2\ ,$$

ed in caso contrario

$$a_1\ \not\mathcal{R}\ a_2\ .$$

Definizione 1.41. *Sia $\mathcal{R}$ una relazione in un insieme S e sia T un sottoinsieme di S. La relazione $\mathcal{S}$ in T tale che*

$$a\, \mathcal{S}\, b\ :\Longleftrightarrow\ \ a\, \mathcal{R}\, b$$

è detta restrizione *di $\mathcal{R}$ a T.*

Due casi importantissimi di relazioni sono le relazioni d'equivalenza e le relazioni d'ordine, che passiamo subito a definire ufficialmente.

Definizione 1.42. *Una* relazione di equivalenza *è una relazione $\sim$ in un insieme A, per cui valgano le seguenti proprietà:*

- $\forall a \in A,\ a \sim a$ *(proprietà riflessiva),*
- $a \sim b \quad \Rightarrow \quad b \sim a$ *(proprietà simmetrica),*

- $a \sim b$ e $b \sim c \quad \Rightarrow \quad a \sim c$ *(proprietà transitiva).*

La relazione di uguaglianza in un fissato insieme è una relazione di equivalenza. La relazione "è coetaneo di" è una relazione di equivalenza nell'insieme delle persone. La relazione "è nato lo stesso giorno dell'anno di" è una relazione di equivalenza nell'insieme delle persone.
Possiamo dire, in maniera un po' informale, che tutte le relazioni del tipo "avere in comune una certa proprietà" sono relazioni di equivalenza.

Definizione 1.43. *Sia $\sim$ una relazione di equivalenza in un insieme A e sia $a \in A$. L'insieme*

$$\{x \in A : x \sim a\}$$

si dice classe di equivalenza di a *(rispetto alla relazione $\sim$) e si denota con*

$$[a]_\sim$$

o semplicemente con

$$[a]$$

(sottintendendo $\sim$).

Definizione 1.44. *Una* relazione d'ordine stretto *è una relazione $\vdash$ in un insieme A, per cui valgano le seguenti proprietà:*

- $a \vdash b \quad \Rightarrow \quad b \nvdash a$
- $a \vdash b$ e $b \vdash c \quad \Rightarrow \quad a \vdash c$

Una relazione d'ordine stretto si dice totale *se per ogni coppia di elementi distinti a, b si ha che $a \vdash b$ oppure $b \vdash a$.*

Definizione 1.45. *Siano $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ relazioni in uno stesso insieme A. Allora $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ si dicono* opposte *(o* inverse*) tra loro, se per ogni $a, b \in A$ si ha*

$$a \,\mathcal{R}\, b \iff b \,\mathcal{S}\, a\,.$$

1.9. **Operazioni.**

Definizione 1.46. *Sia S un insieme. Un'*operazione (binaria, interna) *in S è un'applicazione*

$$S \times S \to S.$$

Notazione 1.47. *Se denotiamo un'operazione interna con un simbolo, ad esempio*

$$\bullet\,,$$

allora l'immagine di una coppia (s, s') si denota in genere con

$$s \;\bullet\; s'\,,$$

invece che con $\bullet((s, s'))$.

Definizione 1.48. *Sia $\bullet$ un'operazione in un insieme A e supponiamo che $e \in A$ sia tale che*

$$\forall a \in A, \quad a \bullet e = a = e \bullet a\,.$$

Allora si dice che e è un elemento neutro *per l'operazione $\bullet$.*

Proposizione 1.49. *Per un'operazione in un insieme non ci può essere più di un elemento neutro.*

Dimostrazione. Se e, e' sono elementi neutri per un'operazione $\bullet$, abbiamo $e = e \bullet e'$ perché e' è un'elemento neutro, ed $e \bullet e' = e'$ perché e è un elemento neutro. Quindi

$$e = e \bullet e' = e' ,$$

cioè e ed e' non possono essere distinti. $\square$

Definizione 1.50. *Sia A un insieme. Un'*operazione (binaria) esterna *su A con operatori in un insieme Γ è un'applicazione*

$$\Gamma \times A \to A .$$

Molto spesso, data una operazione esterna, l'immagine di una coppia (h, a) si denota semplicemente con ha.

1.10. **Gruppi.**

Definizione 1.51. *Un* gruppo *è una coppia $(G, \bullet)$ tale che G è un insieme e $\bullet$ denota un'operazione in G tale che:*

- $\forall x, y, z \in G, \quad (x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$ *(proprietà associativa);*
- *esiste l'elemento neutro $n \in G$ per l'operazione $\bullet$;*
- $\forall x \in G \; \exists y \in G \,|\, x \bullet y = n = y \bullet x$.

Se inoltre vale che

- $\forall x, y \in G, \quad x \bullet y = y \bullet x$ *(proprietà commutativa),*

allora il gruppo $(G, \bullet)$ si dirà commutativo, *o anche* abeliano.
Spesso per abuso di linguaggio si dice che l'insieme G è un gruppo, sottintendendo l'operazione.

Proposizione 1.52. *Dato un gruppo $(G, \bullet)$ e detto n il suo elemento neutro, per ogni $x \in G$ c'è un unico elemento $y \in G$ tale che $x \bullet y = n = y \bullet x$.*

Dimostrazione. Dato $x \in G$, sappiamo che c'è (almeno) un y tale che $x \bullet y = n = y \bullet x$. Se troviamo un $y' \in G$ tale che anche $x \bullet y' = n = y' \bullet x$, allora abbiamo

$$y' = y' \bullet n = y' \bullet (x \bullet y) = (y' \bullet x) \bullet y = n \cdot y = y ,$$

cioè deve essere per forza di nuovo y. $\square$

Esempio 1.53. *L'insieme delle applicazioni biettive da un insieme X a sé stesso, con l'operazione data dalla composizione di applicazioni, è un gruppo. Infatti, se abbiamo applicazioni $f, g, h : X \to X$ biettive, per ogni $x \in X$ abbiamo $((f \circ g) \circ h)(x) = f(g(h(x)))$ e $(f \circ (g \circ h))(x) = f(g(h(x)))$; e quindi $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ per l'osservazione 1.32. Basta poi tenere presenti le osservazioni 1.37* e *1.38.*

1.11. **Spazio, rette e piani.**

Prerequisito 1.54. *Assumiamo noto che cosa sia un* punto*.*

Definizione 1.55. *Lo* spazio (ordinario) *è l'insieme di tutti i punti. Una* figura *è un sottoinsieme dello spazio, cioè un insieme di punti.*

Prerequisito 1.56. *Assumiamo noto cosa sia una* retta *e cosa sia un* piano*.*

Assioma 1.57. *Le rette ed i piani sono figure.*

Assioma 1.58. *Siano P e Q punti distinti. Allora esiste un'unica retta che contiene $\{P, Q\}$.*

Notazione 1.59. *Siano P e Q punti distinti. L'unica retta che contiene $\{P, Q\}$ sarà indicata con r_{PQ}.*

Assioma 1.60. *Sia r una retta. Allora esistono P e Q distinti tali che $\{P, Q\} \subseteq r$.*

Definizione 1.61. *Sia S un insieme di punti. I punti di S si dicono* allineati *(tra loro) se esiste una retta che contiene S.*

Assioma 1.62. *Esiste almeno un piano.*

Assioma 1.63. *Sia π un piano. Allora esistono punti P, Q, R non allineati tali che $\{P, Q, R\} \subseteq \pi$.*

Proposizione 1.64. *Nessun piano è una retta.*

Dimostrazione. Sia π un piano. Per assioma 1.63, π contiene punti P, Q, R non allineati tra loro. Se π fosse anche una retta allora P, Q, R, appartenendo a π, sarebbero allineati. Poiché invece non lo sono, concludiamo che π non può essere una retta. □

Assioma 1.65. *Siano P, Q, R punti non allineati. Allora esiste un unico piano che contiene $\{P, Q, R\}$.*

Definizione 1.66. *Sia S un insieme di punti. I punti di S si dicono* complanari *(tra loro) se esiste un piano che contiene S.*

Assioma 1.67. *Sia π un piano e siano $P, Q \in \pi$ distinti. Allora π contiene r_{PQ}.*

Proposizione 1.68. *Sia r una retta e P un punto non appartenente ad r. Allora esiste un unico piano contenente $r \cup \{P\}$.*

Dimostrazione. Per l'assioma 1.60 esistono $Q, R \in r$ distinti, ed $r_{QR} = r$ per l'assioma 1.58. Poiché $P \notin r$, P, Q, R non sono allineati. Per l'assioma 1.65 c'è un unico piano π che contiene $\{P, Q, R\}$, che per l'assioma 1.67 deve contenere $r_{QR} = r$. Dunque π contiene $r \cup \{P\}$, e non ce ne sono altri con questa proprietà, perché se un insieme contiene $r \cup \{P\}$ deve contenere $\{P, Q, R\}$ (e π è l'unico piano che lo fa). □

Assioma 1.69. *Lo spazio non è un piano.*

Proposizione 1.70. *Esiste almeno una retta.*

Dimostrazione. Per l'assioma 1.62, esiste un piano π. Per l'assioma 1.63 esiste un sottoinsieme $\{P, Q, R\} \subseteq \pi$ (al momento, non possiamo sapere se P, Q, R coincidono oppure no). Per l'assioma 1.69 deve esistere un punto $T \notin \pi$. Poiché $P \in \pi$ e $T \notin \pi$, si ha $P \neq T$. Dunque esiste la retta r_{PT}. □

Osservazione 1.71. *Ora possiamo dire che punti non allineati P, Q, R sono per forza distinti. Infatti, visto che esiste almeno una retta, dato un qualunque punto, per l'assioma 1.60 ne esiste almeno un altro distinto. Ora, se $P = Q$ e $P \neq R$, P, Q, R appartengono ad r_{PQ} e sono quindi allineati; se $P = Q = R$, allora si può prendere un altro punto T distinto, ed abbiamo ancora che P, Q, R sono allineati* *perché appartengono ad r_{PT}. In ogni caso quindi, se $P = Q$ allora P, Q, R sono allineati. La stessa cosa succede se $P = R$ o se $Q = R$: P, Q, R sono allineati. Quindi punti non allineati devono essere distinti.*

Proposizione 1.72. *Lo spazio non è una retta.*

Dimostrazione. Per l'assioma 1.62, esiste almeno un piano π. Per l'assioma 1.63, π contiene punti P, Q, R non allineati. Se lo spazio fosse una retta, P, Q, R, essendo contenuti nello spazio, sarebbero allineati, il che non è. Dunque lo spazio non può essere una retta. $\square$

Esercizio 1.73. *Dimostrare che ogni retta è contenuta in qualche piano.*

Assioma 1.74. *Siano α e β piani. Se $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, allora esistono P, Q distinti tali che $\{P, Q\} \subseteq \alpha \cap \beta$.*

Proposizione 1.75. *Siano α e β piani distinti. Se $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, allora $\alpha \cap \beta$ è una retta.*

Dimostrazione. Per l'assioma 1.74 si ha che

$$\exists P, Q \in \alpha \cap \beta \,|\, P \neq Q \,.$$

Abbiamo allora

$$P, Q \in \alpha \cap \beta \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} P, Q \in \alpha & \overset{\text{assioma 1.67}}{\Rightarrow} & r_{PQ} \subseteq \alpha \\ P, Q \in \beta & \overset{\text{assioma 1.67}}{\Rightarrow} & r_{PQ} \subseteq \beta \end{array} \right\} \Rightarrow r_{PQ} \subseteq \alpha \cap \beta$$

Dunque

$$r_{PQ} \subseteq \alpha \cap \beta \,. \tag{1}$$

Sia poi $R \in \alpha \cap \beta$. Se avessimo $R \notin r_{PQ}$, per la proposizione 1.68 $r_{PQ} \cup \{R\}$ è contenuto in un solo piano, mentre invece sappiamo che è contenuto nei piani distinti α e β. Quindi si ha per forza $R \in r_{PQ}$. Abbiamo così dimostrato che ogni punto R che appartenga ad $\alpha \cap \beta$ deve per forza appartenere a r_{PQ}, cioè

$$\alpha \cap \beta \subseteq r_{PQ} \,. \tag{2}$$

Le inclusioni (1) e (2) dimostrano che

$$\alpha \cap \beta = r_{PQ} \,.$$

Dunque $\alpha \cap \beta$ è una retta, come volevamo. $\square$

1.12. **Rette parallele.**

Definizione 1.76. *Siano r ed s rette.*

Le rette r ed s si dicono complanari *se esiste un piano π tale che $\pi \supseteq r \cup s$, altrimenti si dicono* sghembe*.*

Le rette r ed s si dicono incidenti *se $r \cap s \neq \emptyset$; si dicono* propriamente parallele *se sono complanari ma non incidenti; si dicono* impropriamente parallele *se $r = s$.*

Le rette r ed s si dicono parallele*, se lo sono propriamente o impropriamente.*

Proposizione 1.77. *Rette sghembe non possono essere incidenti.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un punto P appartenente sia ad r che ad s. Per l'assioma 1.60 esiste un punto $Q \neq P$ appartenente ad r ed un punto $R \neq P$ appartenente ad s. Per l'assioma 1.58 abbiamo allora

$$r_{PQ} = r, \qquad r_{PR} = s \ .$$

Distinguiamo due casi:

- P, Q, R sono allineati,
- P, Q, R non sono allineati.

Nel primo caso, esiste una retta t che contiene P, Q, R. Poiché t contiene i due punti distinti P, Q, per l'assioma 1.58 dobbiamo avere $t = r_{PQ} = r$. Poiché t contiene i due punti distinti P, R, per l'assioma 1.58 dobbiamo avere $t = r_{PR} = s$. Quindi

$$r = s \ .$$

Siccome, per l'esercizio 1.73, r è contenuta in qualche piano π, r ed s (essendo uguali) sarebbero contenute nello stesso piano π, il che è assurdo perché per ipotesi r ed s sono sghembe.

Nel secondo caso, per l'assioma 1.65 esiste un unico piano π che contiene $\{P, Q, R\}$. Poiché in π ci sono i punti distinti P, Q, per l'assioma 1.67 questo piano contiene $r_{PQ} = r$. Poiché in π ci sono i punti distinti P, R, per l'assioma 1.67, questo piano contiene $r_{PR} = s$. Quindi r ed s sarebbero contenute nello stesso piano π, il che è di nuovo assurdo perché per ipotesi r ed s sono sghembe.

In ogni caso perveniamo ad un assurdo, quindi non può esistere un punto P appartenente sia ad r che ad s, cioè r ed s non possono essere incidenti. □

La proposizione ora dimostrata completa il quadro delle proprietà "essere sghembe", "essere incidenti" ed "essere parallele". Possiamo sintetizzare tale quadro come segue:

- Due rette non si incontrano se e solo se sono propriamente parallele oppure sghembe.
- Due rette sono complanari se e solo se sono incidenti oppure parallele.
- Due rette sono sia incidenti che parallele se e solo se sono impropriamente parallele.

Osservazione 1.78. *Supponiamo che r ed s siano rette distinte ed incidenti. Essendo incidenti, c'è un $P \in r \cap s$. Se esistesse un $Q \neq P$ in $r \cap s$, per l'assioma 1.58 avremmo $r = r_{PQ} = s$, mentre sappiamo che $r \neq s$.*
In conclusione, rette r, s distinte ed incidenti si incontrano in un solo punto.

Osservazione 1.79. *Supponiamo che r ed s siano rette distinte e complanari. Essendo distinte, per l'assioma 1.60 e l'osservazione 1.78, c'è (almeno) un $P \in r$ che non appartiene ad s. Per la proposizione 1.68 c'è un solo piano π che contiene $s \cup \{P\}$, quindi un piano che contiene r ed s deve essere per forza questo π, perché $P \in r$.*
In conclusione, c'è un solo piano che contiene rette r, s distinte e complanari (incidenti o parallele che siano).

Assioma 1.80. *Dati una retta r e un punto P, esiste un'unica retta parallela ad r a cui P appartiene.*

Tale assioma viene detto *assioma delle parallele*, e ha avuto grande importanza nella storia della matematica.

Supponiamo che r, s, t siano rette in un piano π, e supponiamo che r sia parallela ad s e che s sia parallela a t. Dall'assioma 1.80 segue molto facilmente che r è parallela a t. In altre parole, la relazione "essere parallele" nell'insieme delle rette contenute in un piano π ha la proprietà transitiva. Poiché questa relazione è evidentemente anche riflessiva e simmetrica, è una relazione di equivalenza.

E se consideriamo l'insieme di *tutte* le rette? Vediamo ora che la cosa continua a valere, ma la dimostrazione è un pochino più lunga.

Proposizione 1.81. *Nell'insieme di tutte le rette, consideriamo la relazione di parallelismo, cioè la relazione $\mathcal{P}$ definita da*

$$r\mathcal{P}s \Leftrightarrow r \text{ è parallela ad } s.$$

Allora $\mathcal{P}$ è una relazione di equivalenza.

Dimostrazione. Poiché le proprietà riflessiva e simmetrica sono ovvie per $\mathcal{P}$, ci basta dimostrare la proprietà transitiva. Supponiamo dunque di avere una retta r parallela ad una retta s, che a sua volta sia parallela ad una retta t. Dobbiamo dimostrare che r e t sono parallele.

Se r e t sono incidenti, essendo entrambe parallele ad s, per l'assioma 1.80 devono coincidere, e sono quindi parallele impropriamente. Possiamo allora assumere anche $r \cap t = \emptyset$.

Se poi $r = s$, allora ovviamente r e t sono parallele perché s e t lo sono. Possiamo allora assumere anche che r ed s siano distinte. Per l'osservazione 1.79 c'è un solo piano α che le contiene entrambi.

Se $s = t$, allora ovviamente r e t sono parallele perché r ed s lo sono. Possiamo allora assumere anche che s e t siano distinte. Per l'osservazione 1.79 c'è un solo piano β che le contiene entrambi.

Per l'assioma 1.60 possiamo prendere un $P \in r$. Poiché $r \cap t = \emptyset$ si ha $P \notin t$, e per la proposizione 1.68 c'è un solo piano γ che contiene $t \cup \{P\}$.

Se $\alpha = \gamma$, questo piano contiene r, s, t, e abbiamo già osservato in precedenza che per rette complanari dall'assioma 1.80 segue facilmente la transitività. Possiamo supporre quindi $\alpha \neq \gamma$. Siccome $P \in \alpha \cap \gamma$, per la proposizione 1.75, $r' := \alpha \cap \gamma$ è una retta (a cui P appartiene).

Facciamo vedere ora che r' deve essere parallela ad s. Se così non fosse, essendo r' ed s contenute in α, ci sarebbe un punto $Q \in r' \cap s$. Poiché $Q \in s \subseteq \beta$ si ha $Q \in \beta$, e sappiamo che anche $t \subseteq \beta$. Poiché poi $Q \in r' \subseteq \gamma$ si ha anche $Q \in \gamma$, e sappiamo che pure $t \subseteq \gamma$. Ma $Q \notin t$ perché $Q \in s$, ed s e t sono distinte e parallele. Quindi per la proposizione 1.68, $\beta = \gamma$. Ma allora si avrebbe $r' = \alpha \cap \beta \supseteq s$, che va contro l'osservazione 1.78 se si tiene presente l'assioma 1.60. Quindi r' ed s devono essere parallele, come annunciato.

Poiché P appartiene sia ad r che ad r', e queste sono entrambe parallele ad s, dall'assioma 1.80 segue $r = r' = \alpha \cap \gamma$. Quindi $r \subseteq \gamma$. In conclusione, r e t sono entrambe contenute in γ, ed eravamo rimasti con l'assunzione $r \cap t = \emptyset$. Dunque r e t sono (propriamente) parallele, come volevamo. □

Nel linguaggio corrente, le parole "verso" e "direzione" hanno un significato simile: verso nord, in direzione nord; verso Napoli, in direzione di Napoli. In Geometria, si preferisce attribuire alla parola "direzione" il significato che ha quando si parla, ad esempio, della “direzione orizzontale”. Poi, la direzione orizzontale può essere percorsa verso destra o verso sinistra; la direzione verticale verso su o verso giù; la direzione Roma-Napoli, verso Roma o verso Napoli. Con questo significato, possiamo dire che rette parallele tra loro hanno in comune la stessa *direzione*.

In genere, tutte le relazioni del tipo “avere in comune una certa proprietà” sono relazioni di equivalenza. Spesso però questa proprietà può essere astratta e difficile da definire a parole, mentre la relativa relazione di equivalenza può essere definita in termini più concreti. Il parallelismo tra rette è uno di questi casi. Sempre nell’ottica di formalizzare ogni definizione usando termini puramente insiemistici, si usa la relazione per definire formalmente la proprietà astratta. Vediamo come, nel caso del concetto di direzione.

Definizione 1.82. *Una classe di equivalenza rispetto alla relazione di parallelismo $\mathcal{P}$ nell’insieme di tutte le rette (dello spazio ordinario) viene detta una* direzione. *La direzione di una retta r è la sua classe di equivalenza $[r]_{\mathcal{P}}$.*

Se d è una direzione ed r è una retta, dire che “r ha direzione d” formalmente equivale a dire che $r \in d$.

1.13. **Piani paralleli.**

Definizione 1.83. *Siano α e β piani ed r una retta.*

- *α e β si dicono* propriamente paralleli *se $\alpha \cap \beta = \emptyset$; si dicono* impropriamente paralleli *se $\alpha = \beta$.*
- *r ed α si dicono* propriamente paralleli *se $r \cap \alpha = \emptyset$; si dicono* impropriamente paralleli *se $r \subseteq \alpha$.*

Anche per i piani è facile dimostrare che la relazione di parallelismo è una relazione di equivalenza. Una classe di equivalenza di piani paralleli si chiama una *giacitura*.

Osservazione 1.84. *Per la proposizione 1.75, l’intersezione di piani α e β non paralleli è sempre una retta.*

Proposizione 1.85. *Se r ed s sono rette parallele e π è un piano qualunque, si ha:*

$$r \text{ è parallela a } \pi \;\Rightarrow\; s \text{ è parallela a } \pi\ .$$

Dimostrazione. Se $r = s$ la cosa è ovvia. Supponiamo quindi che $r \neq s$, così che per l’osservazione 1.79, c’è un unico piano α contenente r ed s.

Se $s \subseteq \pi$, allora è impropriamente parallela a π, e abbiamo finito. Supponiamo quindi che s non sia contenuta in π, così che $\alpha \neq \pi$. Se α e π sono paralleli, allora $\alpha \cap \pi = \emptyset$, quindi $s \cap \pi = \emptyset$, e abbiamo finito. Supponiamo allora che α e π non siano paralleli, così che $t := \alpha \cap \pi$ è una retta. Se $r \subseteq \pi$, allora $r = t$; in caso contrario $r \cap \pi = \emptyset$, e allora $r \cap t = \emptyset$. Quindi r e t sono parallele. Per la proposizione 1.81, s e t sono parallele. Poiché s non è contenuta in π, $s \neq t$ e quindi $s \cap t = \emptyset$, essendo parallele. Se ci fosse un punto in $s \cap \pi$, poiché $s \subseteq \alpha$, questo punto apparterrebbe ad $\alpha \cap \pi = t$, che è escluso. Quindi $s \cap \pi = \emptyset$, ed s è parallela a π, come volevamo. □

Osservazione 1.86. *Se r ed s sono rette parallele e π è un piano qualunque, si ha*

$$r \text{ è parallela a } \pi \iff s \text{ è parallela a } \pi\ .$$

Infatti, l'implicazione $\Rightarrow$ è la proposizione 1.85, e per imostrare l'implicazione $\Leftarrow$ basta applicare la proposizione 1.85, ma con r al posto di s ed s al posto di r.

1.14. **Versi su una retta.** Ricordiamo che con la nostra definizione di direzione, non c'è differenza tra "la direzione Napoli-Roma" e "la direzione Roma-Napoli". Per distinguere le due cose, useremo la parola "verso". Ad esempio la direzione "verticale" ammetterà i due versi "su" e "giù".

Assumeremo come primitiva la nozione di "verso su una retta". Questa nozione si può esprimere in termini di concetti che abbiamo già introdotto: esso è infatti una *relazione d'ordine stretto totale* definita tra i punti della retta. Fissare un verso infatti, significa poter dire, per ogni coppia di punti distinti, che uno dei due precede l'altro (e non viceversa).

Purtroppo però, non esistono solo due modi di ordinare i punti di una retta: i due versi però sono ordinamenti "naturali", così come le rette sono particolari tra tutti i sottoinsiemi dello spazio. D'altra parte, questa loro intuitiva "particolarità" non può essere definita sulla base dei prerequisiti e dei risultati precedentemente esposti in questo testo. Ecco perché assumiamo "verso" come nozione primitiva.

Prerequisito 1.87. *Sia r una retta. Assumiamo nota la nozione di* verso *su r.*

Assioma 1.88. *Un verso su una retta r è una relazione d'ordine totale in r.*

Assioma 1.89. *Su ogni retta esistono esattamente due versi, l'uno opposto all'altro.*

Definizione 1.90. *Un verso su una retta r verrà generalmente indicato col simbolo $\prec$. Se $P, Q \in r$, la scrittura*

$$P \prec Q$$

si leggerà "P precede *Q"; si potrà dire anche che Q* segue *P e scrivere*

$$Q \succ P\ .$$

Scrivendo invece

$$P \preceq Q$$

intenderemo che P precede o è uguale a Q.

Definizione 1.91. *Una* retta orientata *è una coppia*

$$(r, \prec),$$

dove r è una retta e $\prec$ è un verso su r. Talvolta si userà la notazione $\vec{r}$, sottintendendo che allora r denoterà la retta e $\prec$ il verso.

1.15. **Segmenti.**

Definizione 1.92. *Siano A e B punti distinti, sia r la retta che li contiene e fissiamo il verso $\prec$ tale che $A \prec B$. Si dice* segmento *(chiuso) di* estremi *A e B, e si indica con $\overline{AB}$, l'insieme*

$$\overline{AB} = \{P \in r : A \preceq P \preceq B\}\ .$$

Un punto di $\overline{AB}$ diverso dagli estremi A e B si dirà interno *ad $\overline{AB}$.*

Definizione 1.93. *Sia $(r, \prec)$ una retta orientata ed $A \in r$. L'insieme*

$$\{P \in r : A \preceq P\}$$

si chiama semiretta *(chiusa) di origine A, e potrà essere indicata con r_A^+.*

E' opportuno definire anche il "segmento nullo", che è un insieme del tipo $\overline{AA} = \{P \in r : A \preceq P \preceq A\}$: tale insieme è sempre uguale ad $\{A\}$, qualsiasi sia la retta r che contiene il punto A, e qualsiasi sia il verso $\prec$ scelto su r.

Definizione 1.94. *Sia A un punto. Si dice* segmento nullo *di estremo A, l'insieme $\overline{AA} = \{A\}$.*

Si potrebbero definire anche i segmenti aperti ed i segmenti semichiusi, ma non ne abbiamo bisogno.

Definizione 1.95. *Sia s_1 un segmento contenuto in una retta r_1 ed s_2 un segmento contenuto in una retta r_2. Se le rette r_1 ed r_2 sono parallele, allora anche s_1 ed s_2 saranno detti* paralleli*. Se r_1 è parallela ad una retta t, allora anche s_1 sarà detto* parallelo *a t (si dirà anche che t è* parallela *ad s_1).*

Analogamente si definisce il parallelismo tra segmenti e piani.

Definizione 1.96. *Un segmento si dice* parallelo ad un piano π*, se è contenuto in una retta parallela a π.*

Osservazione 1.97. *Con queste definizioni, un segmento nullo è parallelo a qualsiasi segmento, a qualsiasi retta ed a qualsiasi piano.*

Definizione 1.98. *Sia $\overline{AB}$ un segmento e sia r una retta che lo contiene. Un* verso *su $\overline{AB}$ è la restrizione ad $\overline{AB}$ di un verso su r.*

Osservazione 1.99. *Su un segmento nullo c'è un unico verso, coincidente col suo opposto.*

Definizione 1.100. *Un* segmento orientato *è una coppia costituita da un segmento e da un verso su di esso. Un segmento orientato costituito da $\overline{AB}$, con il verso rispetto al quale $A \preceq B$, verrà indicato con AB, e il segmento orientato BA (cioè quello dato sempre da $\overline{AB}$, ma con il verso opposto) viene detto* opposto *ad AB.*

Quando riferiamo ad un segmento orientato AB un termine che abbiamo definito solo per i segmenti (non orientati), intenderemo riferirci ad $\overline{AB}$

1.16. **Semipiani.**

Assioma 1.101. *Sia r una retta contenuta in un piano π. Allora $\pi \setminus r$ è unione di due sottoinsiemi non vuoti e disgiunti π_+ e π_- tali che per ogni $A, B \in \pi \setminus r$ si ha*

$$A, B \in \pi_+ \text{ oppure } A, B \in \pi_- \quad \iff \quad \overline{AB} \cap r = \emptyset\ .$$

Definizione 1.102. *Sia r una retta contenuta in un piano π. I due sottoinsiemi di $\pi \setminus r$ soddisfacenti la condizione dell'assioma 1.101 si dicono* semipiani *(aperti) di π individuati da r.*

Quindi due punti non appartenenti ad r stanno in uno stesso semipiano individuato da r se e solo se il segmento che li congiunge non interseca r.

Proposizione 1.103. *Siano r ed s due rette non parallele contenute in un piano π, sia A il loro punto d'intersezione (vedi l'osservazione 1.78) e si fissi un verso $\prec$ su r. Allora i punti che seguono A stanno tutti in uno stesso semipiano di π individuato da s.*

Dimostrazione. Fissiamo un punto $P \in r$ che segue A. Poiché A è l'unico punto di r che appartiene ad s, si ha che $P \in \pi \setminus s$. Per l'assioma 1.101 c'è un semipiano, diciamo π_+, che contiene P. Se Q è un qualsiasi punto che segue A, il segmento chiuso $\overline{PQ}$ non contiene A (altrimenti $P \preceq A$ o $Q \preceq A$). Ma l'unico punto di r che appartiene ad s è A. Dunque

$$\overline{PQ} \cap s = \emptyset \,.$$

Per l'assioma 1.101 (e per definizione di semipiano), poiché $P \in \pi_+$, anche $Q \in \pi_+$. Dunque un qualsiasi punto che segue A è contenuto in π_+. □

Osservazione 1.104. *Ovviamente la tesi della proposizione 1.103 vale anche per i punti che precedono A.*

Proposizione 1.105. *Siano r ed s rette non parallele contenute in un piano π, sia A il loro punto d'intersezione e si fissi un verso $\prec$ su r. Allora un punto che segue A deve appartenere ad un semipiano individuato da s, diverso da quello a cui appartiene un punto che precede A.*

Dimostrazione. Sia P un punto che segue A e Q un punto che precede A. Poiché A è l'unico punto di r che appartiene ad s, si ha che $P, Q \in \pi \setminus s$. Indichiamo con π_+ il semipiano a cui appartiene P e con π_- l'altro semipiano. Dobbiamo provare che $Q \in \pi_-$. Poiché $Q \prec A \prec P$, si ha $A \in \overline{PQ}$. Siccome $A \in s$ si ha $\overline{PQ} \cap s \neq \emptyset$, e per l'assioma di definizione dei semipiani abbiamo $Q \in \pi_-$. □

Osservazione 1.106. *Siano r ed s rette non parallele contenute in un piano π, sia A il loro punto d'intersezione e si fissi un verso $\prec$ su r. Dai risultati precedenti si deduce subito che l'intersezione di r con un semipiano individuato da s in π è una semiretta privata dell'origine.*

1.17. **Angoli.**

Definizione 1.107. *Siano r ed s due rette non parallele in un piano π, sia σ uno dei semipiani individuati da r e sia τ uno dei semipiani individuati da s. L'intersezione*

$$\alpha = \sigma \cap \tau$$

verrà detta angolo convesso proprio.

Il punto d'intersezione O di r ed s viene detto vertice *dell'angolo α. Le due semirette date da $\sigma \cap s$ e $\tau \cap r$ con l'aggiunta dell'orgine O (cfr. l'osservazione 1.106) si dicono* lati *dell'angolo.*

Se A è un punto di $\sigma \cap s$ e B è un punto di $\tau \cap r$, allora l'angolo α potrà essere denotato con $A\hat{O}B$.

Infine, se denotiamo con σ' l'altro semipiano individuato da r, gli angoli convessi propri $\sigma \cap \tau$ e $\sigma' \cap \tau$ verranno detti supplementari *tra loro.*

Osservazione 1.108. *Con queste definizioni, i lati e il vertice di un angolo non sono contenuti nell'angolo.*

Naturalmente, in altri testi si possono trovare definizioni diverse (ad esempio si può definire un angolo in modo da comprendere anche i lati). A livello internazionale, sembra aver preso piede l'uso di definire un angolo di vertice un punto O come una coppia (o un'unione) di due semirette (rays) di origine O. Ci sono ottimi motivi per far questo, così come ci sarebbero ottimi motivi per definire i segmenti semplicemente come coppie di punti. Non ci addentriamo in questo discorso. Diciamo solo che, considerati i vari aspetti della questione, la nostra definizione preferita consisterebbe in un insieme di semirette di origine O, comprese (in un senso che qui non precisiamo) tra due fissate. La definizione di un angolo come parte (sottoinsieme) di un piano è quella tradizionale e sembra essere ancora molto diffusa, almeno in Italia.

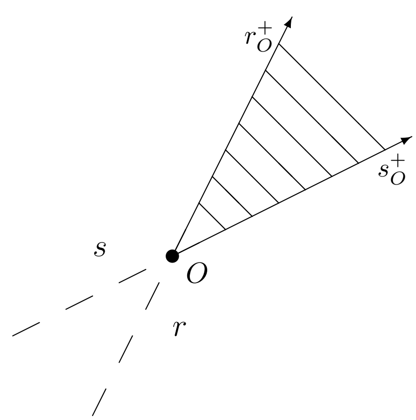
Inoltre, abbiamo definito solo cosa sono gli angoli convessi propri. Gli studenti sanno bene che ci sono anche altri angoli, oltre a quelli convessi propri. Tuttavia, siccome ai fini del nostro corso possiamo fare a meno di usarli, non riporteremo in questi appunti una definizione più generale di "angolo" (anche se così, a malincuore, non possiamo parlare dell'angolo piatto, dell'angolo nullo, e degli angoli concavi).

Due rette non parallele in un piano individuano quattro angoli: diamo ora una definizione che risulta comoda per fissare uno dei quattro.

Definizione 1.109. *Siano $\vec{r}$ ed $\vec{s}$ rette orientate non parallele contenute in un piano π. Detto O il punto di intersezione, sia σ il semipiano di π individuato da r che contiene i punti di s che seguono O ma non quelli che lo precedono, e sia τ il semipiano di π individuato da s che contiene i punti di r che seguono O ma non quelli che lo precedono. Allora l'angolo (convesso proprio)*

$$\sigma \cap \tau$$

sarà chiamato angolo individuato da $\vec{r}$ ed $\vec{s}$, *o anche* angolo convesso individuato dalle semirette r_O^+ ed s_O^+.



1.18. **Congruenza tra segmenti.** Dati due segmenti nello spazio, sappiamo confrontarli: il procedimento consiste nel trasportarli l'uno sull'altro (pensiamo a due bastoncini o a due fili). Se i due bastoncini possono essere portati a coincidere, allora si dice che i segmenti di partenza sono *congruenti*, o che hanno la stessa *lunghezza*. A partire da questa idea, si può anche definire il concetto di *misura*, che si fonda sulla possibilità di riportare consecutivamente dei segmenti di fissata lunghezza. Tutto questo discorso può essere formalizzato insiemisticamente in varie maniere. Una è quella di richiedere per assioma (postulare) l'esistenza di particolari funzioni dello spazio in sé, detti movimenti rigidi (il che traduce il trasporto dei bastoncini). Un'altra è quella di postulare l'esistenza di una relazione di equivalenza tra segmenti (la congruenza, cioè l'avere la stessa lunghezza), con particolari proprietà di trasporto. Seguiamo questa seconda strada.

Prerequisito 1.110. *Assumiamo come nozione primitiva la* congruenza *tra segmenti.*

Assioma 1.111. *La congruenza tra segmenti è una relazione di equivalenza nell'insieme dei segmenti.*

Notazione 1.112. *La relazione di congruenza tra segmenti sarà indicata col simbolo*

$$\equiv$$

Definizione 1.113. *Una* lunghezza *è una classe di equivalenza di segmenti congruenti.*

Dunque la lunghezza di un segmento s è la sua classe di equivalenza $[s]$ rispetto alla relazione di congruenza. Se l è una lunghezza ed s è un segmento, dire che "s ha lunghezza l" formalmente equivale a dire che $s \in l$. In ambito fisico-geometrico, la lunghezza non è propriamente un numero ma una "grandezza": le lunghezze diventano numeri quando le si misura rispetto ad una di loro, fissata arbitrariamente come unità (di misura, appunto).

Notiamo poi che il concetto di congruenza potrebbe essere introdotto, più semplicemente, usando le coppie di punti invece dei segmenti (ed in tal caso le classi di equivalenza si potrebbero chiamare "distanze" invece di lunghezze). Abbiamo qui preferito comunque seguire la via tradizionale.

1.19. **Congruenza tra angoli.**

Prerequisito 1.114. *Assumiamo come nozione primitiva la* congruenza *tra angoli convessi propri.*

Assioma 1.115. *La congruenza tra angoli convessi propri è una relazione di equivalenza nell'insieme degli angoli convessi propri.*

Notazione 1.116. *La relazione di congruenza tra angoli convessi propri sarà indicata, per abuso di notazione, con lo stesso simbolo usato per la congruenza tra segmenti:*

$$\equiv$$

Definizione 1.117. *Un'*ampiezza *è una classe di equivalenza di angoli congruenti.*

Dunque l'ampiezza di un angolo α è la sua classe di equivalenza $[\alpha]$ rispetto alla relazione di congruenza. Se a è un'ampiezza ed α è un angolo, dire che "α ha ampiezza a" formalmente equivale a dire che $\alpha \in a$.

1.20. **Addizione tra lunghezze.**

Assioma 1.118. *Fissati un segmento $\overline{AB}$, una retta r, un verso $\prec$ su r e un punto $C \in r$, esiste uno ed un solo punto $D \in r$ tale che*

$$C \preceq D \quad e \quad \overline{CD} \equiv \overline{AB}\,.$$

L'assioma ora visto può anche essere enunciato in modo equivalente: *fissati una lunghezza l e una semiretta s di origine un punto A, esiste uno ed un solo punto $B \in s$ tale che $\overline{AB}$ abbia lunghezza l.*

Assioma 1.119. *Siano r ed r' rette e, fissato un verso su ciascuna di esse, siano $A, B, C \in r$ e $A', B', C' \in r'$ tali che:*

- $A \preceq B \preceq C$ e $A' \preceq B' \preceq C'$
- $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$

Allora si ha

$$\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}\ .$$

Osservazione 1.120. *Tenendo presente l'assioma 1.118, l' assioma 1.119 può essere enunciato nel seguente modo equivalente.*
Siano l ed l' due lunghezze. Siano r ed s rette, si fissi un verso su ciascuna e siano $A \in r$ e $B \in s$. Sia A' l'unico punto $\succeq A$ tale che $\overline{AA'}$ abbia lunghezza l e sia A'' l'unico punto $\succeq A'$ tale che $\overline{A'A''}$ abbia lunghezza l'. Similmente, sia B' l'unico punto $\succeq B$ tale che $\overline{BB'}$ abbia lunghezza l e sia B'' l'unico punto $\succeq B'$ tale che $\overline{B'B''}$ abbia lunghezza l'. Allora $\overline{AA''}$ e $\overline{BB''}$ hanno la stessa lunghezza.

Proposizione 1.121. *Siano l ed l' lunghezze. Esiste un'unica lunghezza l'' tale che esistano punti $A \preceq A' \preceq A''$ (appartenenti a qualche retta orientata) con $\overline{AA'}$ di lunghezza l, $\overline{A'A''}$ di lunghezza l' e $\overline{AA''}$ di lunghezza l''.*

Dimostrazione. Si deduce subito dall'osservazione precedente. □

Definizione 1.122. *Siano l ed l' lunghezze. L'unica lunghezza l'' soddisfacente la condizione della proposizione precedente si dice* somma *di l ed l' e si indica con $l + l'$. L'operazione nell'insieme delle lunghezze che ad ogni coppia di lunghezze associa la loro somma si dice* addizione *tra lunghezze, e si denota con $+$.*

Proposizione 1.123. *L'addizione tra lunghezze ha la proprietà commutativa, cioè: se l ed l' sono lunghezze qualsiasi, si ha $l + l' = l' + l$.*

Dimostrazione (cenno). Basta prendere dei punti $A \preceq A' \preceq A''$ (appartenenti a qualche retta orientata) con $\overline{AA'}$ di lunghezza l, $\overline{A'A''}$ di lunghezza l', e considerare il verso opposto. □

Proposizione 1.124. *L'addizione tra lunghezze ha la proprietà associativa, cioè: se l, l' ed l'' sono lunghezze qualsiasi, si ha $(l + l') + l'' = l + (l' + l'')$.*

Dimostrazione (cenno). Basta prendere dei punti $A \preceq B \preceq C \preceq D$ con $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ di lunghezze rispettive l, l', l'', e provare che $\overline{AD}$ ha lunghezza sia $(l + l') + l''$ che $l + (l' + l'')$. □

Proposizione 1.125. *La lunghezza l_0 di un segmento nullo è elemento neutro per l'addizione tra lunghezze.*

Dimostrazione (cenno). Sia $\overline{AA}$ un segmento nullo. Fissiamo una retta r contenente A, un verso su di essa e una qualunque lunghezza l. Considerando l'unico punto $B \succeq A$ tale che $\overline{AB}$ abbia lunghezza l, si può dedurre facilmente che $l_0 + l = l$. In maniera simile si dimostra che $l + l_0 = l$. □

Osservazione 1.126. *Dalla proposizione precedente e dalla proposizione 1.49 si deduce subito che i segmenti nulli sono tutti congruenti tra loro. Inoltre, dall'assioma 1.118 segue subito che un segmento congruente ad un segmento nullo è per forza nullo.*

Definizione 1.127. *La lunghezza dei segmenti nulli sarà detta lunghezza* nulla.

1.21. **Numeri reali.** Abbiamo già formalizzato la nozione di numero naturale, e non sarebbe difficile farlo anche per insiemi numerici via via più ampi, fino ad arrivare a quello dei numeri reali. Poiché i numeri reali sono ampiamente trattati nel corso di Analisi, li assumiamo come prerequisito, fornendo poi però tutte le informazioni che ci serviranno nel seguito.

Prerequisito 1.128. *Assumiamo noto cosa sia un* numero reale *e cosa siano l'*addizione $+$ *e la* moltiplicazione $\times$ *nell'insieme dei numeri reali.*

Riportiamo (senza dimostrazione) le proposizioni basilari riguardo ai numeri reali.

Proposizione 1.129. *L'addizione e la moltiplicazione sono operazioni nell'insieme dei numeri reali.*

Notazione 1.130. *L'insieme dei numeri reali sarà denotato con $\mathbb{R}$. Se $x, y \in \mathbb{R}$ il numero $x \times y$ sarà quasi sempre denotato semplicemente con xy, e solo talvolta con $x \cdot y$ (quasi mai con $x \times y$).*

Secondo alcune impostazioni, i numeri naturali non sarebbero a rigore casi particolari di numeri reali. Nel corso di Analisi dovrebbe essere comunque stato detto che si può definire $\mathbb{R}$ facendo invece in modo che contenga $\mathbb{N}_0$ come sottoinsieme. Noi seguiamo questa impostazione.

Proposizione 1.131. $\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{R}$. *Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ il suo successivo è uguale ad $n + 1$.*

Si potrà vedere poi facilmente che $\mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{R}$. Dalla proposizione 1.8 si deduce il seguente fatto, che può essere visto come una delle forme del famoso *principio di induzione*.

Proposizione 1.132. *Sia $X \subseteq \mathbb{N}_0$. Se*
- $0 \in X$,
- $x \in X \;\Rightarrow\; x + 1 \in X$,

allora $X = \mathbb{N}_0$.

Proposizione 1.133. *L'insieme $\mathbb{R}$ con l'operazione $+$ di addizione è un gruppo commutativo, ed il suo elemento neutro è 0.*

Osservazione 1.134. *Dato $x \in \mathbb{R}$, per le proposizioni 1.133 e 1.52, c'è un unico $y \in \mathbb{R}$ tale che $x + y = 0 = y + x$.*

Definizione 1.135. *Dato $x \in \mathbb{R}$, l'unico $y \in \mathbb{R}$ tale che $x + y = 0 = y + x$ (osservazione 1.134) viene detto l'*opposto *di x, e si denota con $-x$. Se $x, z \in \mathbb{R}$, il numero $x + (-z)$ si chiama* differenza *di x e z, e si denota con $x - z$.*

Proposizione 1.136. *L'operazione $\times$ di moltiplicazione in $\mathbb{R}$ ha le seguenti proprietà.*
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (xy)z = x(yz)$;
- $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 \cdot x = x$;
- $\forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}\ \exists y \in \mathbb{R} \mid xy = 1$;
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = yx$.

C'è poi la seguente *proprietà distributiva* della moltiplicazione rispetto all'addizione.

Proposizione 1.137. *Siano* $x, y, z \in \mathbb{R}$. *Si ha*

$$x(y+z) = xy + xz \ .$$

Si può così dedurre la seguente *legge di annullamento del prodotto*.

Proposizione 1.138. *Siano* $x, y \in \mathbb{R}$. *Allora si ha*

$$xy = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0 \text{ oppure } y = 0 \ .$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima l'implicazione $\Leftarrow$. Supponiamo che $y = 0$. Allora abbiamo

$$\begin{aligned} xy &= x \cdot 0 = x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0 + (x \cdot 0 - x \cdot 0) \\ &= (x \cdot 0 + x \cdot 0) - x \cdot 0 = x \cdot (0+0) - x \cdot 0 = x \cdot 0 - x \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Se poi $x = 0$ abbiamo $xy = 0 \cdot y = y \cdot 0$, che è 0 per quello che abbiamo appena dimostrato (con y al posto di x).
Dimostriamo ora l'implicazione $\Rightarrow$; supponiamo quindi che $xy = 0$. Se $x = 0$, allora la tesi è verificata. Se invece $x \neq 0$, allora per la proposizione 1.136 esiste x' tale che $xx' = 1$ ed abbiamo

$$y = 1 \cdot y = (xx')\, y = (x'x)\, y = x'(xy) = x' \cdot 0 \ ,$$

che è 0 perché l'implicazione $\Leftarrow$ l'abbiamo già dimostrata. □

Osservazione 1.139. *Per la proposizione 1.138, possiamo definire una moltiplicazione ristretta all'insieme* $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, cioè l'operazione* $\times^*$ *data sempre da* $x \times^* y := x \times y$*, ma solo per gli* $x, y \in \mathbb{R}^*$*. Per la proposizione 1.136 abbiamo che* $(\mathbb{R}^*, \times^*)$ *è un gruppo abeliano e che il suo elemento neutro è* 1.
Dato poi $x \in \mathbb{R}^*$*, per la proposizione 1.52 c'è un unico* $y \in \mathbb{R}^*$ *tale che* $xy = 1 = yx$.

Definizione 1.140. *Dato* $x \in \mathbb{R}$*, l'unico* $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *tale che* $xy = 1 = yx$ *(osservazione 1.139) viene detto l'*inverso*, o anche il* reciproco*, di* x*, e si denota con* $\frac{1}{x}$ *o con* x^{-1}*. Se* $x \in \mathbb{R}$ *e* $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, il numero* $x \cdot \frac{1}{z}$ *si dice* rapporto di x e z *e si denota con* $\frac{x}{z}$.

Osservazione 1.141. *Poiché per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *c'è un unico opposto abbiamo* $-(-x) = x$*, e poiché per ogni* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *c'è un unico inverso abbiamo* $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$.

Sulla base delle proprietà finora richiamate, possiamo presentare facilmente un paio di insiemi numerici di largo uso.

Definizione 1.142. *Un* $x \in \mathbb{R}$ *si dice* intero *se* $x \in \mathbb{N}_0$ *oppure* $-x \in \mathbb{N}_0$*. L'insieme degli interi si denota con* $\mathbb{Z}$.
Un $x \in \mathbb{R}$ *si dice* razionale *se esistono due interi* a *e* b *tali che*

$$x = \frac{a}{b}$$

(ovviamente, è necessario che sia $b \neq 0$*). L'insieme dei razionali si denota con* $\mathbb{Q}$.

Le proprietà finora viste valgono tutte per $\mathbb{Q}$, e a $\mathbb{Z}$ manca solo la terza della proposizione 1.136 (cosa che è abbastanza chiara per chi ha già familiarità con i numeri, ma che potrebbe anche essere dimostrata sulla sola base delle proprietà e definizioni finora richiamate). Per riuscire a trovare una proprietà di $\mathbb{R}$ che $\mathbb{Q}$ non ha, cominciamo a richiamare la relazione d'ordine totale che $\mathbb{R}$ possiede "in maniera naturale".

Prerequisito 1.143. *Assumiamo noto cosa sia la relazione in* $\mathbb{R}$ *denotata con* $<$ *("minore").*

Proposizione 1.144. *La relazione* $<$ *è una relazione d'ordine stretto totale in* $\mathbb{R}$*.*

Definizione 1.145. *Se* x, y *sono numeri reali tali che* $x < y$*, si dirà che* x *è* minore *di* y*, o anche che* y *è* maggiore *di* x*; si potrà anche scrivere* $y > x$*. I simboli* $\leq$ *e* $\geq$*, si leggono rispettivamente* minore o uguale *e* maggiore o uguale*, per cui:*

$$x \leq y \quad :\Longleftrightarrow \quad x < y \text{ oppure } x = y\ ;$$
$$x \geq y \quad :\Longleftrightarrow \quad x > y \text{ oppure } x = y\ .$$

Proposizione 1.146. *Siano* $x, y, z \in \mathbb{R}$*. Si ha*

$$x < y \quad \Rightarrow \quad x + z < y + z\ ;$$
$$x > 0 \text{ e } y > 0 \quad \Rightarrow \quad xy > 0\ .$$

Fin qui, anche la restrizione a $\mathbb{Q}$ della relazione $<$ possiede le proprietà che abbiamo richiamato. La proposizione seguente invece, non è soddisfatta dalla restrizione a $\mathbb{Q}$ (cosa anche questa molto nota, e che si potrebbe dimostrare solo sulla base dei fatti finora richiamati).

Proposizione 1.147. *Sia* $S \subset \mathbb{R}$ *non vuoto e sia*

$$M_S := \{x \in \mathbb{R} : \forall s \in S,\ s \leq x\}\ .$$

Se $M_S \neq \emptyset$ *allora esiste* $e \in M_S$ *tale che*

$$\forall x \in M_S, \qquad e \leq x\ . \tag{3}$$

Osservazione 1.148. *Nella situazione della proposizione di sopra, l'elemento* e *è ovviamente l'unico con la proprietà (3).*

Definizione 1.149. *Nella situazione della proposizione 1.147, il numero* e *si dirà* estremo superiore di S.

Osservazione 1.150. *Affinché un insieme non vuoto* $S \subseteq \mathbb{R}$ *abbia estremo superiore occorre e basta che l'insieme*

$$M_S := \{x \in \mathbb{R} : \forall s \in S,\ s \leq x\}$$

sia anch'esso non vuoto. Dunque occorre e basta che esista almeno un x *tale che* $\forall s \in S,\ s \leq x$*. Un tale* x *si dice un* maggiorante *di* S*.*
Poiché poi l'estremo superiore, se esiste, appartiene ad M_S*, è anche lui un maggiorante (ed è anzi per definizione il minore tra tutti i maggioranti).*

Sulla base delle proprietà di $\mathbb{R}$ finora richiamate, si possono ricostruire tutti i risultati riguardanti i numeri reali. Vediamone ora esplicitamente uno (ovvio per chi ha familiarità con i numeri), che ci servirà nel seguito.

Proposizione 1.151. *Siano* $x, y \in \mathbb{R}$*. Allora*

$$x < y \iff -x > -y\ .$$

Dimostrazione. Se $x < y$, per la proposizione 1.146 (prima proprietà) abbiamo $x + (-x - y) < y + (-x - y)$. Ma $x + (-x - y) = (x - x) - y = 0 - y = -y$ e $y + (-x - y) = (-x - y) + y = -x + (-y + y) = -x + 0 = -x$. Quindi $-y < -x$, cioè $-x > -y$. Questo dimostra l'implicazione $\Rightarrow$.

Per il viceversa, basta applicare l'implicazione ora dimostrata, con $-y$ al posto di x e $-x$ al posto di y, e tenere presente l'osservazione 1.141. □

Dimostriamo ora la *proprietà di Archimede* per i numeri reali (cfr. l'assioma 1.159 che enunceremo più avanti in ambito geometrico).

Proposizione 1.152. *Siano $x, y \in \mathbb{R}$ con $y > 0$. Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $ny > x$.*

Dimostrazione. Sia

$$S = \{ny : n \in \mathbb{N}\} \ .$$

Iniziamo a supporre per assurdo che x sia un maggiorante di S, così che esista l'estremo superiore e di S. Per la proposizione 1.151 abbiamo $0 > -y$, e quindi per la proposizione 1.146 abbiamo $e > e - y$. Dunque $e - y$ non può essere un maggiorante di S. Esiste allora un $s \in S$ tale che $s > e - y$, e per definizione di S, esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che $s = my$. Abbiamo

$$(m+1)y = ny + 1 \cdot y = s + y > (e - y) + y = e + (-y + y) = e + 0 = e \ ,$$

cioè, $(m + 1)y > e$. Ma $m + 1$ è il successivo di m, e quindi appartiene a $\mathbb{N}$, il che significa che $(m+1)y \in S$. Questo è assurdo perché allora non può essere maggiore dell'estremo superiore e, come invece abbiamo visto.

Questo prova che x non può essere un maggiorante di S. Quindi deve esistere un $s \in S$ tale che $s > x$. Ma per definizione di S, $s = ny$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, e troviamo quindi che $ny > x$ come volevamo. □

Così procedendo, si può arrivare (con un po' di fatica, ma non tantissima) alle varie regole di calcolo studiate nel percorso scolastico. Non lo facciamo, per lasciare spazio a cose più importanti per il corso.

Prerequisito 1.153. *Assumiamo nota la rappresentazione decimale dei numeri reali e le convezioni in uso per espressioni contenenti parentesi, addizioni, moltiplicazioni ed esponenti (in particolare, la "precedenza" delle parentesi e quella della moltiplicazione rispetto all'addizione).*

D'ora in poi potremo quindi usare liberamente le consuete regole di calcolo, senza più fare tutti i passaggetti relativi alle singole proprietà di base dei numeri reali.

Definizione 1.154. *Definiamo il* valore assoluto *di un $x \in \mathbb{R}$ come*

$$\begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0; \\ -x \ , & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Il valore assoluto di x si denota con

$$|x| \ .$$

1.22. Misura delle lunghezze.

Definizione 1.155. *Se l ed l' sono lunghezze qualsiasi, allora si dirà che l è* minore *di l' quando esiste una lunghezza non nulla l'' tale che*

$$l' = l + l'' \ .$$

Si viene così ad avere una relazione nell'insieme delle lunghezze, che si indicherà, per abuso di notazione, con lo stesso simbolo

$$<$$

della relazione "minore" in $\mathbb{R}$. La notazione

$$l \leq l'$$

indicherà che l è minore oppure è uguale ad l'.

Proposizione 1.156. *La relazione $<$ nell'insieme delle lunghezze è una relazione d'ordine stretto totale.*

Dimostrazione (cenno). Siano l ed l' lunghezze, si fissi una retta orientata ed un suo punto O. Se A è l'unico punto $\succeq O$ tale che $\overline{OA}$ ha lunghezza l e A' è l'unico punto $\succeq O$ tale che $\overline{OA'}$ ha lunghezza l', allora si ha

$$l < l' \iff A \prec A' .$$

Basta poi usare l'assioma 1.88. $\square$

Definizione 1.157. *Sia $n \in \mathbb{N}_0$ e sia l una lunghezza. La lunghezza pari alla somma di n lunghezze uguali ad l, assumendo questa uguale alla lunghezza nulla nel caso $n = 0$ e ad l nel caso $n = 1$, si dirà* prodotto *di n per l, e si indicherà con nl.*

La definizione di sopra è un po' informale perché presuppone che si sappia cosa vuol dire "n lunghezze". La definizione formale si può dare facilmente usando il principio di induzione: lo abbiamo fatto a lezione, ma per brevità non lo riportiamo in questo testo (come tutto questo paragrafo di fondamenti, non è una cosa che si chiede in sede d'esame).

Osservazione 1.158. *Dalla proprietà commutativa ed associativa dell'addizione tra lunghezze, non è difficile dedurre che se $l < l'$ ed $n \in \mathbb{N}$, allora $nl < nl'$.*

Il seguente assioma viene chiamato *assioma di Archimede*.

Assioma 1.159. *Se l è una lunghezza qualunque ed u è una lunghezza non nulla, allora esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $mu > l$.*

Osservazione 1.160. *Sia u una lunghezza non nulla, sia l una lunghezza qualsiasi e si consideri l'insieme*

$$X = \{x \in \mathbb{Q} \mid \exists m, n \in \mathbb{N}_0 : x = \frac{m}{n} \text{ e } mu \leq nl\}$$

(che è non vuoto perché $0 \in X$).
Per l'assioma 1.159 esiste $m \in \mathbb{N}_0$ tale che $mu > l$. Dall'osservazione 1.158 segue facilmente che m è un maggiorante di X. Dunque per l'osservazione 1.150, esiste l'estremo superiore di X.

Definizione 1.161. *Nella situazione dell'osservazione qui sopra, l'estremo superiore di X si dice* misura *di l rispetto ad u.*
Per misura *di un segmento $\overline{AB}$ rispetto ad u intenderemo la misura della sua lunghezza.*

Osservazione 1.162. *Sia $\overline{AB}$ un segmento ed u una lunghezza non nulla. Detta l la lunghezza di $\overline{AB}$, poiché 0 appartiene all'insieme X definito nell'osservazione 1.160, e tenendo presente l'osservazione 1.150, si ha che la misura di $\overline{AB}$ rispetto ad u è un numero reale non negativo (cioè ≥ 0).*

Definizione 1.163. *Spesso si sottintende di aver fissato una lunghezza non nulla u (detta unità di misura) e, parlando di misura di $\overline{AB}$, si sottintende "rispetto ad u". Tale misura viene anche chiamata* modulo *di $\overline{AB}$ e viene indicata con $|\overline{AB}|$.*

La definizione del modulo come un numero (ottenuto rispetto ad una assegnata unità di misura) è usuale in ambito matematico. Spesso in ambito fisico si preferisce considerarlo come un "numero dimensionato" (in quest'ottica, il modulo di un segmento andrebbe definito semplicemente come la sua lunghezza, e non come la sua misura).

Con la misura, date due lunghezze si ottiene un numero ≥ 0 che esprime il loro rapporto. Viceversa, se abbiamo una lunghezza non nulla u e un numero $x \geq 0$, è esperienza comune che c'è una lunghezza che misura x rispetto ad u (e che può anche essere chiamato il prodotto di x per u). Per dimostrarlo, useremo due fatti fondamentali: il primo è un assioma, chiamato *assioma di Cantor*, ed il secondo è che si può dividere una lunghezza a metà, cioè che esiste il punto medio di un segmento. L'assioma di Cantor è il seguente.

Assioma 1.164. *Sia*

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

una successione di segmenti chiusi tale che se $i, j \in \mathbb{N}_0$ sono tali che se $i \leq j$, allora $s_i \supseteq s_j$. Allora esiste almeno un punto contenuto in tutti i segmenti s_n, cioè:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} s_n \neq \emptyset \, .$$

Forse anche l'esistenza del punto medio si potrebbe considerare come un assioma, ma tradizionalmente lo si deduce (con un po' di fatica) da alcuni assiomi sugli angoli, che ora esaminiamo.

Assioma 1.165. *Sia α un angolo convesso proprio, sia r una retta, sia r^+ una semiretta contenuta in r e sia σ un semipiano individuato da r. Allora esiste un unico angolo convesso proprio congruente ad α, contenuto in σ e che abbia r^+ come lato.*

Assioma 1.166. *Se $A\hat{O}B$ e $A'\hat{O}'B'$ sono angoli convessi propri, e se si ha*

$$A\hat{O}B \equiv A'\hat{O}'B', \qquad \overline{OA} \equiv \overline{O'A'}, \qquad \overline{OB} \equiv \overline{O'B'} \, ,$$

allora si ha anche

$$O\hat{B}A \equiv O'\hat{B}'A' \qquad e \qquad O\hat{A}B \equiv O'\hat{A}'B' \, .$$

Proposizione 1.167. *Siano $A\hat{O}B$ e $A'\hat{O}'B'$ angoli convessi propri tali che:*

$$A\hat{O}B \equiv A'\hat{O}'B', \qquad \overline{OA} \equiv \overline{O'A'}, \qquad \overline{OB} \equiv \overline{O'B'} \, .$$

Allora

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \, .$$

Dimostrazione (cenno). Fissato sulla retta $r_{A'B'}$ il verso secondo cui $A' \prec B'$, sia D' l'unico punto $\succ A'$ tale che $\overline{A'D'} \equiv \overline{AB}$. Per l'assioma 1.166 abbiamo che $O\hat{A}B \equiv O'\hat{A}'B'$, ma ovviamente $O'\hat{A}'B' = O'\hat{A}'D'$. Avendo quindi $O\hat{A}B \equiv O'\hat{A}'D'$, $\overline{AB} \equiv \overline{A'D'}$ e $\overline{OA} \equiv \overline{O'A'}$, ancora per l'assioma 1.166 abbiamo $A\hat{O}B \equiv A'\hat{O}'D'$. Siccome abbiamo anche $A\hat{O}B \equiv A'\hat{O}'B'$, dall'assioma 1.165 segue facilmente che $D' = B'$. Ma avevamo scelto D' in modo che $\overline{AB} \equiv \overline{A'D'}$, quindi $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ come volevamo. $\square$

Proposizione 1.168. *Siano α ed α' angoli convessi propri congruenti, sia β un angolo supplementare ad α e sia β' un angolo supplementare ad α'.*
Allora β e β' sono congruenti.

Dimostrazione (cenno). Consideriamo dei punti $A, O, B, C, A', O', B', C'$ tali che

$$A\hat{O}B = \alpha, \quad A'\hat{O}'B' = \alpha', \quad A\hat{O}C = \beta, \quad A'\hat{O}'C' = \beta' ,$$
$$\overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC} \equiv \overline{O'A'} \equiv \overline{O'B'} \equiv \overline{O'C'}$$

e tali che C, O, B siano allineati, e così pure C', O', B'.

Per l'assioma 1.166 si ha $O\hat{B}A \equiv O'\hat{B}'A'$ e quindi $C\hat{B}A = O\hat{B}A \equiv O'\hat{B}'A' = C'\hat{B}'A'$. Inoltre, per la proposizione 1.167 si ha $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$. Poiché per l'assioma 1.119 si ha $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, partendo dagli angoli $C\hat{B}A$ e $C'\hat{B}'A'$ e usando come prima la proposizione 1.167 e l'assioma 1.166 si ottiene $\overline{CA} \equiv \overline{C'A'}$ e $O\hat{C}A \equiv O'\hat{C}'A'$. Partendo da questi angoli e usando ancora l'assioma 1.166 si ottiene infine $\beta \equiv \beta'$. $\square$

Proposizione 1.169. *Siano r, r' ed s rette contenute in un piano π, tali che s non sia parallela né ad r né ad r', e supponiamo che i punti d'intersezione A e A' di s rispettivamente con r ed r' siano distinti. Detti poi σ_+ e σ_- i semipiani di π individuati da s, sia $B \in \sigma_+ \cap r$ e $B' \in \sigma_- \cap r'$. Allora*

$$B'\hat{A}'A \equiv B\hat{A}A' \quad \Rightarrow \quad r \text{ ed } r' \text{ parallele} .$$

Dimostrazione (cenno). Supponiamo per assurdo che esista un punto d'intersezione P di r ed r'. Per fissare le idee, mettiamoci nel caso in cui $P \in \sigma_+$ (il caso $P \in \sigma_-$ si tratta in maniera analoga). Consideriamo il punto $P' \in r' \cap \sigma_-$ tale che $\overline{A'P'} \equiv \overline{AP}$. Usando l'assioma 1.166 e la proposizione 1.168 non è difficile trovare una contraddizione con l'assioma 1.165. $\square$

Proposizione 1.170. *Nelle stesse ipotesi della proposizione 1.169, vale anche l'implicazione inversa*

$$r \text{ ed } r' \text{ parallele} \quad \Rightarrow \quad B'\hat{A}'A \equiv B\hat{A}A' .$$

Dimostrazione (cenno). Basta usare l'implicazione già dimostrata, l'assioma 1.165 e l'assioma 1.80. $\square$

Proposizione 1.171. *Siano A, B, C punti non allineati. Siano A', B', C' altri punti non allineati. Se si ha*

$$C\hat{A}B \equiv C'\hat{A}'B', \qquad C\hat{B}A \equiv C'\hat{B}'A', \qquad \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} ,$$

allora si ha anche

$$A\hat{C}B \equiv A'\hat{C}'B', \qquad \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}, \qquad \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} .$$

Dimostrazione (cenno). Fissato su $r_{A'C'}$ il verso secondo cui $A' \prec C'$, consideriamo l'unico punto D' che segue A' e tale che $\overline{AC} \equiv \overline{A'D'}$. Basta poi usare l'assioma 1.166, l'assioma 1.165 e la proposizione 1.167. $\square$

Proposizione 1.172. *Siano r, r', s, s' rette contenute in un piano π, con r, r' parallele tra loro, s, s' parallele tra loro, ma con r, s non parallele (così che, per la transitività del parallelismo, anche r' non può essere parallela ad s, né r può essere parallela ad s', né r', s' possono essere parallele). Consideriamo poi i punti d'intersezione*

$$\{A\} := r \cap s\,, \quad \{A'\} := r' \cap s\,, \quad \{B\} := r \cap s'\,, \quad \{B'\} := r' \cap s'\,.$$

Allora si ha

$$\overline{AA'} \equiv \overline{BB'} \qquad e \qquad \overline{AB} \equiv \overline{A'B'}\,.$$

Dimostrazione (cenno). Dalla proposizione 1.170 segue che $A\hat{A}'B \equiv B'\hat{B}A'$ e $A\hat{B}A' \equiv B'\hat{A}'B$. Basta poi applicare la proposizione 1.171. $\square$

Proposizione 1.173. *Siano r, r' ed r'' rette parallele contenute in un piano π, e siano s e t rette contenute in π non parallele alle precedenti. Siano A, A', A'' i punti d'intersezione di s rispettivamente con r, r', r'', e siano B, B', B'' i punti d'intersezione di t rispettivamente con r, r', r''. Allora*

$$\overline{AA'} \equiv \overline{A'A''} \quad \Rightarrow \quad \overline{BB'} \equiv \overline{B'B''}\,.$$

Dimostrazione (cenno). Si possono considerare le parallele a t passanti per A e A', e le loro rispettive intersezioni con r' ed r'', ed usare poi varie volte alcuni dei risultati esposti finora. $\square$

Finalmente possiamo dimostrare l'esistenza del punto medio.

Proposizione 1.174. *Dato un segmento $\overline{AB}$ contenuto in una retta r, esiste un punto $M \in r$ tale che*

$$\overline{AM} \equiv \overline{MB}\,.$$

Dimostrazione (cenno). Consideriamo un piano π che contiene r ed una retta $s \neq r$ in π passante per A. Prendiamo poi un punto $M' \in s$ distinto da A e osserviamo che esiste un punto $B' \neq A$ in s tale che $\overline{AM'} \equiv \overline{M'B'}$. Si può usare allora la proposizione 1.173 per dimostrare che l'intersezione di r con l'unica retta passante per M' e parallela ad $r_{BB'}$ fornisce il voluto punto M. $\square$

Proposizione 1.175. *Sia u una lunghezza non nulla e sia x un numero reale ≥ 0. Allora esiste un'unica lunghezza l tale che la misura di l rispetto ad u sia x.*

Dimostrazione (cenno). Si fissi una semiretta s, sia O la sua origine e sia U_0 l'unico punto di s tale che $\overline{OU_1}$ abbia lughezza u. Grazie alla proposizione 1.174, possiamo costruire una successione

$$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

di punti di s tale che per ogni numero naturale n si abbia $\overline{OU_{n+1}} \equiv \overline{U_{n+1}U_n}$. Indicando con u_n la lunghezza di $\overline{OU_n}$ (quindi $2^{n-1}u_n = u$), sia x_n il più grande numero in $\mathbb{N}_0$ tale che

$$\frac{x_n}{2^{n-1}} \leq x$$

(tale numero esiste per la proprietà di Archimede per i numeri reali, proposizione 1.152). Indichiamo poi con A_n l'unico punto di s tale che $\overline{OA_n}$ abbia lunghezza $x_n u_n$ e con B_n l'unico punto di s tale che $\overline{OB_n}$ abbia lunghezza $(x_n + 1)u_n$. Non è difficile verificare che la successione di segmenti

$$\left(\overline{A_n B_n}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

soddisfa l'ipotesi dell'assioma 1.164, che non possono esistere due punti distinti contenuti in tutti i segmenti della successione e che, detto X l'unico punto appartenente a tutti i segmenti della successione, la lunghezza di $\overline{OX}$ soddisfa le condizioni richieste. □

Proposizione 1.176. *Siano x la misura di una lunghezza l rispetto ad una lunghezza u, e sia y la misura di u rispetto ad una lunghezza u'. Allora la misura di l rispetto ad u' è il prodotto xy.*

Rinunciamo a riportare la dimostrazione.

1.23. **Teorema di Talete.** La proposizione 1.173 è un caso particolare di un famoso teorema classico: il teorema di Talete. Classicamente questo teorema veniva dedotto sulla base di una teoria puramente geometrica delle proporzioni. Una volta che, anche grazie alla proposizione 1.173, abbiamo definito la misura, possiamo dimostrare il teorema di Talete, nella sua forma generale, usando invece questo strumento.

Proposizione 1.177. *Date tre rette parallele r, r', r'' contenute in un piano π, con $r \neq r''$, date due rette s e t contenute in π e non parallele alle precedenti, e detti A, A' e A'' i punti di intersezione di s rispettivamente con r, r', r'', e analogamente B, B', B'' le intersezioni di t, si ha*

$$\frac{|AA'|}{|AA''|} = \frac{|BB'|}{|BB''|}\,.$$

Nella nostra impostazione questo teorema si può dimostrare senza particolari difficoltà (solo con un po' di fatica) tenendo presenti la definizione 1.161 e la proposizione 1.173. Rinunciamo però a riportare qui i dettagli.

1.24. **Versi concordi.** Siano r ed s rette parallele. Fissato un verso su r, è abbastanza intuitivo che uno dei versi di s è *concorde* con il verso scelto, mentre l'altro è *discorde*. Passiamo a formalizzare questa nozione.

Proposizione 1.178. *Sia r una retta, si fissi un verso su r e siano A, B punti su r tali che $A \prec B$. Allora esiste almeno un punto C tale che*

$$A \prec C \prec B$$

e almeno un punto D che segue B.

Dimostrazione (cenno). Basta usare usare la proposizione 1.174 e l'assioma 1.118. □

Proposizione 1.179. *Siano r ed s due rette propriamente parallele, sia π il piano che le contiene, sia P un punto di s e sia π_+ il semipiano di π individuato da r che contiene P. Allora s è tutta contenuta in π.*

Dimostrazione. Sia Q un qualsiasi punto di s. Poiché r ed s sono propriamente parallele, e poiché il segmento $\overline{PQ}$ è contenuto in s, si ha

$$\overline{PQ} \cap r = \emptyset \, .$$

Per definizione di semipiano, siccome $P \in \pi_+$, si deve avere $Q \in \pi_+$. Abbiamo così dimostrato che qualsiasi punto di s è contenuto in π_+, come volevamo. □

Definizione 1.180. *Siano r ed r' due rette propriamente parallele e sia π il piano che le contiene. L'intersezione del semipiano individuato da r che contiene r' e del semipiano individuato da r' che contiene r sarà detta* striscia *di π individuata da r, r'.*

Proposizione 1.181. *Siano r ed r' due rette propriamente parallele, sia π il piano che le contiene, sia A un punto di r ed A' un punto di r'. Allora l'intersezione di $r_{AA'}$ con la striscia di π individuata da r, r' è uguale all'insieme dei punti interni al segmento $\overline{AA'}$.*

Dimostrazione. Fissiamo su $r_{AA'}$ il verso tale che $A \prec A'$. Sia π_+ il semipiano individuato da r che contiene r' e sia $\pi_+{}'$ il semipiano individuato da r' che contiene r.

Per l'osservazione 1.106, l'insieme dei punti che seguono A è l'intersezione di $r_{AA'}$ con uno dei semipiani individuati da r. Poiché A' è tra questi punti, il semipiano in questione è π_+. Dunque l'insieme dei punti che seguono A è uguale a

$$\pi_+ \cap r_{AA'} \, .$$

Allo stesso modo si vede che l'insieme dei punti che precedono A' è uguale a

$$\pi_+{}' \cap r_{AA'} \, .$$

Dunque l'insieme dei punti interni al segmento $\overline{AA'}$ è

$$(\pi_+ \cap r_{AA'}) \cap (\pi_+{}' \cap r_{AA'}) \, .$$

Ma

$$(\pi_+ \cap r_{AA'}) \cap (\pi_+{}' \cap r_{AA'}) = (\pi_+ \cap \pi_+{}') \cap r_{AA'} \, ,$$

e $\pi_+ \cap \pi_+{}'$ è per definizione la striscia di π individuata da r, r'. Questo prova che l'insieme dei punti interni al segmento $\overline{AA'}$ è uguale a detta striscia, come volevamo. □

Definizione 1.182. *Siano r ed r' due rette propriamente parallele, sia π il piano che le contiene, sia A un punto di r ed A' un punto di r'. Un verso su r ed un verso su r' saranno detti* concordi rispetto ad A, A' *se i punti che seguono A e i punti che seguono A' stanno tutti su uno stesso semipiano di π individuato da $r_{AA'}$.*

Proposizione 1.183. *Siano r ed r' due rette propriamente parallele, si fissi su ciascuna un verso e siano A un punto su r e A' un punto su r'. Se esiste un punto $B \in r$ che segue A ed un punto $B' \in r'$ che segue A' tali che*

$$\overline{AA'} \cap \overline{BB'} = \emptyset$$

allora i versi fissati sono concordi rispetto ad A, A'.

Dimostrazione. Consideriamo la retta $r_{AA'}$ e il segmento $\overline{BB'}$. La retta $r_{AA'}$ non può contenere B, altrimenti, contenendo i due punti distinti A e B di r, sarebbe uguale ad r, il che è impossibile perché $A' \in r'$ (propriamente parallela ad r). Allo stesso modo si vede che $r_{AA'}$ non può contenere B'.

La retta $r_{AA'}$ non può nemmeno contenere un punto interno al segmento $\overline{BB'}$, perché per la proposizione 1.181 tali punti sono contenuti nella striscia individuata da r, r', e (sempre per la stessa proposizione) dovrebbero appartenere al segmento $\overline{AA'}$, mentre per ipotesi $\overline{AA'} \cap \overline{BB'} = \emptyset$.

Concludiamo che

$$r_{AA'} \cap \overline{BB'} = \emptyset\ .$$

Quindi B e B' stanno sullo stesso semipiano individuato da $r_{AA'}$ (nel piano che contiene r ed r'), il che prova che i versi fissati sono concordi rispetto ad A, A'. □

Proposizione 1.184. *Siano r ed r' due rette propriamente parallele, si fissi su ciascuna un verso e siano A un punto su r e A' un punto su r'. Se esiste un punto $B \in r$ che segue A ed un punto $B' \in r'$ che segue A' tali che*

$$\overline{AA'} \cap \overline{BB'} \neq \emptyset$$

allora i versi fissati non sono concordi rispetto ad A, A'.

Dimostrazione. Siccome $\overline{AA'}$ è contenuto in $r_{AA'}$ si ha a maggior ragione

$$r_{AA'} \cap \overline{BB'} \neq \emptyset\ .$$

Dunque B e B' non stanno su uno stesso semipiano individuato da $r_{AA'}$. Questo prova che i versi fissati non sono concordi rispetto ad A, A'. □

Osservazione 1.185. *Le proposizioni 1.183 e 1.184 continuano ovviamente a valere anche se, invece di supporre che B e B' seguano rispettivamente A e A', si suppone che precedano.*

Proposizione 1.186. *Siano r ed r' due rette propriamente parallele, si fissi su ciascuna un verso e siano $A, B \in r$ e $A', B' \in r'$. Se i versi fissati sono concordi rispetto ad A, A' allora sono concordi anche rispetto a B, B'.*

Dimostrazione. Per la proposizione 1.178, e per la proprietà transitiva dei versi, possiamo trovare un punto $C \in r$ che segue sia A che B e un punto $C' \in r'$ che segue sia A' che B'. Siccome i versi sono concordi rispetto ad A, A', per la proposizione 1.184 si ha

$$\overline{AA'} \cap \overline{CC'} = \emptyset\ .$$

Per l'osservazione 1.185, visto che A e A' precedono entrambi C e C', si ha che i versi sono concordi anche rispetto a C e C'.

In maniera analoga si prova che, essendo i versi concordi rispetto a C e C', essi sono concordi anche rispetto a B e B'. □

La proposizione ora dimostrata, prova che se due versi su rette propriamente parallele sono concordi rispetto a una coppia di punti, allora sono concordi rispetto a qualsiasi altra coppia di punti. Quindi ha senso dare la seguente definizione.

Definizione 1.187. *Siano r ed r' rette parallele e fissiamo un verso su ciascuna. Se r ed r' sono impropriamente parallele, diremo che i versi fissati sono* concordi *se coincidono. Se r ed r' sono propriamente parallele, diremo che i versi fissati sono* concordi *se sono concordi rispetto a qualsiasi coppia di punti $A \in r$, $A' \in r'$.*

I due versi saranno detti discordi *se non sono concordi.*

Proposizione 1.188. *Sia d una direzione (vedi la definizione 1.82), sia $\mathcal{V}$ l'insieme di tutti i versi definiti su rette di direzione d, e sia $\mathcal{R}$ la relazione di "concordanza" in $\mathcal{V}$, cioè la relazione definita da*

$$v \,\mathcal{R}\, v' \iff v \text{ e } v' \text{ concordi}\,.$$

Allora si ha:

- *$\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza.*
- *$v' \not\mathcal{R}\, v$ e $v'' \not\mathcal{R}\, v \quad \Rightarrow \quad v' \,\mathcal{R}\, v''$.*
- *I due versi opposti di ciascuna retta sono discordi (cioè non concordi).*

Dimostrazione (cenno). Nel caso di rette tutte contenute in uno stesso piano, la cosa è abbastanza immediata sulla base dei risultati precedenti. La vera difficoltà consiste nelle dimostrazioni dei fatti che riguardano tre rette non contenute in uno stesso piano, per le quali può essere utile inventarsi la definizione di *semispazio* (non c'è bisogno di nessun nuovo assioma). □

Definizione 1.189. *Due segmenti orientati paralleli saranno detti* concordi *se i loro rispettivi versi sono restrizioni di versi concordi.*

1.25. **Ampiezza somma.** L'assioma 1.165 è un analogo, per gli angoli, dell'assioma 1.118 per i segmenti. L'analogo per gli angoli dell'assioma 1.119 può essere invece dimostrato sulla base degli altri assiomi sugli angoli enunciati in precedenza.

Proposizione 1.190. *Siano r^+_O, s^+_O, t^+_O semirette distinte con la stessa origine O, rispettivamente contenute in rette r, s, t, tali che*

- *$s^+_O \smallsetminus \{O\}, t^+_O \smallsetminus \{O\}$ sono contenuti in uno stesso semipiano individuato da r,*
- *$r^+_O \smallsetminus \{O\}, t^+_O \smallsetminus \{O\}$ sono contenuti in semipiani diversi tra quelli individuati da s.*

Siano poi α l'angolo convesso proprio di lati r^+_O, s^+_O, β l'angolo convesso proprio di lati s^+_O, t^+_O e γ l'angolo convesso proprio di lati r^+_O, t^+_O. Siano infine date altre semirette ${r'}^+_{O'}, {s'}^+_{O'}, {t'}^+_{O'}$ con le stesse proprietà, e siano definiti in maniera simile angoli convessi propri α', β' e γ'. Allora si ha

$$\alpha \equiv \alpha'\,,\ \beta \equiv \beta' \quad \Rightarrow \quad \gamma \equiv \gamma'\,.$$

Dimostrazione (cenno). Supponiamo che $\alpha \equiv \alpha'$ e $\beta \equiv \beta'$. Si scelgano $A \in r^+_O \smallsetminus \{O\}$ e $C \in t^+_O \smallsetminus \{O\}$. Dalle ipotesi sulla posizione delle semirette segue che il segmento $\overline{AC}$ interseca s^+_O in un unico punto $B \neq O$. Per l'assioma 1.118 esistono punti A', B', C' rispettivamente in ${r'}^+_{O'}, {s'}^+_{O'}, {t'}^+_{O'}$ tali che

$$\overline{OA'} \equiv \overline{OA}\,, \quad \overline{OB'} \equiv \overline{OB}\,, \quad \overline{OC'} \equiv \overline{OC}\,.$$

Dall'assioma 1.166 si ha

$$O'\hat{A}'B' \equiv O\hat{A}B\,, \quad O'\hat{C}'B' \equiv O\hat{C}B\,, \quad O'\hat{B}'A' \equiv O\hat{B}A\,, \quad O'\hat{B}'C' \equiv O\hat{B}C\,,$$

e dalla proposizione 1.167 si ha

$$\overline{A'B'} \equiv \overline{AB}\ , \quad \overline{B'C'} \equiv \overline{BC}\ .$$

Usando la proposizione 1.168 e l'assioma 1.165 non è difficile dimostrare che $B' \in \overline{A'C'}$, e quindi dall'assioma 1.119 segue $\overline{A'C'} \equiv \overline{AC}$. A questo punto basta usare la proposizione 1.171. □

Definizione 1.191. *Siano a, b, c ampiezze. Diremo che c è* somma di a e b *se esistono angoli α, β, γ di ampiezze rispettive a, b, c, definiti come nell'enunciato della proposizione 1.190.*

Osservazione 1.192. *Se c, c' sono ampiezze somma di a e b, per la proposizione 1.190 devono per forza coincidere.*
Tuttavia, diversamente dalla somma di lunghezze, date delle ampiezze a, b non è detto che esista la loro ampiezza somma.

In sostanza, il problema che limita la definizione della somma di due ampiezze è che non si può oltrepassare l'angolo piatto (anche se introducessimo formalmente l'angolo piatto e gli angoli concavi, non potremmo poi superare l'angolo giro).

Dunque non possiamo definire un'addizione nell'insieme delle ampiezze, a meno che non allarghiamo la definizione di "operazione", introducendo la nozione di "operazione non ovunque definita".

Definizione 1.193. *Se a e b sono ampiezze qualsiasi, allora si dirà che a è* minore *di b, quando b è somma di a e di qualche ampiezza c. Si viene così ad avere una relazione nell'insieme delle ampiezze, che si indicherà, per abuso di notazione, ancora con il simbolo $<$. Come al solito, $a \leq b$ vuol dire che $a < b$ oppure $a = b$.*

Proposizione 1.194. *La relazione $<$ nell'insieme delle ampiezze è una relazione d'ordine stretto totale.*

Dimostrazione (cenno). Scegliamo una retta r, un punto $O \in r$, un verso su r, un semipiano π_+ individuato da r ed una retta s parallela ad r contenuta in π_+.
Siano a, a' ampiezze. Per l'assioma 1.165 esiste un'unica semiretta t_O^+ di origine O tale che l'angolo di lati t_O^+ ed r_O^+ abbia ampiezza a; inoltre t_O^+ interseca s in un unico punto A. Allo stesso modo si definisca A'.
Non è difficile dimostrare che, detto $\prec$ il verso su s discorde al verso scelto su r, si ha

$$a < a' \iff A \prec A'\ .$$

A questo punto basta usare l'assioma 1.88. □

1.26. **Ortogonalità.**

Definizione 1.195. *Un angolo convesso proprio si dice* retto *se è congruente ad un suo supplementare.*

Osservazione 1.196. *Per la proposizione 1.168, un angolo retto è congruente ad uno qualunque dei suoi supplementari.*

Proposizione 1.197. *Esistono angoli retti.*

Dimostrazione (cenno). Si possono scegliere punti distinti A, O, B su una retta r ed un punto $C \notin r$, tali che $\overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC}$. Per l'assioma 1.166 si ha

$$O\hat{A}C \equiv A\hat{C}O \ , \quad O\hat{B}C \equiv B\hat{C}O \ .$$

Sia poi s la parallela ad r passante per C, scegliamo un punto $D \in s$ che appartenga ad un semipiano individuato da r_{BC} diverso da quello a cui appartiene O, ed un punto $E \in r_{AC}$ tale che $A \prec C \prec E$ rispetto ad uno dei due versi. Dalla proposizione 1.170 segue che $D\hat{C}B \equiv O\hat{B}C$ e anche, tenendo presente la proposizione 1.168, che $D\hat{C}E \equiv O\hat{A}C$. La proposizione 1.190 implica allora che $B\hat{C}E \equiv B\hat{C}A$. Poiché questi angoli sono anche supplementari, allora sono retti. □

Proposizione 1.198. *Sia α un angolo retto e sia α' un angolo convesso proprio. Allora*

$$\alpha' \text{ è retto} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha' \equiv \alpha \ .$$

Dimostrazione. Sia O il vertice di α, r_O^+ ed s_O^+ i lati di α, r la retta che contiene r_O^+ e β il supplementare di α che ha un lato contenuto in r, che indichiamo con r_O^-. Per l'assioma 1.165 esiste un'unica semiretta ${s'}_O^+$ contenuta nel semipiano individuato da r che contiene s_O^+, tale che l'angolo di lati r_O^+ e ${s'}^+O$ sia congruente ad α'. Sia a l'ampiezza comune ad α e β e sia a' l'ampiezza comune ad α' e all'angolo di lati r_O^+ e ${s'}^+O$. Per la proposizione 1.168, un supplementare di α' è congruente all'angolo di lati r_O^- e ${s'}^+O$. Detta b' la loro ampiezza comune, abbiamo allora

$$\alpha' \text{ è retto} \quad \Longleftrightarrow \quad a' = b' \ .$$

Per definizione della relazione $<$ tra ampiezze e di ampiezza somma, si deve avere $a' < a < b'$, oppure $b' < a < a'$, oppure $b' = a = a'$, da cui segue

$$a' = b' \quad \Longleftrightarrow \quad a' = a \ .$$

Ma $a' = a$ equivale a dire che $\alpha' \equiv \alpha$. □

Dunque gli angoli retti sono tutti congruenti tra loro, ed angoli congruenti ad angoli retti sono retti.

Osservazione 1.199. *Dalla proposizione 1.168 segue che se due rette in un piano individuano un angolo retto (tramite la scelta di un semipiano per ciascuna), allora tutti e quattro gli angoli da esse individuati sono retti.*

Definizione 1.200. *Se due rette in un piano individuano quattro angoli retti, allora diremo che sono* perpendicolari. *Se due rette qualunque sono rispettivamente parallele a due rette perpendicolari, allora diremo che sono* ortogonali.

Dunque, per noi la parola "perpendicolari" è riservata per coppie di rette contenute in uno stesso piano, mentre "ortogonali" possono esserlo anche due rette sghembe. Qui c'è da dire che la terminolgia non è unanime: per alcuni testi, invece, "perpendicolari" e "ortogonali" sono sinonimi.

Per definizione, rette ortogonali sono rispettivamente parallele a certe rette in un piano che individuano angoli retti. È bene notare che se rette ortogonali sono rispettivamente parallele ad altre due rette qualsiasi in un piano qualsiasi, che formano quindi quattro angoli, questi angoli devono ancora essere per forza retti. Anche se la cosa è abbastanza intuitiva, richiede un po' di attenzione per essere dimostrata. Più in generale, osserveremo tra poco che rette orientate e sghembe

r, s, anche se non individuano un angolo in un piano, danno luogo comunque ad una fissata ampiezza. Infatti, ogni volta che troviamo due rette orientate in un piano che siano rispettivamente parallele e concordi ad r, s, queste individuano un angolo convesso proprio (in base alla definizione 1.109); ma gli angoli così ottenuti vedremo che sono tutti congruenti tra loro.

Per la dimostrazione, che rinunciamo ad esporre, è utile la seguente proposizione (che è più o meno del tipo della proposizione 1.172).

Proposizione 1.201. *Siano r, r' rette propriamente parallele, sia π il piano che le contiene e siano $\overline{AB} \subseteq r$ e $\overline{A'B'} \subseteq r'$. Se B e B' sono sullo stesso semipiano tra quelli individuati in π da $r_{AA'}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, allora $r_{AA'}$, $r_{BB'}$ sono parallele e $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$.*

Dimostrazione. Se $A = B$ la cosa è ovvia.

Se $A \neq B$, allora anche $A' \neq B'$. Fissiamo su r ed r' i versi secondo cui $A \prec B$ e $A' \prec B'$. Siccome B e B' sono sullo stesso semipiano tra quelli individuati da $r_{AA'}$, questi versi sono concordi rispetto ad A, A', e sono quindi concordi. Consideriamo la retta $s := r_{AB'}$. Siccome il verso opposto a quello scelto su r' è discorde da quello scelto su r, in particolare questi due versi sono discordi rispetto ad A, B'. Questo implica che A e B' stanno su semipiani diversi tra quelli individuati da s. Applicando la proposizione 1.170 con A' e B' scambiati otteniamo che $A'\hat{B}'A \equiv B\hat{A}B'$.

Dunque, dalla proposizione 1.167 segue che $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$ e dall'assioma 1.166 segue che $A'\hat{A}B' \equiv B'\hat{A}B$ e quindi, per la proposizione 1.169, anche che $r_{AA'}$ ed $r_{BB'}$ sono parallele. □

Definizione 1.202. *Siano $\vec{r}, \vec{r'}, \vec{s}, \vec{s'}$ rette orientate tali che:*

- *$\vec{r}$ ed $\vec{r'}$ sono parallele e concordi;*
- *$\vec{s}$ ed $\vec{s'}$ sono parallele e concordi;*
- *r ed s sono diverse ed incidenti.*
- *r' ed s' sono diverse ed incidenti.*

Allora diremo che l'angolo individuato da $\vec{r}$ ed $\vec{s}$ e l'angolo individuato da $\vec{r'}$ ed $\vec{s'}$ sono corrispondenti.

Enunciamo la seguente proposizione.

Proposizione 1.203. *Angoli corrispondenti sono congruenti.*

Nel caso le rette stiano tutte in uno stesso piano, basta tenere presenti le proposizioni 1.170 e 1.168. Rinunciamo alla dimostrazione nel caso generale.

Un'altra "lezione" che si ricava dalla proposizione 1.203 è che l'ampiezza di un angolo, essendo invariante per sostituzione dei lati con lati paralleli, misura in sostanza l'"inclinazione" tra due direzioni.

Definizione 1.204. *Due segmenti si dicono* ortogonali *se sono rispettivamente contenuti in rette ortogonali.*

Osservazione 1.205. *Se s e t sono segmenti non nulli ortogonali, ed s' e t' sono rispettivamente paralleli ad s e t, allora anche s' e t' sono ortogonali.*

Proposizione 1.206. *Sia r una retta contenuta in un piano π e sia P un punto di π. Allora esiste una ed una sola retta contenuta in π che passi per P e sia perpendicolare ad r.*

Tralasciamo la dimostrazione.

Se non ci vincoliamo a stare in un piano, allora possono esistere infinite perpendicolari ad una retta r passanti per un punto P: questo accade se e solo se $P \in r$ (perché se $P \notin r$, c'è un solo piano che contiene $r \cup \{P\}$). Le rette per P ortogonali ad r sono invece infinite, sia se P appartiene ad r, sia se non vi appartiene.

1.27. **Misura di angoli.** La misura di angoli, nozione anche questa molto nota, può essere formalmente definita in maniera simile alla misura di segmenti. La differenza sostanziale è che c'è un'ampiezza che non può essere oltrepassata. Dal punto di vista tecnico, abbiamo già visto che questo comporta che la somma di ampiezze non è sempre definita. Non è quindi sempre possibile definire il prodotto di un numero per un'ampiezza.

Definizione 1.207. *Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia a un'ampiezza. Se esiste l'ampiezza pari alla somma di n ampiezze uguali ad a, assumendo questa uguale ad a nel caso $n = 1$, la chiameremo* prodotto di n per a, *e la indicheremo con na.*

La seguente proposizione, anche se è un po' debole, può svolgere per gli angoli un ruolo simile a quello dell'assioma di Archimede per le lunghezze.

Proposizione 1.208. *Sia a un'ampiezza. Allora c'è un $n \in \mathbb{N}$ tale che non esista il prodotto di n per a.*

Dimostrazione (cenno). Seguendo la costruzione accennata nella dimostrazione della proposizione 1.194, fissiamo una semiretta r_O^+ contenuta in una retta r, una retta s parallela ad r ed un verso $\prec$ su s. Per costruzione, le ampiezze corrispondono ai punti di s in modo che ad ampiezze minori corrispondano punti precedenti.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, se esiste il prodotto na denotiamo con A_n il punto corrispondente su s. Fissiamo poi un'unità di misura e consideriamo l'insieme X di tutti i moduli $|A_1A_n|$ per gli A_n che è stato possibile ottenere (almeno A_1 ce l'abbiamo).

Se X non ammette maggioranti, consideriamo l'altra semiretta r_O^- di origine O contenuta in r, e la semiretta t_O^+, con punti nel semipiano che contiene s, tale che l'angolo che ha per lati r_O^- e t_O^+ abbia ampiezza a. Detto B il punto d'intersezione di t_O^+ con s, siccome X non ammette maggioranti c'è un $m \in \mathbb{N}$ tale che $|A_1A_m| > |A_1B|$. Si può allora dimostrare che non può esistere la somma di ma con a, e quindi non è definito il prodotto di $m + 1$ per a.

Se invece X ammette maggioranti, consideriamo il punto C su s tale che A_1C abbia modulo uguale all'estremo superiore di X. Possiamo allora considerare, come prima, un angolo di ampiezza a, prendendo al posto di r_O^- la semiretta di origine O che contiene C, e al posto di t_O^+ una semiretta di origine O contenuta nello stesso semipiano di A_1, tra quelli individuati da r_{OC}. Intersecando quest'ultima con s, otteniamo un punto $D \prec C$. Siccome allora $\overline{A_1D}$ ha modulo minore dell'estremo superiore di X, c'è un $m \in \mathbb{N}$ tale che $|A_1A_m| > |A_1D|$. Come prima si può concludere che non è definito il prodotto di $m + 1$ per a. $\square$

Per ovviare al problema che la somma di ampiezze non è sempre definita, invece della comoda condizione "$mu < nl$" che abbiamo usato nell'osservazione 1.160, useremo una tecnica di dimezzamento simile a quella della proposizione 1.175. Come per quella proposizione abbiamo avuto bisogno del punto medio di un segmento, in questo caso abbiamo bisogno della bisettrice di un angolo.

Proposizione 1.209. *Sia α un angolo convesso proprio di ampiezza a e origine O, e si scelgano un punto A su uno dei lati e un punto B sull'altro, in modo che $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ siano non nulli (così che $\alpha = A\hat{O}B$) e anche congruenti:*

$$\overline{OA} \equiv \overline{OB}\,.$$

Allora, detto M il punto medio di $\overline{AB}$, abbiamo

$$A\hat{O}M \equiv M\hat{O}B$$

e, detta b la loro ampiezza, abbiamo

$$a = 2b$$

(scrivendo $2b$, si vuole anche implicitamente affermare che questo prodotto esiste).

Dimostrazione (cenno). Applicando l'assioma 1.166 nel caso $A' = B$, $O' = O$ e $B' = B$, abbiamo $B\hat{A}O \equiv A\hat{B}O$, che si può anche scrivere $M\hat{A}O \equiv M\hat{B}O$. Applicando lo stesso assioma con M, A, O al posto di A, B, C e M, B, O al posto di A', B', C', otteniamo $A\hat{O}M \equiv M\hat{O}B$.

Per quanto riguarda le ampiezze, basta applicare la definizione di ampiezza somma tenendo presente che M e B stanno nello stesso semipiano tra quelli individuati da r_{OA}. □

Osservazione 1.210. *Sia u un'ampiezza non nulla e sia a un'ampiezza qualsiasi. Dalla proposizione 1.209 segue facilmente che per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ c'è un ampiezza u_n tale che $u = 2^n u_n$. Si consideri l'insieme*

$$X = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid \exists m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0 : x = \frac{m}{2^n} \text{ e } mu_n \le a\}\,.$$

Per la proposizione 1.208 esiste $m \in \mathbb{N}_0$ tale che mu non è definito, e non è difficile verificare che m è un maggiorante di X. Dunque esiste l'estremo superiore di X.

Definizione 1.211. *Nella situazione dell'osservazione qui sopra, l'estremo superiore di X si dice* misura *di a rispetto ad u.*
Per misura *di un angolo convesso proprio rispetto ad u intenderemo la misura della sua ampiezza.*

Poiché c'è un limite superiore alle misure delle ampiezze rispetto ad una fissata ampiezza u (che sarebbe la misura dell'angolo piatto, se lo avessimo definito), per stabilire per gli angoli una proposizione analoga alla proposizione 1.175, bisogna tener conto di questa limitazione. Lo faremo tra poco, ma ometteremo la dimostrazione e ci restringeremo al caso di una particolare unità di misura, che è molto utile e molto nota: il radiante. Per la definizione formale del radiante abbiamo bisogno di un po' di preparazione, che ora facciamo rinunciando però ad esporre alcune dimostrazioni.

Proposizione 1.212. *Due angoli hanno la stessa misura rispetto ad una fissata ampiezza se e solo se sono congruenti.*

Tralasciamo la dimostrazione, anche se è facile.

Definizione 1.213. *Sia π un piano, sia $O \in \pi$ e sia l una lunghezza. L'insieme dei punti $P \in \pi$ tali che $\overline{OP}$ abbia lunghezza l si dice* circonferenza *di centro O e raggio l in π.*

Proposizione 1.214. *Sia γ una circonferenza di centro O e raggio non nullo l in un piano π e sia r una retta contenuta in π e passante per O. Siano poi s_1, …, s_n ($n \in \mathbb{N}$) n semirette di origine O, tutte contenute in uno stesso semipiano di π individuato da r e tali che comunque scegliamo tre numeri $i < j < k$ in $\{1, \dots, n\}$ allora $s_j \smallsetminus \{O\}$ è contenuto nell'angolo convesso proprio che ha per lati s_i ed s_k. Detti P_1, …, P_n i punti d'intersezione di γ rispettivamente con s_1, …, s_n, indichiamo con $m_{s_1,\dots,s_n}$ la somma delle misure dei segmenti $\overline{P_1P_2}$, …, $\overline{P_{n-1}P_n}$ rispetto ad l. Infine indichiamo con S l'insieme di tutti i numeri reali $m_{s_1,\dots,s_n}$ che possono essere ottenuti in questo modo.*

Allora si ha:

- *S non dipende dalla scelta di π, O, l ed r.*
- *S ammette estremo superiore.*

Tralasciamo la dimostrazione.

Definizione 1.215. *L'estremo superiore dell'insieme S considerato nella precedente proposizione viene detto* pi greco*, ed indicato con π (da non confondere col piano).*

Al di là della forma un po' pesante, abbiamo sostanzialmente definito π come la lunghezza di una semicirconferenza rispetto al raggio.

Proposizione 1.216. *Esiste un'unica ampiezza tale che gli angoli retti misurino $\frac{\pi}{2}$ rispetto ad essa.*

Tralasciamo la dimostrazione.

Definizione 1.217. *L'ampiezza tale che gli angoli retti misurino $\frac{\pi}{2}$ rispetto ad essa si dice* radiante*. La misura di un angolo α rispetto a tale ampiezza si dice* misura in radianti *di α.*

Non sarebbe difficile dimostrare (forse solo un po' noioso) che la misura in radianti di un angolo α esprime la misura di un arco di circonferenza sotteso da α rispetto al raggio (la quale può essere definita in maniera simile a quanto fatto per le semicirconferenze).

Proposizione 1.218. *Un numero reale x è la misura in radianti di un angolo convesso proprio se e solo se*

$$0 < x < \pi\,.$$

Tralasciamo la dimostrazione.

Definizione 1.219. *Siano $\vec{r}$ e $\vec{s}$ due rette orientate.*

Se r ed s non sono parallele, allora definiamo angolo *tra $\vec{r}$ ed $\vec{s}$ la misura in radianti dell'angolo individuato da due rette orientate incidenti $\vec{r'}$ e $\vec{s'}$, rispettivamente parallele e concordi ad $\vec{r}$ ed $\vec{s}$.*

Se r ed s sono parallele, definiamo angolo *tra $\vec{r}$ ed $\vec{s}$ il numero 0 se $\vec{r}$ ed $\vec{s}$ sono concordi, o il numero π se sono discordi.*

L'angolo tra $\vec{r}$ ed $\vec{s}$ sarà a volte denotato con $\widehat{\vec{r}\vec{s}}$.

La proposizione 1.203 assicura che la definizione ora data non dipende dalla scelta di $\vec{r'}$ e $\vec{s'}$.

Il termine "angolo" tra $\vec{r}$ ed $\vec{s}$ non è formalmente corretto, in quanto $\vec{r}$ ed $\vec{s}$ non danno luogo ad un angolo ma ad un'ampiezza, ed il numero da noi definito non è a stretto rigore un'ampiezza, ma la sua misura in radianti. Comunque questo abuso di linguaggio è comodo e non dà luogo a problemi particolari.

1.28. **Seno e coseno.**

Proposizione 1.220. *Sia α un angolo (convesso proprio) individuato da due rette orientate $\vec{r}$ ed $\vec{s}$, e sia α' un angolo individuato da due rette orientate $\vec{r'}$ e $\vec{s'}$. Detti O ed O' i rispettivi vertici di α e α', sia A un punto su s seguente O e A' un punto su s' seguente O'. Sia H l'intersezione di r con la perpendicolare ad r stessa passante per A, e sia H' l'intersezione di r' con la perpendicolare ad r' stessa passante per A'.*

Se α ed α' sono congruenti allora si ha:
- $\frac{|OH|}{|OA|} = \frac{|O'H'|}{|O'A'|}$,
- $\frac{|AH|}{|OA|} = \frac{|A'H'|}{|O'A'|}$,
- $H \succ O \iff H' \succ O$.

Tralasciamo la dimostrazione.

Definizione 1.221. *Siano α, O, A, H, come sopra.*

Il numero reale dato da

$$\begin{cases} \frac{|OH|}{|OA|}\,, & \text{se } H \succeq O \\ \\ -\frac{|OH|}{|OA|}\,, & \text{se } H \prec O; \end{cases}$$

si dice coseno *di α, e si indica con* $\cos\alpha$.

Il numero reale

$$\frac{|AH|}{|OA|}$$

si dice seno *di α, e si indica con* $\sin\alpha$.

La proposizione 1.220 assicura che la definizione è ben posta (non dipende dalla scelta di A).

Definizione 1.222. *Se x è la misura in radianti di un angolo α, definiamo il* coseno *di x (denotato con $\cos x$) ponendolo uguale al coseno di α. Definiamo il* seno *di x (denotato con $\sin x$) ponendolo uguale al seno di α.*

Le proposizioni 1.212 e 1.220 assicurano che la definizione è ben posta (il seno e il coseno di un numero x non dipendono dalla scelta di un α che abbia misura x). D'altra parte, la proposizione 1.218 implica che la definizione ora data ci dà il seno e il coseno solo per i numeri x tali che $0 < x < \pi$.

Definizione 1.223. *Poniamo per definizione*

$$\sin 0 = 0,\ \sin\pi = 0,\ \cos 0 = 1,\ \cos\pi = -1$$

Se poi x è un numero reale tale che

$$-\pi \le x < 0$$

poniamo per definizione

$$\sin x = -\sin|x|,\ \cos x = \cos|x|\ .$$

Infine, se x è un numero reale non compreso tra $-\pi$ e π, detto n il massimo numero intero tale che $x - 2\pi n \ge -\pi$, poniamo per definizione

$$\sin x = \sin(x - 2\pi n),\ \cos x = \cos(x - 2\pi n)\ .$$

Le notazioni

$$\sin x \qquad e \qquad \cos x$$

si leggono rispettivamente seno *di x e* coseno *di x.*

2. Vettori geometrici

Con questo paragrafo comincia il programma d'esame vero e proprio. Le definizioni, proposizioni e dimostrazioni riportate d'ora in avanti, potranno essere oggetto di domande dirette in sede d'esame.

2.1. Equipollenza.

Definizione 2.1. *Due segmenti orientati si dicono* equipollenti *se sono congruenti, paralleli e concordi.*
Due coppie ordinate di punti (A, B) e (A', B') si dicono equipollenti *se i segmenti orientati AB e $A'B'$ sono equipollenti.*

Osservazione 2.2. *Poiché segmenti equipollenti sono in particolare congruenti, essi hanno lo stesso modulo (rispetto ad una fissata unità di misura u; cfr. definizione 1.163).*

Due segmenti sono congruenti se e solo se hanno lo stesso modulo (definizione 1.163). Siccome poi due rette sono parallele se e solo se hanno la stessa direzione (definizione 1.82), se definiamo la direzione di un segmento non nullo come la direzione dell'unica retta che lo contiene, abbiamo anche che due segmenti non nulli sono paralleli se e solo se hanno la stessa direzione. Infine, se definiamo un "verso su una direzione", come una classe di equivalenza di versi concordi sulle rette (tutte parallele tra loro) che hanno quella direzione, allora possiamo anche dire che due segmenti orientati non nulli sono concordi se e solo se hanno lo stesso verso. Riassumendo: due segmenti orientati sono equipollenti se e solo se hanno lo stesso modulo, direzione e verso.

Proposizione 2.3. *La relazione di equipollenza nell'insieme X delle coppie ordinate di punti, cioè la relazione $\mathcal{E}$ in X definita da*

$$(A, B)\,\mathcal{E}\,(A', B') \;:\Longleftrightarrow\; (A, B) \text{ è equipollente ad } (A', B') \;,$$

ha la proprietà riflessiva.

Dimostrazione. Sia (A, B) una qualunque coppia ordinata di punti. Presa una retta r contenente $\overline{AB}$, questa è impropriamente parallela a sé stessa (definizione 1.76). Quindi AB è parallelo a sé stesso (definizione 1.95). Siccome poi un verso su r rispetto a cui $A \preceq B$ è concorde con sé stesso (definizione 1.187), abbiamo che AB è concorde con sé stesso (definizione 1.189 e definizione 1.100). Siccome $\overline{AB}$ è congruente a sé stesso (assioma 1.111), il segmento orientato AB è congruente a sé stesso (definizione 1.100). Dunque AB, essendo congruente, parallelo e concorde con sé stesso, è equipollente a sé stesso (definizione 2.1). Ma se il segmento orientato AB è equipollente ad AB, allora la coppia ordinata (A, B) è equipollente alla coppia ordinata (A, B) (definizione 2.1). □

Come si è visto, ogni aspetto della dimostrazione è stato ricondotto ai risultati e alle definizioni del paragrafo sui fondamenti. A loro volta, quei risultati e quelle definizioni possono facilmente essere descritti in termini di pura logica insiemistica.

Questo consente di avere un rigidissimo controllo sulla correttezza della dimostrazione. Lo svantaggio è che per dimostrare una cosa tutto sommato molto semplice abbiamo avuto bisogno di dieci righe zeppe di rimandi alla parte precedente.

La formalizzazione, dunque, è uno strumento utilissimo, ma da usare solo quando serve; ad esempio in caso di dubbi o contenziosi tra matematici (o tra studenti e professori all'esame). Le dimostrazioni che seguiranno saranno più sintetiche (anche se comunque abbastanza dettagliate). Ad esempio, il fatto che la relazione di equipollenza è simmetrica segue subito dal fatto che la congruenza, il parallelismo e la "concordanza" sono relazioni simmetriche. Questo fatto trova riscontro anche nel linguaggio: a ben vedere lo abbiamo già sottinteso nella definizione 2.1 dicendo (A, B) e (A', B') "sono *equipollenti*", senza preoccuparci di distinguere "(A, B) è equipollente ad (A', B')" da "(A', B') è equipollente ad (A, B)". Per questo motivo, nella prossima dimostrazione daremo per scontata la proprietà simmetrica dell'equipollenza. Per la transitività invece, è bene dare qualche dettaglio, perché c'è una sottigliezza in agguato: anche se il parallelismo tra rette è una relazione di equivalenza (proposizione 1.81), il parallelismo tra segmenti, a rigore, non lo è perché un segmento nullo è parallelo a qualunque segmento (non vale quindi la proprietà transitiva).

In sintesi: d'ora in poi, negli enunciati e nelle dimostrazioni, non ci preoccuperemo di fornire i dettagli su cose che sono ovvie o che sono formalizzabili in maniera automatica (anche se un po' laboriosa, come è successo per la riflessività dell'equipollenza).

Proposizione 2.4. *L'equipollenza dà luogo ad una relazione di equivalenza nell'insieme delle coppie ordinate di punti (e nell'insieme dei segmenti orientati).*

Dimostrazione. Basta dimostrare la transitività nel caso dei segmenti orientati. Supponiamo che AB sia equipollente ad $A'B'$, e che $A'B'$ sia equipollente ad $A''B''$. Poiché la congruenza tra segmenti è una relazione d'equivalenza, AB è congruente ad $A''B''$. Se $A = B$, allora anche $A'' = B''$ e i due segmenti orientati sono paralleli e concordi perché un segmento nullo è parallelo a qualunque segmento, e su di esso c'è un unico verso (coincidente con l'opposto).

Se $A \neq B$, allora anche $A' \neq B'$ e $A'' \neq B''$. In questo caso r_{AB} è parallela ad $r_{A''B''}$ perché devono essere entrambe parallele ad $r_{A'B'}$ e il parallelismo tra rette è una relazione di equivalenza (quindi transitiva).

Inoltre, il verso su r_{AB} tale che $A \prec B$ è concorde al verso su $r_{A''B''}$ tale che $A'' \prec B''$, perché sono entrambi concordi al verso su $r_{A'B'}$ tale che $A' \prec B'$, e la relazione di "concordanza" tra versi su rette parallele è una relazione d'equivalenza.

In conclusione, AB e $A''B''$, essendo congruenti, paralleli e concordi, sono equipollenti. $\square$

Osservazione 2.5. *I segmenti orientati nulli costituiscono una classe di equivalenza rispetto alla relazione di equipollenza tra segmenti orientati.*

2.2. **Vettori liberi.**

Definizione 2.6. *Definiamo un* vettore libero (ordinario) *come una classe d'equivalenza di coppie ordinate di punti, rispetto alla relazione di equipollenza. Se (A, B) è una coppia ordinata di punti, il vettore da esso individuato (cioè l'insieme delle coppie ad essa equipollenti) sarà indicato con $B - A$. In tal caso si dirà che la coppia (A, B), o anche il segmento orientato AB, è un* rappresentante *di $B - A$.*

La definizione classica di vettore libero lo identifica con una classe di equipollenza di *segmenti orientati*. Tale definizione è sostanzialmente equivalente alla nostra. Abbiamo preferito usare le coppie ordinate, per “allontanare” il concetto di vettore da quello di segmento. È molto conveniente pensare che un vettore libero sia una differenza di punti (un po’ come i numeri interi negativi sono differenze di numeri naturali).

Definizione 2.7. *Il vettore rappresentato dai segmenti orientati nulli si dice* vettore nullo *e si indica con* $\mathbf{0}$.

Osservazione 2.8. *Due segmenti orientati sono equipollenti se e solo se i loro opposti sono equipollenti.*

Definizione 2.9. *Sia* $\mathbf{v}$ *un vettore libero. Il vettore libero rappresentato dai segmenti opposti ai segmenti che rappresentano* $\mathbf{v}$ *sarà detto* opposto *a* $\mathbf{v}$ *e sarà indicato con* $-\mathbf{v}$.

Definizione 2.10. *Sia* $\mathbf{v}$ *un vettore libero. Il modulo dei segmenti che rappresentano* $\mathbf{v}$ *(osservazione 2.2) si dirà* modulo di $\mathbf{v}$, *e si indicherà con*

$$|\mathbf{v}| \ .$$

2.3. Parallelismo per i vettori liberi.

Proposizione 2.11. *Siano* s *ed* s' *segmenti orientati equipollenti, sia* r *una retta,* π *un piano e sia* t *un qualunque segmento. Si ha:*

$$\begin{aligned} s \text{ parallelo ad } r \quad &\Longleftrightarrow \quad s' \text{ parallelo ad } r \ , \\ s \text{ parallelo a } \pi \quad &\Longleftrightarrow \quad s' \text{ parallelo a } \pi \ , \\ s \text{ parallelo a } t \quad &\Longleftrightarrow \quad s' \text{ parallelo a } t \ . \end{aligned}$$

Tralasciamo la (facile) dimostrazione (cfr. le proposizioni 1.81 e 1.86).

Definizione 2.12. *Sia* $\mathbf{v}$ *un vettore libero.*

Il vettore $\mathbf{v}$ *si dice* parallelo *ad una retta* r *se i segmenti orientati che lo rappresentano sono paralleli ad* r *(cfr. la proposizione precedente).*

Il vettore $\mathbf{v}$ *si dice* parallelo *ad un piano* π *se i segmenti orientati che lo rappresentano sono paralleli a* π *(cfr. la proposizione precedente).*

Il vettore $\mathbf{v}$ *si dice* parallelo *ad un vettore libero* $\mathbf{w}$ *se i segmenti orientati che rappresentano* $\mathbf{v}$ *sono paralleli ai segmenti orientati che rappresentano* $\mathbf{w}$ *(cfr. la proposizione precedente).*

Osservazione 2.13. *Il vettore nullo è parallelo a qualsiasi retta, a qualsiasi piano e a qualsiasi vettore.*

Proposizione 2.14. *Siano* s, s', t, t' *segmenti orientati paralleli tra loro e tali che* s *ed* s' *sono equipollenti e* t *e* t' *sono equipollenti. Allora*

$$s \text{ è concorde a } t \quad \Longleftrightarrow \quad s' \text{ è concorde a } t'$$

Tralasciamo la facile dimostrazione.

Definizione 2.15. *Due vettori liberi paralleli* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *si dicono* concordi *se i segmenti orientati che rappresentano* $\mathbf{u}$ *sono concordi ai segmenti orientati che rappresentano* $\mathbf{v}$.
Un vettore libero $\mathbf{u}$ *ed un retta orientata* $\vec{r}$ *si dicono* concordi *se c’è un segmento orientato rappresentante di* $\mathbf{u}$, *contenuto in* r *e il cui verso sia restrizione del verso di* $\vec{r}$.

2.4. **Somma di un punto con un vettore libero.**

Proposizione 2.16. *Dato un punto A ed un vettore libero $\mathbf{v}$, esiste un unico punto B tale che $\mathbf{v} = B - A$.*

Dimostrazione. Sia $A'B'$ un rappresentante di $\mathbf{v}$, sia r una retta che contiene A' e B', e sia $\prec$ un verso per cui $A' \preceq B'$ (r e $\prec$ sono unici se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$). C'è un'unica retta passante per A e parallela ad r, e fissiamo su questa il verso concorde a $\prec$. Abbiamo $\mathbf{v} = B - A$ se e solo se AB è equipollente ad $A'B'$, e questo accade se e solo se B segue o è uguale ad A su r, ed $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$. Ma sappiamo che esiste un'unico punto con queste proprietà (assioma 1.118). □

Definizione 2.17. *Nella situazione della precedente proposizione, il punto B si dice* somma *di A e $\mathbf{v}$, e si denota con*

$$A + \mathbf{v}.$$

Osservazione 2.18. *Per definizione di somma di A e $\mathbf{v}$, si ha*

$$B = A + \mathbf{v} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{v} = B - A\,.$$

Tali uguaglianze sono entrambe equivalenti all'affermazione che il segmento orientato AB rappresenta il vettore libero $\mathbf{v}$.
In particolare, possiamo scrivere

$$A + (B - A) = B$$

(mentre $(A + B) - A$ non ha senso, perché non abbiamo definito un'addizione tra punti).

2.5. **Vettori applicati.**

Osservazione 2.19. *Ogni coppia $(A, \mathbf{v})$ determina un segmento orientato AB (quello con $B = A + \mathbf{v}$). Ogni segmento orientato AB proviene da un'unica coppia $(A, \mathbf{v})$ (quella con $\mathbf{v} = B - A$). Dunque c'è una naturale applicazione biettiva tra l'insieme delle coppie del tipo $(A, \mathbf{v})$ e l'insieme dei segmenti orientati. Un* vettore applicato *può essere formalmente definito sia come una coppia $(A, \mathbf{v})$, sia come un segmento orientato AB (o addirittura come una coppia di punti (A, B)).*

La definizione forse più popolare dei vettori applicati li identifica con i segmenti orientati. La nostra preferita è invece la seguente.

Definizione 2.20. *Definiamo un* vettore applicato in un punto A *come una coppia $(A, \mathbf{v})$, dove $\mathbf{v}$ è un vettore libero.*

2.6. **Addizione tra vettori liberi.**

Proposizione 2.21. *Siano A, A', B, B' punti. Si ha*

$$B - A = B' - A' \qquad \Longleftrightarrow \qquad A' - A = B' - B\,.$$

Dimostrazione. Se dimostriamo l'implicazione $\Rightarrow$, scambiando A' con B otteniamo anche l'altra. Supponiamo quindi che $B - A = B' - A'$ e passiamo a dimostrare che $A' - A = B' - B$.

Facciamo prima il caso che A, A', B, B' siano allineati, sia quindi r una retta che li contiene, e fissiamo un verso tale che $A \preceq B$. Siccome AB e $A'B'$ sono concordi, si deve avere anche $A' \preceq B'$. Se ci mettiamo nel caso $A \preceq A'$, l'altro caso si ottiene semplicemente scambiando A con A' e B con B'. Quindi assumiamo che $A \preceq A'$. I segmenti orientati AA' e BB' sono ovviamente paralleli. Se $B \preceq A'$ abbiamo $A \preceq B \preceq A' \preceq B'$, e quindi AA' e BB' sono anche concordi. Inoltre, abbiamo

$$|AA'| = |AB| + |BA'| = |A'B'| + |BA'| = |BB'| \ .$$

Quindi AA' e BB' sono anche congruenti, e in conclusione equipollenti. In altre parole, $A' - A = B' - B$ come volevamo. Se invece $A' \prec B$, deve essere $B \preceq B'$ altrimenti $|AB| = |AA'| + |A'B'| + |B'B|$ con $|B'B| \neq 0$ e quindi sarebbe $|AB| > |A'B'|$, mentre sono uguali. Allora si ha ancora che AA' e BB' sono concordi. Inoltre, abbiamo

$$|AA'| + |A'B| = |AB| = |A'B'| = |A'B| + |BB'| \ ,$$

da cui $|AA'| = |BB'|$ e come prima concludiamo che $A' - A = B' - B$ come volevamo.

Facciamo ora il caso in cui i punti A, A', B, B' non siano allineati. Dunque $A \neq A'$, $B \neq B'$, e le rette r_{AB} ed $r_{A'B'}$ sono distinte. Siccome AB ed $A'B'$ sono paralleli, r_{AB} ed $r_{A'B'}$ sono propriamente parallele, e sono quindi contenute in un unico piano π. Siccome AB ed $A'B'$ sono concordi, B e B' sono sullo stesso semipiano tra quelli individuati in π da $r_{AA'}$. Inoltre $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$. Quindi possiamo applicare la proposizione 1.201 e ottenere che $r_{AA'}$, $r_{BB'}$ sono parallele e $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$. Quindi $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ sono paralleli e congruenti. Chiaramente A' e B' stanno sullo stesso semipiano individuato in π da r_{AB}: quello contenente la retta propriamente parallela $r_{A'B'}$ (vedi proposizione 1.179). Dunque $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ sono equipollenti e concludiamo che $A' - A = B' - B$ come volevamo. $\square$

Proposizione 2.22. *Siano* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *vettori liberi e siano* A *e* A' *punti. Si ha*

$$((A + \mathbf{u}) + \mathbf{v}) - A \ = \ ((A' + \mathbf{u}) + \mathbf{v}) - A' \ .$$

Dimostrazione. Ponendo

$$B = A + \mathbf{u}, \quad C = B + \mathbf{v}, \quad B' = A' + \mathbf{u}, \quad C' = B' + \mathbf{v} \ ,$$

il nostro obiettivo diventa dimostrare che $C - A = C' - A'$.

Siccome $B - A$ e $B' - A'$ sono entrambi uguali a $\mathbf{u}$ (osservazione 2.18), la proposizione 2.21 implica che

$$A' - A = B' - B \ .$$

Siccome $C - B$ e $C' - B'$ sono entrambi uguali a $\mathbf{v}$, la proposizione 2.21 implica che

$$B' - B = C' - C \ .$$

Quindi

$$A' - A = C' - C \ .$$

Applicando ancora la proposizione 2.21 abbiamo

$$C - A = C' - A' \ ,$$

come volevamo. $\square$

Definizione 2.23. *Siano* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *vettori liberi. Il vettore*

$$((A+\mathbf{u})+\mathbf{v})-A\ ,$$

dove A *è un qualunque punto (cfr. proposizione 2.22), si dice* somma *di* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$*, e si indica con* $\mathbf{u}+\mathbf{v}$*.*

Detto V *l'insieme dei vettori liberi, l'operazione in* V *che ad ogni coppia* $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ *associa la loro somma* $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ *si chiama* addizione *in* V*.*

Osservazione 2.24. *Dalla definizione di somma di vettori liberi e dall'osservazione 2.18, ricaviamo che comunque prendiamo tre punti* A, B, C *si ha*

$$(B-A)+(C-B)=C-A.$$

Proposizione 2.25. *L'addizione tra vettori liberi ha la proprietà associativa; cioè, dati dei vettori liberi* $\mathbf{u}$*,* $\mathbf{v}$*,* $\mathbf{w}$ *si ha*

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})\ .$$

Dimostrazione. Dati dei vettori liberi $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, scelto un qualunque punto A e posto

$$B=A+\mathbf{u},\quad C=B+\mathbf{v},\quad D=C+\mathbf{w}\ ,$$

tenendo presenti le osservazioni 2.18 e 2.24 si ha

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\big((B-A)+(C-B)\big)+(D-C)=(C-A)+(D-C)=D-A$$

e

$$\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(B-A)+\big((D-C)+(C-B)\big)=(B-A)+(D-B)=D-A\ .$$

Quindi $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=D-A=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$, come volevamo. □

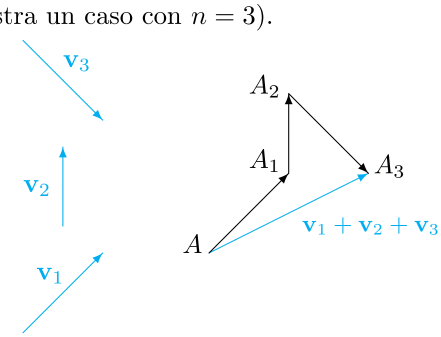
Dalla proprietà associativa segue che la somma di molti vettori

$$\mathbf{v}_1+\cdots+\mathbf{v}_n$$

non dipende da come si mettono le parentesi. Inoltre, se si fissa un punto A qualunque, e si pone $A_1=A+\mathbf{v}_1$, $A_2=A_1+\mathbf{v}_2$, …, $A_n=a_{n-1}+\mathbf{v}_n$, si ha

$$\mathbf{v}_1+\cdots+\mathbf{v}_n=A_n-A$$

(la figura qui sotto mostra un caso con $n=3$).



Questo modo di calcolare la somma di più vettori, in qualche testo viene informalmente chiamato "regola della poligonale".

La somma di più vettori non dipende nemmeno dall'ordine in cui i vettori vengono scritti; vale cioè, come ora vediamo, la proprietà commutativa.

Proposizione 2.26. *Se* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *sono vettori liberi qualsiasi, si ha*

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \,.$$

Dimostrazione. Scelto un punto A, poniamo

$$B = A + \mathbf{u}\,, \quad A' := A + \mathbf{v}\,, \quad B' := A' + \mathbf{u}\,.$$

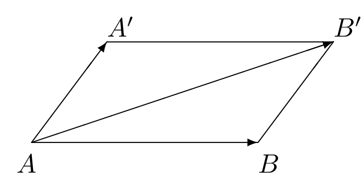
Quindi $B - A = \mathbf{u} = B' - A'$, e per la proposizione 2.21 si ha $A' - A = B' - B$. Dunque

$$B' - B = A' - A = \mathbf{v}\,.$$

Allora abbiamo

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (B - A) + (B' - B) = B' - A = (A' - A) + (B' - A') = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

come volevamo. $\square$



Parlando informalmente, la figura "delimitata" dai quattro segmenti considerati qui sopra può essere chiamata *parallelogramma*. Dunque la somma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ di due vettori non paralleli è rappresentata dalla diagonale (orientata) AB' del parallelogramma che ha per lati i rappresentanti AB e AA' di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Questo fatto viene chiamato informalmente "regola del parallelogramma", ed è utile quando si vogliono rappresentare i vettori con segmenti orientati aventi la stessa origine.

Osservazione 2.27. *Sia* $\mathbf{v} = B - A$ *un qualunque vettore libero. Abbiamo*

$$\mathbf{0} + \mathbf{v} = (A - A) + (B - A) \overset{Oss.\ 2.24}{=} B - A = \mathbf{v}$$

e anche $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ *per la proprietà commutativa.*
Quindi il vettore nullo è l'elemento neutro per l'addizione tra vettori liberi.

Osservazione 2.28. *Sia* $\mathbf{v} = B - A$ *un qualunque vettore libero. Abbiamo*

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = (B - A) + (A - B) \overset{Oss.\ 2.24}{=} A - A = \mathbf{0}\,.$$

e anche $-\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$ *per la proprietà commutativa.*

Proposizione 2.29. *Sia* V *l'insieme dei vettori liberi, e sia* $+$ *l'addizione in* V *(vedi definizione 2.23). Allora* $(V, +)$ *è un gruppo commutativo.*

Dimostrazione. Segue subito dalle proposizioni 2.25 e 2.26, insieme alle osservazioni 2.27 e 2.28. $\square$

2.7. **Prodotto di un numero reale per un vettore libero.**

Proposizione 2.30. *Sia* $\mathbf{v}$ *un vettore libero e* x *un numero reale* ≥ 0*. Allora esiste un unico vettore* $\mathbf{w}$ *parallelo e concorde a* $\mathbf{v}$ *tale che*

$$|\mathbf{w}| = x \cdot |\mathbf{v}| \ .$$

Dimostrazione (cenno). Se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ allora $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, sia AB un suo rappresentante. Fissato sulla retta r_{AB} il verso per cui $A \prec B$, c'è un unico punto $D \succeq A$ tale che $|\overline{AD}| = x \cdot |\mathbf{v}|$ (assioma 1.118). Il voluto vettore $\mathbf{w}$ è (necessariamente) quello rappresentato dal segmento orientato AD. □

Definizione 2.31. *Sia* $\mathbf{v}$ *un vettore libero e sia* k *un numero reale.*

Se $k \geq 0$*, l'unico vettore parallelo e concorde a* $\mathbf{v}$ *tale che*

$$|\mathbf{w}| = k \cdot |\mathbf{v}|$$

(cfr. proposizione 2.30) sarà detto prodotto *di* k *per* $\mathbf{v}$ *e sarà indicato con*

$$k\,\mathbf{v} \ .$$

Se $k < 0$ *definiamo il* prodotto $k\mathbf{v}$ *uguale a*

$$(-k)\,(-\mathbf{v})$$

(definizione 2.9).

Definizione 2.32. *Un numero reale può anche essere chiamato uno* scalare*, e l'operazione esterna nell'insieme* V *dei vettori liberi, con operatori in* $\mathbb{R}$ *(definizione 1.50), che ad ogni coppia* $(k, \mathbf{v}) \in \mathbb{R} \times V$ *associa il prodotto* $k\mathbf{v}$ *(definizione 2.31) si dice* moltiplicazione per scalari in V*.*

Il termine "scalari" è dovuto a motivi legati alla Fisica (e al fatto che $\mathbb{R}$ è totalmente ordinato).

Enunciamo nella seguente proposizione le proprietà fondamentali del prodotto di un numero per un vettore libero.

Proposizione 2.33. *Siano* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *vettori liberi e siano* h *e* k *numeri reali. Si ha*

1. $h(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = h\mathbf{v} + h\mathbf{w}$.
2. $(h + k)\mathbf{v} = h\mathbf{v} + k\mathbf{v}$.
3. $(hk)\mathbf{v} = h(k\mathbf{v})$.
4. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Tralasciamo la dimostrazione.

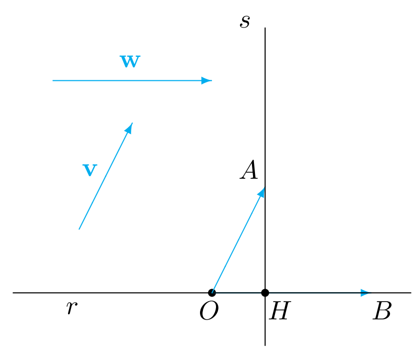
2.8. **Prodotto scalare tra vettori liberi.**

Definizione 2.34. *Due vettori liberi* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *si dicono* ortogonali *se i segmenti che rappresentano* $\mathbf{v}$ *sono ortogonali ai segmenti che rappresentano* $\mathbf{w}$ *(osservazione 1.205).*

Osservazione 2.35. *Il vettore nullo è ortogonale a qualunque vettore.*

Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vettori liberi. Scelto un punto O, siano OA e OB i rispettivi rappresentanti di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ aventi origine in O. Sia r una retta contenente O e B e sia

π un piano contenente O, A e B. Per la proposizione 1.206, esiste un'unica retta s contenuta in π, perpendicolare ad r e passante per A. Sia poi $\{H\} := r \cap s$.



Non sarebbe difficile dimostrare che se $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ (e quindi necessariamente $r = r_{OB}$), allora $|OH|$ non dipende dalla scelta di O e π, cioè che vale la seguente proposizione.

Proposizione 2.36. *Siano* $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, O, B, H *come sopra, con* $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$. *Sia* O' *un qualunque punto, siano* $O'A'$ *e* $O'B'$ *i rispettivi rappresentanti di* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *aventi origine in* O', *sia* $r' := r_{O'B'}$, *sia* π' *un piano contenente* O', A' *e* B', *sia* s' *la perpendicolare ad* r' *passante per* A' *e contenuta in* π', *sia infine* H' *il punto d'intersezione di* r' *ed* s'. *Allora si ha*

$$|OH| = |O'H'| .$$

Inoltre si ha

$$OH \text{ concorde ad } OB \iff O'H' \text{ concorde ad } O'B' .$$

Tralasciamo la dimostrazione.

Definizione 2.37. *Siano* $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *vettori liberi qualunque, e siano definiti* O, B, H *come prima. Definiamo il* prodotto scalare di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, *rispetto ad una fissata unità di misura* u, *come il numero reale*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \begin{cases} |OB| \cdot |OH| , & \text{se } OB \text{ e } OH \text{ sono concordi;} \\ \\ -|OB| \cdot |OH| , & \text{se } OB \text{ e } OH \text{ non sono concordi.} \end{cases}$$

Conserveremo la notazione $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ *per il prodotto scalare di vettori liberi* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$, *e l'unità di misura sarà di solito sottintesa.*

Proposizione 2.38. *I vettori liberi* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *sono ortogonali se e solo se* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

Dimostrazione. Nel caso $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ si ha che le due condizioni sono entrambe vere (quindi equivalenti in questo caso).

Nel caso $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ basta osservare che, conservando le notazioni introdotte all'inizio, si ha

$$\mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ ortogonali} \iff \overline{OA} \subseteq s \iff H = O \iff |\overline{OH}| = 0 \iff$$
$$\iff \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 .$$

□

Proposizione 2.39. *Siano* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *vettori liberi e sia* $h \in \mathbb{R}$. *Si ha*

1. $\mathbf{v} \cdot (h\mathbf{w}) = h(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$,
2. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$.

Tralasciamo la (non difficile) dimostrazione.

Osservazione 2.40. *Dalla proposizione 2.39, (2) si ricava subito:*

- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$,
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Definizione 2.41. *Siano* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *due vettori liberi non nulli. Definiamo* angolo *tra* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *l'angolo tra due rette orientate rispettivamente parallele e concordi a* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$. *L'angolo tra* $\mathbf{u}$ *ed* $\mathbf{v}$ *sarà a volte denotato con* $\widehat{\mathbf{uv}}$.

Proposizione 2.42. *Siano* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *vettori non nulli. Si ha*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cdot \cos \widehat{\mathbf{vw}}.$$

Dimostrazione. Assumendo le notazioni introdotte all'inizio di questo paragrafo e tenendo presente che sono compatibili con quelle della proposizione 1.220, nel caso OH sia concorde ad OB si ha

$$|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cdot \cos \widehat{\mathbf{vw}} = |OA| \cdot |OB| \cdot \frac{|OH|}{|OA|} = |OB| \cdot |OH| = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \ ,$$

e nel caso OH non sia concorde con OB si ha

$$|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cdot \cos \widehat{\mathbf{vw}} = |OA| \cdot |OB| \cdot \left(-\frac{|OH|}{|OA|} \right) = -|OB| \cdot |OH| = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \ .$$

□

Definizione 2.43. *Un* versore *è un vettore di modulo* 1.

Ovviamente la nozione di versore ha senso sempre che sia sottintesa un'unità di misura.

Osservazione 2.44. *Si ha*

$$\mathbf{v}, \mathbf{w} \ \textit{versori} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \cos \widehat{\mathbf{vw}} \ .$$

Proposizione 2.45. *Siano* $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *vettori liberi. Allora si ha*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \ .$$

Dimostrazione. Se almeno uno tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è nullo (o più in generale se sono ortogonali) dalla proposizione 2.38 segue $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$.

Se invece $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono entrambi non nulli, basta applicare la proposizione 2.42. □

La proprietà ora vista può essere chiamata *commutativa* come al solito, anche se il prodotto scalare è un'operazione interna (vedi definizione 1.46). La stessa cosa viene spesso espressa dicendo che il prodotto scalare è *simmetrico*.

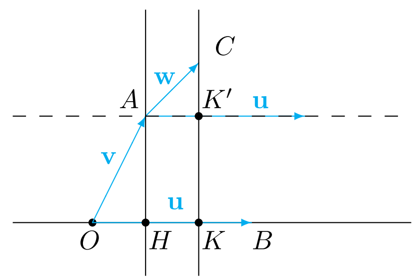
Osservazione 2.46. *Dalla proprietà commutativa e dalla proposizione 2.39, (1) segue subito che, dati dei vettori liberi* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$, *si ha*

- $(h\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = h(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$.

Proposizione 2.47. *Siano* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *vettori liberi paralleli ad un piano* π *(vedremo poi che questa ipotesi di parallelismo si può eliminare). Allora si ha*

$$(\mathbf{v}+\mathbf{w})\cdot\mathbf{u} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{w}\cdot\mathbf{u}\,.$$

Dimostrazione (cenno). Con riferimento alla seguente figura,



possiamo osservare che

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}+\mathbf{w})\cdot\mathbf{u} = \quad & |OK|\cdot|\mathbf{u}| = |OH|\cdot|\mathbf{u}| + |HK|\cdot|\mathbf{u}| = |OH|\cdot|\mathbf{u}| + |AK'|\cdot|\mathbf{u}|\\ = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}\,. & \end{aligned}$$

I casi in cui OH oppure HK non sono concordi ad OB si possono trattare in maniera simile. □

L'idea fondamentale della dimostrazione ora accennata funziona anche nel caso di vettori non rappresentabili in uno stesso piano, solo che in questo caso la dimostrazione formale (fatta sulla base dei risultati precedenti) è più elaborata.

Facciamo vedere come il caso dei vettori complanari è già sufficiente per dimostrare immediatamente il teorema di Pitagora (che, se si vuole, potrà essere usato per la dimostrazione nel caso generale dei vettori non complanari).

Proposizione 2.48. *Siano* r *ed* s *rette perpendicolari, sia* O *il loro punto comune, sia* A *un punto su* r *e* B *un punto su* s*. Allora si ha*

$$|\overline{AB}|^2 = |\overline{OA}|^2 + |\overline{OB}|^2.$$

Dimostrazione. Poniamo $\mathbf{v} = A-O$, $\mathbf{w} = O-B$. I vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono rappresentati dai segmenti orientati OA e BO, che giacciono su rette ortogonali. Dunque $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono ortogonali. Inoltre si ha

$$\mathbf{v}+\mathbf{w} = A-B.$$

Quindi

$$\begin{aligned}|\overline{AB}|^2 &\overset{\text{Prop. 2.39, (2)}}{=} (\mathbf{v}+\mathbf{w})\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})\\ &\overset{\text{Prop. 2.47}}{=} \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{w}\cdot\mathbf{w} \overset{\text{Prop. 2.38}}{=} \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}\\ &\overset{\text{Prop. 2.39, (2)}}{=} |\overline{OA}|^2 + |\overline{OB}|^2\,,\end{aligned}$$

come volevamo dimostrare. □

La seguente proposizione è l'estensione della proposizione 2.47 al caso generale di vettori non paralleli ad uno stesso piano. Anche se la forma è quella di una proprietà distributiva, non è esattamente così perché le addizioni coinvolte sono diverse: quella in $\mathbb{R}$ e quella nell'insieme dei vettori liberi.

Proposizione 2.49. *Siano* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *vettori liberi. Allora si ha*

$$(\mathbf{v}+\mathbf{w})\cdot\mathbf{u}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}\ .$$

Tralasciamo la dimostrazione.
Per la proprietà commutativa abbiamo anche

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\ .$$

3. Vettori numerici e matrici

3.1. **Operazioni su funzioni a valori reali.**

Definizione 3.1. *Sia X un insieme.*
Date delle funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$, la somma di f e g *è la funzione $s : X \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in X$,*

$$s(x)=f(x)+g(x)\ ;$$

questa funzione si può denotare con $f+g$.
Dato un $r \in \mathbb{R}$ ed una funzione $f : X \to \mathbb{R}$, il prodotto di r per f *è la funzione $p : X \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in X$,*

$$p(x)=r\cdot f(x)\ ;$$

questa funzione si può denotare con rf.

Abbiamo quindi per definizione

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\ ,\qquad (rf)(x)=r\cdot f(x)$$

Naturalmente si può definire anche il prodotto fg tra funzioni, ma in questo corso è molto meno usato.

Ricordiamo che l'insieme di tutte le funzioni $X \to \mathbb{R}$ si può denotare con $\mathbb{R}^X$ (definizione 1.14) e che questo insieme è anche uguale al prodotto cartesiano di una famiglia di insiemi tutti uguali ad $\mathbb{R}$ (osservazione 1.24).

Definizione 3.2. *Sia X un insieme.*
L'operazione in $\mathbb{R}^X$ che ad ogni coppia di funzioni (f, g) associa $f+g$ si dice addizione in $\mathbb{R}^X$ *e viene anche questa denotata con $+$ (come l'addizione tra numeri reali).*
Un numero reale può anche essere detto scalare, *e l'operazione esterna in $\mathbb{R}^X$ con operatori in $\mathbb{R}$ (definizione 1.50) che ad ogni coppia $(r, f) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^X$ associa il prodotto rf si dice* moltiplicazione per scalari in $\mathbb{R}^X$.

Osservazione 3.3. *Siano $r \in \mathbb{R}$ e $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ famiglie di numeri reali con indici in un insieme I. Poiché abbiamo definito le famiglie come funzioni (vedi la definizione 1.20), in base alla definizione 3.1 la* somma *di $(a_i)_{i\in I}$ e $(b_i)_{i\in I}$ è la famiglia $(s_i)_{i\in I}$ data da*

$$s_i := a_i + b_i\ ,\quad \forall i \in I\ ,$$

e il prodotto $r\,(a_i)_{i\in I}$ *è la famiglia $(p_i)_{i\in I}$ data da*

$$p_i := ra_i\ ,\quad \forall i \in I\ .$$

Nel caso particolare $I = \mathbb{N}_0$, restano così definite la somma di successioni di numeri reali e il prodotto di un numero reale per una successione di numeri reali.

Proposizione 3.4. *Sia X un insieme, denotiamo con $\mathbf{0}$ la funzione $X \to \mathbb{R}$ che associa 0 ad ogni $x \in X$, e per ogni $f : X \to \mathbb{R}$ denotiamo con $-f$ la funzione che associa $-f(x)$ ad ogni $x \in X$ (in altri termini, possiamo anche dire che $-f$ è il prodotto $(-1)f$).*
Allora

- $\big(\mathbb{R}^X, +\big)$ *è un gruppo commutativo con elemento neutro $\mathbf{0}$;*

inoltre, per ogni $f, g \in \mathbb{R}^X$ ed $r, s \in \mathbb{R}$ si ha che

- $r(f + g) = rf + rg$;
- $(r + s)f = rf + sf$;
- $(rs)f = r(sf)$;
- $1f = f$.

Dimostrazione. Per dimostrare che $\big(\mathbb{R}^X, +\big)$ è un gruppo commutativo con elemento neutro $\mathbf{0}$ dobbiamo verificare che per ogni $f, g, h \in \mathbb{R}^X$ si abbia

- $(f + g) + h = f + (g + h)$;
- $f + g = g + f$;
- $f + \mathbf{0} = f$;
- $f + (-f) = \mathbf{0}$.

Sia allora x un qualunque elemento di X. Tenendo presente la proposizione 1.133 (dove $+$ indica invece l'addizione in $\mathbb{R}$), per ogni $f, g, h \in \mathbb{R}^X$ si ha

- $\big((f+g)+h\big)(x) = (f+g)(x)+h(x) = (f(x)+g(x))+h(x) = f(x)+(g(x)+h(x)) = f(x) + (g + h)(x) = \big(f + (g + h)\big)(x)$;
- $\big(f + \mathbf{0}\big)(x) = f(x) + 0 = f(x)$;
- $\big(f + (-f)\big)(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) + (-f(x)) = 0 = \mathbf{0}(x)$;
- $\big(f + g\big)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = \big(g + f\big)(x)$.

Per l'osservazione 1.15, questo dimostra le proprietà volute.

Per dimostrare le altre proprietà elencate nell'enunicato, sia ancora x un qualunque elemento di X. Tenendo presente la proposizione 1.136, per ogni $f, g \in \mathbb{R}^X$ ed $r, s \in \mathbb{R}$ si ha

- $\big(r(f + g)\big)(x) = r \cdot (f + g)(x) = r \cdot (f(x) + g(x)) = r \cdot f(x) + r \cdot g(x) = (rf)(x) + (rg)(x) = (rf + rg)(x)$;
- $\big((r + s)f\big)(x) = (r + s) \cdot f(x) = r \cdot f(x) + s \cdot f(x) = (rf)(x) + (sf)(x) = (rf + sf)(x)$;
- $\big((rs)f\big)(x) = (rs) \cdot f(x) = r \cdot (s \cdot f(x)) = r \cdot (sf)(x) = \big(r(sf)\big)(x)$;
- $(1f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$.

Per l'osservazione 1.15, questo dimostra le proprietà rimaste. □

3.2. **Vettori numerici.**

Definizione 3.5. *Sia $n \in \mathbb{N}_0$. Un elemento di $\mathbb{R}^n$, cioè una n-pla di numeri reali (vedi definizione 1.18), viene anche detto* vettore numerico (reale) *di* ordine *n.*

Per un vettore numerico $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ si usa spesso la comoda notazione

$$(a_1, \ldots, a_n)$$

(vedi definizione 1.18 e discorso dopo la definizione 1.20; formalmente si ha $a_i = \mathbf{a}(i-1)$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$).

3.3. Operazioni su vettori numerici.

Osservazione 3.6. *Siano $r \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Poiché abbiamo definito le n-uple come funzioni (vedi la definizione 1.18), in base alla definizione 3.1 la* somma $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ *è il vettore (numerico) $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ dato da*

$$\mathbf{s}(i) := \mathbf{a}(i) + \mathbf{b}(i) \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\} ,$$

e il prodotto $r\mathbf{a}$ *è il vettore (numerico) $\mathbf{p}$ dato da*

$$\mathbf{p}(i) = r\mathbf{a}(i) \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\} .$$

In altri termini (un po' meno precisi, ma più semplici), possiamo anche scrivere

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) := (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

e

$$h(a_1, \dots, a_n) := (ha_1, \dots, ha_n).$$

Definizione 3.7. *Il vettore numerico che ha tutte le componenti uguali a zero, viene detto* vettore (numerico) nullo *e viene denotato con $\mathbf{0}$:*

$$\mathbf{0} = (0, \dots, 0) .$$

Sia $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Il vettore

$$(-1)\mathbf{a}$$

*si chiama l'*opposto *di $\mathbf{a}$ e viene denotato con*

$$-\mathbf{a}.$$

In altri termini,

$$-(a_1, \dots, a_n) := (-a_1, \dots, -a_n) .$$

Molto spesso una somma

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

viene denotata semplicemente con

$$\mathbf{a} - \mathbf{b}$$

e viene chiamata differenza *tra $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.*

Osservazione 3.8. *Per i vettori numerici di dato ordine n valgono le proprietà elencate nella proposizione 3.4, perché siamo nel caso particolare in cui $X = \{0, \dots, n-1\}$.*

3.4. **Prodotto scalare standard di vettori numerici.**

Definizione 3.9. *Siano* $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ *e* $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ *vettori numerici in* $\mathbb{R}^n$. *Definiamo il* prodotto scalare standard *di* $\mathbf{a}$ *per* $\mathbf{b}$ *come il numero reale*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ .$$

(o, in termini meno precisi, $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$*). Tale prodotto sarà indicato con*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \ .$$

Esempio 3.10.

$$(1,2,3,4) \cdot (5,6,7,8) = 5 + 12 + 21 + 32 = \boxed{70}.$$

Proposizione 3.11. *Siano* $n \in \mathbb{N}_0$, $r \in \mathbb{R}$ *e* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. *Si ha*

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$;
2. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$;
3. $(h\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = h(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$;
4. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$;
5. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Tralasciamo la (facile) dimostrazione.

3.5. **Matrici sui reali.**

Definizione 3.12. *Siano* $m, n \in \mathbb{N}_0$. *Una* matrice di tipo $m \times n$ sui reali *è una matrice di tipo* $m \times n$ *sull'insieme* $\mathbb{R}$ *(vedi definizione 1.25), cioè un elemento di* $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Nei vari libri che trattano le matrici, sono anche usate differenti notazioni, oltre $\mathbb{R}^{m \times n}$, per l'insieme delle matrici di tipo $m \times n$ sui reali, come ad esempio $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $M(m, n; \mathbb{R})$ o simili.

Per una matrice sui reali si usa spesso la comoda notazione del tipo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

(vedi notazione 1.26).

Quando non dà luogo ad ambiguità, si può usare anche la notazione breve del tipo

$$(a_{ij}) \ .$$

Indicheremo con $\mathbf{a}_i$ la riga

$$(a_{i1}, \dots, a_{in})$$

di (a_{ij}), e la chiameremo *i-esima riga*. Indicheremo con $\mathbf{a}^j$ la colonna

$$(a_{mj}, \dots, a_{mj})$$

di (a_{ij}), e la chiameremo *j-esima colonna*.

3.6. **Operazioni su matrici sui reali.**

Osservazione 3.13. *Siano $m, n \in \mathbb{N}_0$, $(a_{ij}), (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $r \in \mathbb{R}$. Poiché abbiamo definito le matrici di tipo $m \times n$ come famiglie (vedi la definizione 1.25), in base all'osservazione 3.3 la* somma $(a_{ij}) + (b_{ij})$ *è la matrice $(s_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ data da*

$$s_{ij} := a_{ij} + b_{ij} \ , \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\} \ ,$$

e il prodotto (per scalari) $r\,(a_{ij})$ *è la matrice $(p_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ data da*

$$p_{ij} := r a_{ij} \ , \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\} \ .$$

In altri termini (un po' meno precisi, ma più semplici), possiamo anche scrivere

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

e

$$r \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r a_{11} & \cdots & r a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r a_{m1} & \cdots & r a_{mn} \end{pmatrix} \ ;$$

o anche $(a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij})$ e $r\,(a_{ij}) := (r a_{ij})$.

Definizione 3.14. *Una matrice sui reali che ha tutti i termini uguali a zero viene detta* matrice nulla *e viene a volte denotata con O:*

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, la matrice

$$(-1)A$$

*si chiama l'*opposta *di A e viene denotata con*

$$-A \ .$$

Una somma

$$A + (-B)$$

viene spesso denotata semplicemente con

$$A - B$$

e viene chiamata differenza *tra A e B.*

Osservazione 3.15. *Per le matrici di tipo $m \times n$ valgono le proprietà elencate nella proposizione 3.4, perché siamo nel caso particolare in cui $X = \{0, \dots, m-1\} \times \{0, \dots, n-1\} = \{(0,0), \dots, (0, n-1), (1,0), \dots, (1, n-1), \dots, (m-1, 0), \dots, (m-1, n-1)\}$ (formalmente, se $A = (a_{ij})$ si ha $A(i,j) = a_{i+1,j+1}$).*

3.7. **Prodotto righe per colonne.**

Definizione 3.16. *Siano* $m, n, p \in \mathbb{N}_0$, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *e* $B = (b_{jk}) \in \mathbb{R}^{n\times p}$.
Definiamo il prodotto *(righe per colonne) di* A *per* B *come la matrice* $(c_{ik}) \in \mathbb{R}^{m\times p}$ *data da*

$$c_{ik} := \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}^k \qquad \forall i \in \{1, \ldots, m\}, k \in \{1, \ldots, p\}$$

(quindi, più semplicemente, $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$*). Tale prodotto sarà denotato con* AB*.*

Esempio 3.17.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 44 & 50 & 56 \\ 83 & 98 & 113 & 128 \end{pmatrix}.$$

Esempio 3.18. *Siano*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo

$$AB = \begin{pmatrix} 14 & 15 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 22 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$AB \neq BA .$$

Questo esempio mostra che il prodotto di matrici non ha la proprietà commutativa. D'altra parte, come ulteriore esempio, possiamo osservare che se A è una matrice di tipo 3×2 e B è una matrice di tipo 2×4, allora il prodotto AB è definito, mentre il prodotto BA non è definito. Naturalmente, in casi particolari può succedere che un prodotto AB sia uguale a BA, ma questo avviene molto raramente.

Per fortuna il prodotto di matrici, anche se non è commutativo, ha comunque altre utili proprietà.

Proposizione 3.19. *Siano* A *e* A' *matrici di tipo* $m \times n$*, siano* B *e* B' *matrici di tipo* $n \times p$*, sia* C *una matrice di tipo* $p \times q$ *e sia* h *un numero reale. Si ha*

1. $A(B + B') = AB + AB'$;
2. $(A + A')B = AB + A'B$;
3. $(AB)C = A(BC)$;
4. $(hA)B = h(AB) = A(hB)$.

Tralasciamo la dimostrazione.

3.8. **Matrici di tipo particolare.** Ricordiamo che una matrice *quadrata di ordine* n è semplicemente una matrice di tipo $n \times n$ (definizione 1.29).

Definizione 3.20. *Sia* A *la matrice quadrata di ordine* n *data da*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & se\ i = j \\ 0 & se\ i \neq j \end{cases} .$$

Tale matrice si dice matrice identica *di ordine* n*, e si indica generalmente con* I_n *(o a volte anche solo con* I*). I suoi termini si indicano spesso con* δ_{ij} *(o* δ_i^j*), e vengono detti* simboli di Kronecker*.*

Quindi il simbolo di Kronecker δ_{ij} indica semplicemente il numero 1 se $i = j$, o il numero 0 se $i \neq j$.

La matrice identica ha la seguente importante proprietà.

Proposizione 3.21. *Si ha:*

- $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \qquad AI_n = A$
- $\forall B \in \mathbb{R}^{n \times p}, \qquad I_n B = B$

Dimostrazione. Siano $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$.

Poniamo $C := (c_{ik}) := AI_n$ e dimostriamo che $C = A$. Per definizione di prodotto righe per colonne, C è una matrice di tipo $m \times n$ (come A) e per ogni $i \in \{1, \dots, m\}, k \in \{1, \dots, n\}$ si ha

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{jk} .$$

In questa somma l'unico δ_{jk} diverso da 0 è quello con $j = k$, quindi $c_{ik} = a_{ik}\delta_{kk} = a_{ik}$ (perché $\delta_{kk} = 1$). Avendo verificato che per ogni $i \in \{1, \dots, m\}, k \in \{1, \dots, n\}$ abbiamo $c_{ik} = a_{ik}$, concludiamo che $C = A$, come volevamo.

Poniamo poi $D := (d_{ik}) := I_n B$ e dimostriamo che $D = B$. Per definizione di prodotto righe per colonne, D è una matrice di tipo $n \times p$ (come B) e per ogni $i \in \{1, \dots, n\}, k \in \{1, \dots, p\}$ si ha

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} b_{jk} .$$

In questa somma l'unico δ_{ij} diverso da 0 è quello con $i = j$, quindi $d_{ik} = \delta_{ii} b_{ik} = b_{ik}$ (perché $\delta_{ii} = 1$). Avendo verificato che per ogni $i \in \{1, \dots, n\}, k \in \{1, \dots, p\}$ abbiamo $c_{ik} = b_{ik}$, concludiamo che $D = B$, come volevamo. □

Ricordiamo che A^{t} indica la matrice trasposta di una matrice A (definizione 1.28) e che A è simmetrica quando $A = A^{\mathrm{t}}$. Per matrici sui reali si può definire anche la seguente nozione.

Definizione 3.22. *Una matrice A sui reali si dice* antisimmetrica *se*

$$A = -A^{\mathrm{t}} \ .$$

Osservazione 3.23. *Una matrice antisimmetrica deve essere per forza quadrata. Una matrice quadrata di ordine n è antisimmetrica se e solo se si ha*

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \ .$$

In particolare, per una matrice antisimmetrica (sui reali) dobbiamo avere che $a_{ii} = -a_{ii}$, quindi i termini del tipo a_{ii} devono essere tutti nulli.

Esempio 3.24. *La matrice*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 6 \\ -3 & -5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

è antisimmetrica.

Definizione 3.25. *Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata di ordine n sui reali. Allora*

- *A si dice* diagonale *se per ogni $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tali che $i \neq j$, si ha che $a_{ij} = 0$.*
- *A si dice* triangolare alta *(o* superiore*) se per ogni $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tali che $i > j$, si ha che $a_{ij} = 0$.*
- *A si dice* triangolare bassa *(o* inferiore*) se per ogni $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tali che $i < j$, si ha che $a_{ij} = 0$.*

3.9. **Determinante.**

Definizione 3.26. *Sia X un insieme. Una* permutazione *su X è un'applicazione biettiva*

$$X \to X.$$

Definizione 3.27. *Sia σ una permutazione dell'insieme $\{1, \ldots, n\}$ e siano $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ indici tali che*

$$i < j \quad e \quad \sigma(i) > \sigma(j).$$

Allora la coppia (i, j) sarà detta una inversione *in σ. Definiamo poi il* segno *di σ, come il numero 1 oppure -1, a seconda che il numero delle inversioni in σ sia pari oppure dispari. Il segno di σ sarà denotato con ϵ_σ.*

Esempio 3.28. *Le inversioni della permutazione di* $\{1,2,3,4\}$ *definita da*

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 2\,, \\ 2 &\mapsto 4\,, \\ 3 &\mapsto 3\,, \\ 4 &\mapsto 1\,. \end{aligned}$$

sono $(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)$. *Dunque il segno di questa permutazione è* 1.
La permutazione di $\{1,2,3,4\}$ *definita da*

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 1\,, \\ 2 &\mapsto 3\,, \\ 3 &\mapsto 2\,, \\ 4 &\mapsto 4\,. \end{aligned}$$

ha solo l'inversione $(2,3)$, *ed ha quindi segno* -1.

Definizione 3.29. *Sia* A *una matrice quadrata di ordine* n *sui reali. Indicato con* S_n *l'insieme di tutte le permutazioni su* $\{1,\ldots,n\}$, *definiamo il* determinante *di* A *come il numero*

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

cioè la somma di tutti i possibili prodotti $\epsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$, *con* $\sigma \in S_n$.

Per indicare il determinante di A *conserveremo la notazione* $|A|$; *a volte si usa anche la notazione* $\det A$. *Se la matrice è scritta per esteso o nella forma* (a_{ij}), *allora nella notazione per il determinante di solito si omettono le parentesi tonde (ad esempio, si scrive* $|a_{ij}|$*).*

Esempio 3.30. *Il determinante della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

è dato da

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}\ .$$

Il determinante di una matrice di ordine due è

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\ .$$

Il determinante di una matrice di ordine 1 *è semplicemente uguale all'unico termine della matrice.*

Esempio 3.31. *Siano*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Si ha

$$|A| = 1, \qquad |B| = 0, \qquad |A+B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 .$$

Quindi

$$|A+B| \neq |A| + |B| .$$

Naturalmente, in alcuni casi il determinante di una somma può essere uguale alla somma dei determinanti, ma questo capita molto raramente.

Per fortuna il determinante, anche se non è "compatibile" con la somma, ha molte importanti proprietà. Prima di esporle, stabiliremo prima (nei prossimi paragrafi) un'utile formula per il calcolo del determinante.

3.10. **Sottomatrici.**

Definizione 3.32. *Sia A una matrice di tipo $m \times n$, sia I un sottoinsieme di $\{1, \ldots, m\}$ e sia J un sottoinsieme di $\{1, \ldots, n\}$. Possiamo assumere*

$$I = \{i_1, \ldots, i_r\}, \text{ con } i_1 < i_2 < \cdots < i_r$$

e

$$J = \{j_1, \ldots, j_s\}, \text{ con } j_1 < j_2 < \cdots < j_s.$$

Definiamo la sottomatrice *di A individuata dagli insiemi di indici I, J come la matrice B di tipo $r \times s$ tale che*

$$b_{hk} = a_{i_h j_k} \quad \forall h \in \{1, \ldots, r\}, \forall k \in \{1, \ldots, s\}.$$

Tale matrice sarà denotata con

$$A_{I,J} .$$

Esempio 3.33. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$I = \{2, 4\}$, $J = \{2, 3, 5\}$. La sottomatrice individuata da I e J è

$$A_{I,J} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

In maniera meno precisa ma più intuitiva, possiamo dire che la sottomatrice $A_{I,J}$ si ottiene cancellando tutte le righe eccetto $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$ e tutte le colonne eccetto $\mathbf{a}^{j_1}, \dots, \mathbf{a}^{j_s}$. O anche, si può dire che $A_{I,J}$ è formata dai quei termini che sono "all'incrocio" delle righe $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$ e delle colonne $\mathbf{a}^{j_1}, \dots, \mathbf{a}^{j_s}$.

3.11. **Minori.**

Definizione 3.34. *Sia $A = (a_{ij})$ una matrice sui reali. Un* minore *di A è il determinante di una qualunque sottomatrice quadrata di A.*

Talvolta per abuso di linguaggio ci si riferisce al minore volendo parlare della sottomatrice; ad esempio, si dice "minore di ordine h" per significare che il minore è il determinante di una sottomatrice di ordine h.

Esempio 3.35. *I minori di ordine* 2 *della matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

sono

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15.$$

I minori di ordine 1 *sono dati dai singoli termini della matrice.*

Definizione 3.36. *Sia A una matrice quadrata di ordine n sui reali, sia a_{ij} un suo termine e poniamo*

$$I = \{1, \dots, n\} \smallsetminus \{i\}, \qquad J = \{1, \dots, n\} \smallsetminus \{j\}.$$

La sottomatrice $A_{I,J}$ è allora quadrata di ordine $n-1$, e il suo determinante è un minore di A che prende il nome di minore complementare *del termine a_{ij}. Il numero ottenuto moltiplicando tale minore complementare per $(-1)^{i+j}$ si chiama* complemento algebrico *del termine a_{ij}, e si indica con A_{ij}:*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \left| A_{\{1,\dots,n\}\smallsetminus\{i\},\{1,\dots,n\}\smallsetminus\{j\}} \right|.$$

3.12. **Sviluppo di Laplace.**

Proposizione 3.37. *Sia A una matrice quadrata di ordine n sui reali e fissiamo un indice $i \in \{1, \dots, n\}$. Allora si ha:*

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

e

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} A_{ji} \,.$$

Le formule ora presentate sono facili da ricordare: nella prima sono presenti tutti i termini della riga $\mathbf{a}_i$, moltiplicati per i rispettivi complementi algebrici; nella seconda succede lo stesso per i termini della colonna $\mathbf{a}^i$. Per questo motivo l'espressione

$$a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

prende il nome di *sviluppo* (di Laplace) secondo la riga $\mathbf{a}_i$, mentre l'espressione

$$a_{1i}A_{1i} + \cdots + a_{ni}A_{ni} \; .$$

prende il nome di *sviluppo* (di Laplace) secondo la colonna $\mathbf{a}^i$. La dimostrazione del teorema è concettualmente molto semplice: si tratta di mettere in evidenza nell'espressione del determinante i termini della riga o della colonna prescelta. Per esigenze di brevità, non possiamo entrare nei dettagli.

Esempio 3.38. *Consideriamo la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Lo sviluppo del determinante secondo la prima riga è:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$
$$= (45 - 48) - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) = -3 + 12 - 9 = 0.$$

Lo sviluppo secondo la seconda colonna è:

$$-2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= -2 \cdot (36 - 42) + 5 \cdot (9 - 21) - 8 \cdot (6 - 12) = 12 - 60 + 48 = 0.$$

Esercizio 3.39. *Calcolare, utilizzando uno sviluppo di Laplace, il determinante*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

(suggerimento: conviene usare la seconda riga, perché compaiono due zeri).

3.13. **Proprietà del determinante.**

Proposizione 3.40. *Sia A una matrice quadrata sui reali e sia B la matrice ottenuta da A scambiando due righe $\mathbf{a}_i$ e $\mathbf{a}_j$ con $i \neq j$ (cioè $\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_j$, $\mathbf{b}_j = \mathbf{a}_i$ e $\mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k$ per gli indici k diversi da i, j). Allora si ha*

$$|B| = -|A|.$$

Rinunciamo a dimostrare questa proposizione.
Osserviamo che se le due righe scambiate sono uguali, cioè $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j$, allora $B = A$; quindi si ha $|A| = -|A|$, e dunque $|A| = 0$. Questo dimostra il seguente risultato.

Proposizione 3.41. *Sia A una matrice quadrata sui reali che abbia due righe uguali (cioè ci sono due indici $i \neq j$ tali che $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j$). Allora si ha*

$$|A| = 0.$$

Proposizione 3.42. *Sia A una matrice quadrata sui reali, e sia B una matrice ottenuta da A moltiplicando una riga per un numero $r \in \mathbb{R}$. Allora si ha*

$$|B| = r|A|.$$

Anche qui rinunciamo ai dettagli dimostrativi, anche se consisterebbero in un semplice conto sulla definizione del determinante (o, se si vuole, sullo sviluppo di Laplace secondo la riga che viene moltiplicata). In maniera simile si potrebbe dimostrare anche la seguente proposizione.

Proposizione 3.43. *Siano A, B, C matrici quadrate di ordine n sui reali tali che per un indice i si abbia*

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_h = \mathbf{b}_h = \mathbf{c}_h\ , \quad \forall h \neq i\ , \\ &\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i + \mathbf{c}_i\ . \end{aligned}$$

(quindi le matrici differiscono solo per la i-esima riga, e la i-esima riga di A è la somma della i-esima riga di B con la i-esima riga di C). Allora si ha:

$$|A| = |B| + |C|.$$

Esempio 3.44. *Se consideriamo le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

siamo nella situazione della proposizione 3.43, dunque si deve avere $|A| = |B| + |C|$. Ed infatti $|A| = 52$, $|B| = 48$, $|C| = 4$.

Un semplice (ma importante) fatto da tenere presente è il seguente.

Proposizione 3.45. *Tutte le proposizioni viste finora in questo paragrafo valgono anche per le colonne.*

Questo fatto può anche essere dedotto dalla seguente proposizione.

Proposizione 3.46. *Per ogni matrice quadrata A sui reali si ha*

$$|A^t| = |A| \ .$$

3.14. **Matrice inversa.**

Definizione 3.47. *Sia A una matrice quadrata di ordine n sui reali. La matrice A si dice* invertibile *se esiste una matrice B tale che*

$$AB = I_n \quad e \quad BA = I_n \ .$$

Una tale matrice B si dice inversa *di A e si indica con A^{-1}.*

Esempio 3.48. *Una matrice nulla di ordine $n > 0$ non è invertibile.*

Esempio 3.49. *Se una matrice A ha due righe uguali (cioè esistono $i \neq j$ tali che $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j$), per come è definito il prodotto righe per colonne, qualunque prodotto AB ha due righe uguali (se $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j$ e $C = AB$, allora $\mathbf{c}_i = \mathbf{c}_j$). Dunque A non può essere invertibile.*

Proposizione 3.50. *Per ogni matrice invertibile esiste un'unica matrice inversa.*

Dimostrazione. Supponiamo che B e C siano inverse di A. Allora si ha:

$$B = I_n B = CAB = CI_n = C$$

(dove n uguale all'ordine della matrice quadrata A). □

La seguente proposizione viene spesso chiamata *teorema di Binet*.

Proposizione 3.51. *Siano A e B matrici quadrate di ordine n. Si ha*

$$|AB| = |A||B| \ .$$

Tralasciamo la dimostrazione.

Proposizione 3.52. *Se A è invertibile, allora $|A| \neq 0$.*

Dimostrazione. È facile vedere che il determinante di I_n è uguale ad 1 (per ogni n). Dunque, siccome $AA^{-1} = I_n$ (con n uguale all'ordine della matrice quadrata A), la proposizione precedente implica che

$$|A||A^{-1}| = 1 \ .$$

Dunque $|A|$ non può essere uguale a 0. □

Definizione 3.53. *Sia A una matrice quadrata di ordine n sui reali. Definiamo la* matrice aggiunta *di $A = (a_{ij})$ come la matrice $A^* = \left(a^*_{ij}\right)$ data da*

$$a^*_{ij} = A_{ji}$$

(ricordiamo che A_{ji} è il complemento algebrico di a_{ji}). Conserveremo la notazione A^* per l'aggiunta di A.

Proposizione 3.54. *Sia A una matrice quadrata sui reali. Se $|A| \neq 0$ allora A è invertibile e l'inversa è data da*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*.$$

Tralasciamo la dimostrazione.

In sintesi, una matrice quadrata è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

Esempio 3.55. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante è

$$|A| = 2(3-1) - 1(5-2) = 1.$$

Siccome il determinante è diverso da 0, la matrice è invertibile. Calcoliamo l'inversa. I complementi algebrici sono: $A_{11} = 2$, $A_{12} = -3$, $A_{13} = -1$, $A_{21} = -1$, $A_{22} = 2$, $A_{23} = 0$, $A_{31} = 1$, $A_{32} = -2$, $A_{33} = 1$. Dunque l'aggiunta è

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi l'inversa è

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = 1 \cdot A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Spazi vettoriali

4.1. Definizione di spazio vettoriale sui reali.

Definizione 4.1. *Uno* spazio vettoriale sui reali *è una terna*

$$(V, +, \cdot),$$

tale che

- *$(V, +)$ è un gruppo commutativo*

e $\cdot$ è un'operazione esterna con operatori nell'insieme dei numeri reali tale che, comunque si prendano $r, s \in \mathbb{R}$ ed $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, si abbia

- $r(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = r\mathbf{u} + r\mathbf{v}$;
- $(r+s)\mathbf{u} = r\mathbf{u} + s\mathbf{u}$;
- $(rs)\mathbf{u} = r(s\mathbf{u})$;
- $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Gli elementi di V saranno detti vettori *e (in questo contesto) i numeri reali saranno spesso chiamati* scalari.

Molto spesso, per brevità si usa parlare dello "spazio vettoriale V", lasciando sottintese le operazioni di addizione e di moltiplicazione per scalari. Quindi, invece di dire "sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale", spesso diremo semplicemente "sia V uno spazio vettoriale".

Esiste una definizione più ampia di "spazio vettoriale", che si ottiene sostituendo i numeri reali con un *campo* arbitrario. Un campo è dato da un insieme e da due operazioni, che soddisfano alcune (naturali) proprietà. Ad esempio, anche l'insieme dei numeri complessi con l'addizione e moltiplicazione costituisce un campo.

Almeno per il momento non trattiamo questa nozione più generale. Diciamo poi che gruppi, campi, spazi vettoriali sono tutti esempi di una nozione molto generale: quella di *struttura algebrica* (che qui rinunciamo a definire nei dettagli).

Definizione 4.2. *Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale. L'elemento neutro del gruppo $(V, +)$ sarà detto* vettore nullo *di V e sarà sempre indicato con $\mathbf{0}$. Dato un vettore $\mathbf{u}$, l'unico vettore $\mathbf{u}'$ tale che $\mathbf{u} + \mathbf{u}' = \mathbf{0}$ sarà detto* opposto *di $\mathbf{u}$ e sarà indicato con $-\mathbf{u}$.*
La somma di un vettore $\mathbf{v}$ con l'opposto $-\mathbf{w}$ di un vettore $\mathbf{w}$ sarà detta differenza *di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, e sarà indicata con*

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} .$$

4.2. **Esempi.**

Esempio 4.3. *Siano $+$ e $\cdot$ le operazioni di addizione e di moltiplicazione (esterna) per scalari nell'insieme V dei vettori liberi ordinari (vedi definizioni 2.23 e 2.32). Per le proposizioni 2.29 e 2.33 abbiamo che $(V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale.*

Esempio 4.4. *Sia X un insieme e siano $+$ e $\cdot$ le operazioni di addizione e di moltiplicazione (esterna) per scalari nell'insieme $\mathbb{R}^X$ di tutte le funzioni $X \to \mathbb{R}$. Per la proposizione 3.4,*

$$(\mathbb{R}^X, +, \cdot)$$

è uno spazio vettoriale sui reali.

In effetti, il fatto che $(\mathbb{R}^X, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale sui reali è esattamente il contenuto della proposizione 3.4, ed è dunque un modo riassuntivo per enunciarla. Allo stesso modo, il contenuto delle osservazioni 3.8 e 3.15 può essere riassunto nei seguenti esempi.

Esempio 4.5. *Siano $+$ e $\cdot$ le operazioni di addizione e di moltiplicazione (esterna) per scalari nell'insieme $\mathbb{R}^n$ dei vettori numerici di ordine n. Allora*

$$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$$

è uno spazio vettoriale, perché siamo nel caso particolare dell'esempio 4.4 in cui $X = \{0, \dots, n-1\}$.

Esempio 4.6. *Siano $+$ e $\cdot$ le operazioni di addizione e di moltiplicazione (esterna) per scalari nell'insieme $\mathbb{R}^{m\times n}$ delle matrici sui reali di tipo $m \times n$. Allora*

$$(\mathbb{R}^{m\times n}, +, \cdot)$$

è uno spazio vettoriale, perché siamo nel caso particolare dell'esempio 4.4 in cui $X = \{0, \dots, m-1\} \times \{0, \dots, n-1\}$.

Gli esempi ora visti mostrano che le definizioni e i risultati validi per gli spazi vettoriali possono essere utilmente applicati a molte situazioni diverse. Vale quindi la pena di studiarli. A titolo di esempio, cominciamo con alcune semplicissime proprietà. Nel caso degli esempi finora conosciuti, queste potrebbero essere subito dimostrate in maniera diretta, ma facciamo ora vedere che devono valere in qualunque spazio vettoriale. Per far questo, dobbiamo dimostrarle usando solo le proprietà stabilite nella definizione di spazio vettoriale.

Proposizione 4.7. *Sia V uno spazio vettoriale. Allora si ha*

- $0\mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad \forall \mathbf{u} \in V$,
- $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u} \qquad \forall \mathbf{u} \in V$,
- $r\mathbf{0} = \mathbf{0} \qquad \forall r \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{u} \in V$. Abbiamo

$$\begin{aligned} 0\mathbf{u} = 0\mathbf{u} + \mathbf{0} = 0\mathbf{u} + (\mathbf{u} - \mathbf{u}) = (0\mathbf{u} + \mathbf{u}) - \mathbf{u} = (0\mathbf{u} + 1\mathbf{u}) - \mathbf{u} \\ = (0+1)\mathbf{u} - \mathbf{u} = 1\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (-1)\mathbf{u} &= (-1)\mathbf{u} + \mathbf{0} = (-1)\mathbf{u} + (\mathbf{u} - \mathbf{u}) = ((-1)\mathbf{u} + \mathbf{u}) - \mathbf{u} \\ &= ((-1)\mathbf{u} + 1\mathbf{u}) - \mathbf{u} = (-1+1)\mathbf{u} - \mathbf{u} = 0\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0} - \mathbf{u} = -\mathbf{u}\,. \end{aligned}$$

Se poi $r \in \mathbb{R}$, tenendo presente che $0\mathbf{0} = \mathbf{0}$ per la prima proprietà che abbiamo dimostrato, abbiamo

$$r\mathbf{0} = r\,(0\mathbf{0}) = (r \cdot 0)\mathbf{0} = 0\mathbf{0} = \mathbf{0}\ .$$

□

4.3. **Combinazioni lineari.** Tradizionalmente nello studio degli spazi vettoriali si usano i cosiddetti "sistemi" di vettori. Talvolta, in maniera un po' impropria, con questo termine qualcuno intende semplicemente un insieme di vettori. Ma in certe situazioni è importante considerare sistemi con vettori ripetuti più volte (cosa che con gli insiemi non si può fare). Una definizione classica consiste nel definire questi "insiemi con ripetizioni" come delle classi di equivalenza di un certo tipo. Per non complicare le cose, qualcuno definisce i sistemi semplicemente come delle famiglie di vettori, ed anche noi seguiremo quest'uso. È utile però tener presente che per la maggior parte dei fatti che riguardano i sistemi di vettori, non è importante quali indici si usino. Più precisamente, se una famiglia $(\mathbf{v}_i)_{i\in I}$ di vettori viene chiamata "sistema" e soddisfa qualche condizione, allora di norma questa condizione dovrebbe valere anche per qualunque famiglia $(\mathbf{v}_{i'})_{i'\in I'}$ che si ottenga "cambiando gli indici", cioè considerando un'applicazione biettiva $f : I' \to I$ e ponendo $\mathbf{v}_{i'} := \mathbf{v}_{f(i')}$ per ogni $i' \in I'$. In questo corso ci limiteremo a discutere i sistemi di vettori con un numero finito di indici, quindi includeremo questa ipotesi restrittiva nella definizione di sistema di vettori.

Definizione 4.8. *Sia V uno spazio vettoriale. Una famiglia $(\mathbf{v}_i)_{i\in I}$ di vettori di V sarà a volte chiamata un* sistema *di vettori, e assumeremo anche che l'insieme I degli indici abbia un numero finito n di elementi. Questo numero sarà detto l'*ordine *del sistema.*
Un sistema potrà essere indicato (ma non determinato) elencando tra parentesi quadre gli elementi, uno per ogni indice. Nell'elenco non saranno necessariamente indicati gli indici; e se sono indicati degli indici, questi non sono necessariamente quelli che definiscono la famiglia.

Definizione 4.9. *Sia V uno spazio vettoriale, sia $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ un sistema di vettori e siano $h_1, \dots, h_n$ degli scalari. Il vettore*

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} h_i \mathbf{v}_i$$

sarà detto combinazione lineare *di $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ tramite $h_1, \dots, h_n$. In questa situazione diremo anche che il vettore* $\mathbf{w}$ dipende *dal sistema*

$[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$. *Nel caso sia* $n = 0$ *(quindi nessun vettore e nessuno scalare) assumiamo*

$$\mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Esempio 4.10. *Consideriamo lo spazio vettoriale* $\mathbb{R}^2$ *e il sistema di vettori*

$$\left[\ (1,1),\ (3,-4)\ \right] .$$

Calcoliamo la combinazione lineare dei vettori del nostro sistema tramite gli scalari 2 *e* 7*:*

$$2(1,1) + 7(3,-4) = (2,2) + (21,-28) = (23,-26).$$

Dunque la combinazione lineare voluta è il vettore $(23,-26)$*.*

Calcoliamo poi la combinazione lineare tramite gli scalari 4 *e* 0*:*

$$4(1,1) + 0(3,-4) = (4,4) + (0,0) = (4,4).$$

Dunque la nuova combinazione lineare è il vettore $(4,4)$*.*

4.4. **Sistemi linearmente indipendenti.**

Osservazione 4.11. *Il vettore nullo dipende da qualsiasi sistema di vettori. Infatti, dato un qualunque sistema* $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$*, basta considerare gli scalari tutti uguali a zero:*

$$0\mathbf{v}_1 + \cdots + 0\mathbf{v}_n = \mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0} = \mathbf{0}\ .$$

Naturalmente non è detto che questo sia l'unico modo possibile per ottenere il vettore nullo. Ad esempio se consideriamo il sistema di vettori di $\mathbb{R}^3$ *dato da* $(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)$ *anche la combinazione lineare tramite gli scalari* 1*,* -2 *e* 1 *ci dà il vettore nullo:*

$$\begin{aligned} 1(1,2,3) - 2(4,5,6) + 1(7,8,9) &= (1,2,3) - (8,10,12) + (7,8,9) = \\ &= (-7,-8,-9) + (7,8,9) = (0,0,0)\ . \end{aligned}$$

Tuttavia per certi sistemi di vettori l'unico modo possibile di ottenere $\mathbf{0}$ *è quello di prendere gli scalari tutti uguali a zero. Ad esempio se prendiamo* $(1,0)$ *e* $(0,1)$ *(nello spazio* $\mathbb{R}^2$*) e chiamiamo* h *e* k *due scalari qualsiasi, otteniamo che la combinazione lineare tramite* h *e* k *ci dà il vettore*

$$h(1,0) + k(0,1) = (h,0) + (0,k) = (h,k)\ .$$

Questo vettore è nullo solo quando sia h *che* k *sono nulli. Quindi, nel caso del particolare sistema* $[(1,0),(0,1)]$*, l'unico modo di ottenere il vettore nullo è quello di prendere gli scalari tutti nulli.*

Ricapitolando, scegliendo gli scalari tutti nulli, una combinazione lineare dà sempre il vettore nullo. Però: per alcuni sistemi di vettori ci sono anche altri modi di ottenerlo, mentre per altri sistemi di vettori questo è l'unico modo.

Definizione 4.12. *Sia* $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ *un sistema di vettori di uno spazio vettoriale. Se esistono degli scalari* $h_1, \cdots, h_n$ *non tutti nulli tali che la combinazione lineare*

$$h_1\mathbf{v}_1 + \cdots + h_n\mathbf{v}_n$$

sia il vettore nullo, allora diremo che il sistema $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ *è* linearmente dipendente. *In caso contrario (cioè se l'unico modo di ottenere il vettore nullo come combinazione lineare di* $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ *è quello di prendere gli scalari tutti uguali a zero) allora diremo che il sistema* $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ *è* linearmente indipendente.

Osservazione 4.13. *Un sistema di vettori* $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ *è linearmente indipendente quando vale l'implicazione*

$$h_1\mathbf{v}_1 + \cdots + h_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad h_1 = 0, \cdots, h_n = 0 \; .$$

Osservazione 4.14. *Sia* $\mathbf{u}$ *un vettore non nullo di uno spazio vettoriale. Preso un qualunque scalare* $h \neq 0$*, poiché* $h^{-1}h\mathbf{u} = \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$*, abbiamo che* $h\mathbf{u}$ *non può essere nullo. Questo prova che il sistema* $[\mathbf{u}]$ *è linearmente indipendente. Viceversa, il sistema* $[\mathbf{0}]$ *è linearmente dipendente perché* $1\mathbf{0} = \mathbf{0}$ *e* $1 \neq 0$*.*
In conclusione, un sistema costituito da un singolo vettore $\mathbf{u}$ *è linearmente indipendente se e solo se* $\mathbf{u}$ *è non nullo.*

Proposizione 4.15. *Sia* $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ *un sistema di vettori di uno spazio vettoriale e sia* $\mathbf{v}$ *un vettore che dipende da* $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$*. Allora il sistema*

$$[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}]$$

(cioè il sistema ottenuto "aggiungendo" $\mathbf{v}$*) è linearmente dipendente.*

Dimostrazione. Siccome $\mathbf{v}$ dipende dal sistema $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$, allora esistono degli scalari $h_1, \ldots, h_n$ tali che

$$\mathbf{v} = h_1\mathbf{v}_1 + \cdots + h_n\mathbf{v}_n \; .$$

Sommando l'opposto di $\mathbf{v}$ ai due membri dell'uguaglianza di sopra, e tenendo conto che $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$, otteniamo

$$\mathbf{0} = h_1\mathbf{v}_1 + \cdots + h_n\mathbf{v}_n + (-1)\mathbf{v} \; .$$

Dunque la combinazione $h_1\mathbf{v}_1 + \cdots + h_n\mathbf{v}_n + (-1)\mathbf{v}$ è nulla ed ha lo scalare -1 che è non nullo. Quindi il sistema $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}]$ è linearmente dipendente, come volevamo dimostrare. □

Se, viceversa, abbiamo un sistema $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}]$ linearmente dipendente, allora non sempre si ha che $\mathbf{v}$ dipende da $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$.

Esempio 4.16. *Nello spazio vettoriale* $\mathbb{R}^2$ *consideriamo il sistema*

$$[(1,1),(2,2),(0,1)] \ .$$

Poiché abbiamo la combinazione

$$2(1,1)+(-1)(2,2)+0(0,1)$$

che è uguale al vettore nullo, allora il sistema è linearmente dipendente. Tuttavia l'ultimo vettore, $(0,1)$*, non dipende dai primi due. Infatti una qualunque combinazione*

$$h(1,1)+k(2,2)$$

dà un vettore del tipo $(h+2k,h+2k)$*, che ha le due componenti uguali tra loro. Quindi non può essere uguale ad* $(1,0)$*, che ha le due componenti diverse tra loro.*

Proposizione 4.17. *Sia* $[\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n]$ *un sistema di vettori linearmente dipendente di uno spazio vettoriale. Allora c'è almeno uno dei vettori che dipende dai rimanenti.*

Dimostrazione. Siccome il sistema $[\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n]$ è linearmente dipendente, allora esistono degli scalari $h_1,\dots,h_n$ non tutti nulli e tali che

$$h_1\mathbf{v}_1+\cdots+h_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0} \ .$$

Dire che gli scalari sono non tutti nulli vuol dire che c'è almeno uno scalare $h_i \neq 0$. Sommando ad entrambi i membri l'opposto di $h_i\mathbf{v}_i$ otteniamo

$$h_1\mathbf{v}_1+\cdots+h_{i-1}\mathbf{v}_{i-1}+h_{i+1}\mathbf{v}_{i+1}+\cdots+h_n\mathbf{v}_n=-h_i\mathbf{v}_i \ .$$

Moltiplicando entrambi i membri per $-\frac{1}{h_i}$ otteniamo

$$-\frac{h_1}{h_i}\mathbf{v}_1-\cdots-\frac{h_{i-1}}{h_i}\mathbf{v}_{i-1}-\frac{h_{i+1}}{h_i}\mathbf{v}_{i+1}-\cdots-\frac{h_n}{h_i}\mathbf{v}_n=\mathbf{v}_i \ .$$

Quindi il vettore $\mathbf{v}_i$ dipende dai rimanenti vettori $\mathbf{v}_1$, … , $\mathbf{v}_{i-1}$, $\mathbf{v}_{i+1}$, … , $\mathbf{v}_n$. □

Dunque in un sistema linearmente dipendente si può sempre trovare un vettore che dipende dagli altri. Anzi, di solito sono molti i vettori con questa proprietà; spesso addirittura tutti i vettori del sistema. Tuttavia, come abbiamo visto nell'esempio di prima, preso un vettore di un sistema linearmente dipendente, non possiamo essere sicuri che dipenda dagli altri. Un caso in cui invece si può essere sicuri è quello trattato nella seguente proposizione.

Proposizione 4.18. *Sia* V *uno spazio vettoriale, sia* $[\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n]$ *un sistema di vettori e sia* $\mathbf{v}$ *un vettore di* V*. Supponiamo che si abbia:*

- *il sistema* $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ *è linearmente indipendente;*
- *il sistema* $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}]$ *è linearmente dipendente.*

Allora il vettore $\mathbf{v}$ *dipende dal sistema* $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$.

Dimostrazione. Siccome il sistema $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}]$ è linearmente dipendente, allora esistono degli scalari non tutti nulli $h_1, \dots h_n, h$ tali che

$$h_1\mathbf{v}_1 + \cdots + h_n\mathbf{v}_n + h\mathbf{v} = \mathbf{0} \ .$$

Osserviamo per prima cosa che h deve essere diverso da zero. Infatti, supponiamo per assurdo $h = 0$. Poiché gli scalari $h_1, \dots h_n, h$ non possono essere tutti nulli abbiamo che gli scalari $h_1, \dots h_n$ non sono tutti nulli; d'altra parte se $h = 0$ otteniamo anche che

$$h_1\mathbf{v}_1 + \cdots + h_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \ .$$

Ma siccome il sistema $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ è linearmente indipendente questo è impossibile. Dunque $h \neq 0$.
Quindi, con passaggi simili a quelli della proposizione precedente, otteniamo

$$\mathbf{v} = -\frac{h_1}{h}\mathbf{v}_1 - \cdots - \frac{h_n}{h}\mathbf{v}_n \ ,$$

cioè il vettore $\mathbf{v}$ dipende dal sistema $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$. □

4.5. **Lemma di Steinitz.** La seguente proposizione viene detta *lemma di Steinitz.*

Proposizione 4.19. *Siano* $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m]$ *e* $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$ *sistemi di vettori di uno spazio vettoriale. Supponiamo che il sistema* $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m]$ *sia linearmente indipendente e che ogni suo vettore dipenda dall'altro sistema* $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$. *Allora deve essere necessariamente* $m \leq n$.

Tralasciamo la dimostrazione.

4.6. **Basi.**

Definizione 4.20. *Sia* V *uno spazio vettoriale. Un* sistema di generatori (finito) *di* V *è un sistema di vettori* $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ *tale che ogni vettore di* V *dipenda da questo sistema.*

Esempio 4.21. *Il sistema* $[(1,0),(0,1)]$ *è un sistema di generatori di* $\mathbb{R}^2$. *Infatti se prendiamo un qualsiasi vettore* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *si ha:*

$$x(1,0) + y(0,1) = (x,0) + (0,y) = (x,y).$$

Quindi ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ *dipende da* $[(1,0),(0,1)]$.

Definizione 4.22. *Uno spazio vettoriale si dice* finitamente generato *se esiste un suo sistema di generatori (finito)* $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$.

Osservazione 4.23. *Sia V uno spazio vettoriale, sia $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m]$ un sistema linearmente indipendente e sia $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$ un sistema di generatori. Allora ogni vettore di $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m]$, come tutti i vettori di V, dipende dall'altro sistema $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$. Quindi per il lemma di Steinitz si ha che $m \leq n$.*

Dall'osservazione di sopra ricaviamo che in uno spazio vettoriale finitamente generato esiste un limite massimo per il numero di vettori di un sistema linearmente indipendente. Infatti, se lo spazio è finitamente generato, allora esiste un sistema di generatori $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$; dunque un qualunque sistema linearmente indipendente non può avere più di n vettori.

Definizione 4.24. *Sia V uno spazio vettoriale. Una* base *di V è un sistema di generatori linearmente indipendente. Un* riferimento vettoriale *è una n-upla di vettori $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ che (vista come sistema) sia una base.*

Proposizione 4.25. *In uno spazio vettoriale finitamente generato una base esiste sempre.*

Dimostrazione (cenno). Poiché V è finitamente generato, esiste un sistema di generatori $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$. Se questo sistema è linearmente indipendente, allora abbiamo trovato una base.
Se invece il sistema è linearmente dipendente, per la proposizione 4.17 esiste un vettore $\mathbf{u}_i$ che dipende dagli altri. Se "togliamo" tale vettore dal sistema, otteniamo ancora un sistema di generatori. Infatti poiché un qualunque vettore $\mathbf{v} \in V$ è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$, e poiché il vettore $\mathbf{u}_i$ è a sua volta combinazione lineare dei rimanenti, sostituendo $\mathbf{u}_i$ nell'espressione che dà $\mathbf{v}$ è possibile ottenere $\mathbf{v}$ come una combinazione degli $\mathbf{u}$ che non coinvolge più $\mathbf{u}_i$.
Abbiamo ottenuto dunque un sistema di generatori "più piccolo". Se questo sistema è linearmente indipendente abbiamo trovato una base. Altrimenti, possiamo ripetere il ragionamento e togliere un altro vettore. Così procedendo, ad un certo punto dobbiamo per forza ottenere un sistema linearmente indipendente (se riusciamo a togliere tutti i vettori arriviamo al sistema vuoto, che è indipendente; se non ci riusciamo vuol dire che ci siamo dovuti fermare prima, cioè che abbiamo incontrato un sistema indipendente). Abbiamo dunque trovato un sistema di generatori linearmente indipendente, cioè una base, come volevamo dimostrare. □

Per gli spazi che non sono finitamente generati, esiste un risultato analogo. Per enunciarlo avremmo però bisogno di trattare i sistemi

infiniti di vettori. La cosa non è affatto difficile, però dobbiamo rinunciarvi per brevità.
Abbiamo visto che in uno spazio finitamente generato una base esiste sempre. In realtà, escluso casi molto particolari, di basi ce ne sono infinite. Il fatto sorprendente è che tutte le basi devono avere lo stesso numero di vettori. Vediamo perché.

Proposizione 4.26. *Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno lo stesso ordine.*

Dimostrazione. Consideriamo due basi qualsiasi,

$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m] \quad \text{e} \quad [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n] \ .$$

Poiché $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m]$ è linearmente indipendente e $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$ è un sistema di generatori, in base all'osservazione 4.23 otteniamo che $m \leq n$. Allo stesso modo, poiché $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$ è linearmente indipendente e $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m]$ è un sistema di generatori, otteniamo che $n \leq m$. Dunque $m = n$. $\square$

4.7. **Dimensione.**

Definizione 4.27. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato. Si definisce* dimensione *di V l'ordine di una qualunque sua base (proposizione 4.26). La dimensione di V si indica con*

$$\dim V \ .$$

Bisogna fare un po' di attenzione a non confondere la dimensione di V con il numero di vettori di V. A parte casi molto particolari, uno spazio vettoriale finitamente generato (sui reali) ha infiniti vettori, mentre la dimensione è il numero (finito) di vettori di una sua base.

4.8. **Componenti.**

Osservazione 4.28. *Sia $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ una base di uno spazio vettoriale V e sia $\mathbf{v}$ un vettore di V. Poiché $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ è un sistema di generatori, esistono scalari $x_1, \dots, x_n$ tali che*

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n \ .$$

Il fatto che $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ sia anche linearmente indipendente implica che gli scalari $x_1, \dots, x_n$ sono univocamente determinati, cioè sono gli unici possibili che (rispettivamente assegnati ai vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$) diano $\mathbf{v}$. Infatti, supponiamo che si abbia anche

$$\mathbf{v} = y_1\mathbf{v}_1 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n$$

per certi scalari $y_1, \dots, y_n$. *Allora abbiamo*

$$\mathbf{v} - \mathbf{v} = (x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n) - (y_1\mathbf{v}_1 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n) \ .$$

Ma $\mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$, *e con un po' di semplici passaggi otteniamo che*

$$(x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n) - (y_1\mathbf{v}_1 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n)$$

è uguale a

$$(x_1 - y_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (x_n - y_n)\mathbf{v}_n \ .$$

Dunque abbiamo

$$(x_1 - y_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (x_n - y_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \ .$$

Questa è una combinazione lineare nulla di $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ *con scalari*

$$(x_1 - y_1), \dots, (x_n - y_n) \ .$$

Siccome $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ *è linearmente indipendente, questi scalari sono nulli, cioè si deve avere*

$$x_1 = y_1 \ , \ \dots \ , \ x_n = y_n \ .$$

Quindi qualsiasi combinazione di $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ *che dia* $\mathbf{v}$ *deve essere fatta con gli scalari uguali a* $x_1, \dots, x_n$.

Se abbiamo un riferimento vettoriale, quindi con i vettori di una base "organizzati in una n-upla", allora gli scalari che danno $\mathbf{v}$ formano anch'essi una ben determinata n-upla.

Definizione 4.29. *Sia* $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ *un riferimento vettoriale di uno spazio vettoriale* V *e sia* $\mathbf{v}$ *un vettore di* V. *L'unica* n*-pla di scalari* $(x_1, \dots, x_n)$ *tale che*

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$$

si dice n*-pla delle* componenti *di* $\mathbf{v}$ *rispetto al riferimento vettoriale* $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Bisogna stare un po' attenti quando V è uguale allo spazio $\mathbb{R}^n$. Se infatti $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}$ è una base, allora le componenti di $(a_1, \dots, a_n)$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono in generale diverse dalle componenti di $(a_1, \dots, a_n)$ intese nel senso della definizione 1.18 (cioè i numeri a_1, …, a_n).

4.9. **Base standard.** Consideriamo i vettori numerici di $\mathbb{R}^n$ dati dalle righe (o anche dalle colonne) della matrice identica I_n:

$$(1,0,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,0,1)\ .$$

Se $n=2$, abbiamo il sistema incontrato nell'esempio 4.21, e abbiamo visto che è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^2$. Allo stesso modo, in generale il sistema

$$[\,(1,0,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,0,1)\,]$$

è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$. Poiché è anche linearmente indipendente, esso costituisce una base di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 4.30. *Il sistema*

$$[\,(1,0,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,0,1)\,]$$

si dice base standard *di* $\mathbb{R}^n$. *La* n*-upla*

$$\big(\,(1,0,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,0,1)\,\big)$$

si dice riferimento vettoriale standard *di* $\mathbb{R}^n$.

Osservazione 4.31. *Dato che la base standard di* $\mathbb{R}^n$ *ha ordine* n*, la dimensione di* $\mathbb{R}^n$ *è* n *(come ci si aspetterebbe).*

Notiamo inoltre che le componenti di un vettore $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ *rispetto al riferimento vettoriale standard sono proprio le componenti intese nel senso della definizione 1.18, cioè* $a_1,\dots,a_n$.

4.10. **Sottospazi.**

Definizione 4.32. *Sia* V *uno spazio vettoriale. Un sottoinsieme non vuoto* W *di* V *sarà detto* sottospazio *(vettoriale) se sono verificati i seguenti fatti.*

- $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\in W \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2\in W$*;*
- $r\in\mathbb{R},\mathbf{w}\in W \quad\Longrightarrow\quad r\mathbf{w}\in W$*.*

Osservazione 4.33. *Ogni sottospazio* W *di uno spazio* V*, contiene il vettore nullo di* V*. Infatti, essendo non vuoto, ha almeno un vettore* $\mathbf{w}$*, e allora* $\mathbf{0}=0\mathbf{w}\in W$*, per la proposizione 4.7.*
Inoltre, per ogni $\mathbf{w}\in W$*, anche l'opposto* $-\mathbf{w}\in W$*, perché* $-\mathbf{w}=(-1)\mathbf{w}$*, sempre per la proposizione 4.7.*

Osservazione 4.34. *Se* W *è un sottospazio di* V*, utilizzando l'addizione e la moltiplicazione per scalari definite su* V *possiamo definire le restrizioni su* W*:*

$$\begin{array}{ccc} W\times W & \to & W \\ (\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2) & \mapsto & \mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2 \end{array}$$

e
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times W & \to & W \\ (h,\mathbf{w}) & \mapsto & h\mathbf{w}. \end{array}$$
Poiché le proprietà richieste per gli spazi vettoriali valgono "in tutto V", a maggior ragione valgono in W.
Dunque il sottospazio W, dotato delle due operazioni ora introdotte, è uno spazio vettoriale, e il suo vettore nullo è lo stesso vettore nullo di V.

Proposizione 4.35. *Sia $S = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ un sistema di vettori di uno spazio vettoriale V. L'insieme dei vettori che dipendono da S è un sottospazio vettoriale di V.*

Tralasciamo la (facilissima) dimostrazione.

Definizione 4.36. *Sia $S = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ un sistema di vettori di uno spazio vettoriale V. L'insieme dei vettori che dipendono da S si dice* sottospazio generato *da S, e si indica generalmente con $L(S)$ o con $\langle S\rangle$.*

Osservazione 4.37. *Se S è un sistema di vettori di uno spazio V si ha*
$$S \text{ è un sistema di generatori di } V \iff \langle S\rangle = V\ .$$

Esempio 4.38. *Sia W l'insieme delle coppie $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tali che $x=y$. Allora W è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.*

Proposizione 4.39. *Se $(W_i)_{i\in I}$ è una famiglia di sottospazi di un spazio V, allora l'intersezione*
$$\bigcap_{i\in I} W_i$$
è un sottospazio di V.

Dimostrazione. Chiaramente $W := \bigcap_{i\in I} W_i$ è un sottoinsieme di V, ed è non vuoto perché $\mathbf{0}\in W$. Prendiamo $\mathbf{w},\mathbf{w}'\in W$ ed $r\in\mathbb{R}$. Comunque si prenda un indice $i\in I$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{w}'$ devono appartenere a W_i, che è un sottospazio; quindi $\mathbf{w}+\mathbf{w}'$ ed $r\mathbf{w}$ appartengono ad W_i. E dunque $\mathbf{w}+\mathbf{w}'$ ed $r\mathbf{w}$ appartengono all'intersezione W. Questo prova che W è un sottospazio. □

Definizione 4.40. *Se $(W_i)_{i\in I}$ è una famiglia di sottospazi di un spazio vettoriale, allora l'intersezione di tutti i sottospazi che contengono il sottoinsieme*
$$\bigcup_{i\in I} W_i$$

si dice che è il sottospazio somma *della famiglia* $(W_i)_{i\in I}$, *e si può denotare con*

$$\sum_{i\in I} W_i \ .$$

Nel caso di una n-upla $(W_1, \dots, W_n)$ *si può usare anche la notazione per esteso*

$$W_1 + \cdots + W_n$$

per il sottospazio somma.

Proposizione 4.41. *Siano* W_1, W_2 *sottospazi di uno spazio vettoriale. Allora si ha*

$$W_1 + W_2 = \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \,|\, \mathbf{w}_1 \in W_1 \text{ e } \mathbf{w}_2 \in W_2\} \ .$$

Dimostrazione. Poniamo $W := \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \,|\, \mathbf{w}_1 \in W_1 \text{ e } \mathbf{w}_2 \in W_2\}$ e dimostriamo che è uguale a $W_1 + W_2$, cioè all'intersezione di tutti i sottospazi che contengono $W_1 \cup W_2$.

Se un qualunque sottospazio U contiene $W_1 \cup W_2$, un qualunque elemento di W, che per definizione è del tipo $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ con $\mathbf{w}_1 \in W_1$ e $\mathbf{w}_2 \in W_2$ deve appartenere ad U, perché $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ appartengono ad U ed U è un sottospazio. Quindi ogni sottospazio che contiene $W_1 \cup W_2$, contiene anche W. Dunque W è contenuto nell'intersezione di tutti questi sottospazi, cioè in $W_1 + W_2$.

Ma si verifica facilmente che W è anche lui un sottospazio che contiene $W_1 \cup W_2$. Quindi W contiene $W_1 + W_2$ che è l'intersezione di *tutti* i sottospazi che contengono $W_1 \cup W_2$.

Avendo visto che $W \subseteq W_1 + W_2$ e $W \supseteq W_1 + W_2$, concludiamo che $W = W_1 \cup W_2$, come volevamo. □

Proposizione 4.42. *Siano* W_1, W_2 *sottospazi di uno spazio vettoriale. Se* $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ *allora per ogni* $\mathbf{w} \in W_1 + W_2$ *esiste un'unica coppia* $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in W_1 \times W_2$ *tale che* $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$.

Dimostrazione. Per la proposizione 4.41 sappiamo che c'è una coppia $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in W_1 \times W_2$ tale che $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$. Supponiamo che anche per un'altra coppia $(\mathbf{w}_1', \mathbf{w}_2') \in W_1 \times W_2$ si abbia $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1' + \mathbf{w}_2'$. Allora

$$(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_1') + (\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_2') = (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) - (\mathbf{w}_1' + \mathbf{w}_2') = \mathbf{w} - \mathbf{w} = \mathbf{0} \ ,$$

da cui

$$\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_2' = -\left(\mathbf{w}_1' - \mathbf{w}_1\right) \ .$$

Ma siccome $\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_2' \in W_2$ e $-\left(\mathbf{w}_1' - \mathbf{w}_1\right) \in W_1$, visto che sono lo stesso vettore, questo deve essere un vettore dell'intersezione $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$. E allora

$$\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_2' = -\left(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_1'\right) = \mathbf{0} \ .$$

Concludiamo che $\mathbf{w}_1' = \mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2' = \mathbf{w}_2$, cioè $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in W_1 \times W_2$ è l'unica possibile coppia tale che $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$. $\square$

Definizione 4.43. *Siano W_1, W_2 sottospazi di uno spazio vettoriale. Se $W_1 \cap W_1 = \{\mathbf{0}\}$ allora si dice che la somma $W_1 + W_2$ è* diretta*, e si può anche indicare con $W_1 \oplus W_2$.*

Menzioniamo anche che i risultati sulla decomposizione in somma ora visti per due sottospazi W_1 e W_2, possono essere estesi al caso generale di una famiglia di sottospazi $(W_i)_{i \in I}$. Per avere poi un'unica decomposizione, e quindi una somma diretta, ci vuole la condizione che per ogni i si abbia

$$W_i \cap \sum_{j \in I \smallsetminus \{i\}} W_j = \{\mathbf{0}\} \ .$$

Esiste poi anche una nozione "esterna" di somma diretta di due spazi vettoriali qualunque (che non siano cioè sottospazi di uno stesso spazio). Basta osservare quanto segue.

Osservazione 4.44. *Se V_1 e V_2 sono spazi vettoriali (sui reali), allora il prodotto cartesiano $V_1 \times V_2$, insieme alle operazioni date da*

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2') := (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1', \mathbf{v_2} + \mathbf{v}_2')$$

e

$$r\,(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) := (r\mathbf{v}_1, r\mathbf{v}_2) \ ,$$

è uno spazio vettoriale (sui reali).

Definizione 4.45. *Lo spazio vettoriale presentato nell'osservazione precedente, viene detto* somma diretta *(esterna) degli spazi V_1 e V_2 e viene anche questo denotato con $V_1 \oplus V_2$.*

Nel caso di due sottospazi W_1, W_2 con intersezione $\{\mathbf{0}\}$, la somma diretta come sottospazio non è a rigore uguale alla somma diretta esterna. È comunque vero che ogni vettore del sottospazio somma diretta è del tipo $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ per un'unica coppia $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ e, viceversa, ovviamente per ogni $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ nella somma diretta esterna c'è un unico vettore $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ nel sottospazio somma diretta.

4.11. **Formula di Grassmann.**

Proposizione 4.46. *Sia W un sottospazio di uno spazio finitamente generato V. Allora anche W è finitamente generato e si ha*

$$\dim W \leq \dim V \ .$$

Dimostrazione. Detta n la dimensione di V, per il lemma di Steinitz un sistema indipendente di vettori di V non può avere più di n vettori. Possiamo quindi considerare, tra tutti i sistemi linearmente indipendenti di vettori di W, uno che abbia l'ordine il più grande possibile, diciamo $[\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m]$ (e avremo comunque $m \leq n$). Dunque se $\mathbf{w}$ è un qualunque vettore di W, il sistema $[\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m, \mathbf{w}]$ è linearmente dipendente. Per la proposizione 4.18, $\mathbf{w}$ dipende da $[\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m]$. Dunque $[\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m]$ è una base di W. Quindi W è finitamente generato e ha dimensione $m \leq n = \dim V$. $\square$

La formula nella seguente proposizione viene detta *formula di Grassmann.*

Proposizione 4.47. *Siano W_1, W_2 sottospazi di uno spazio vettoriale. Se W_1, W_2 sono finitamente generati, anche $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$ sono finitamente generati e si ha*

$$\dim (W_1 \cap W_2) + \dim (W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 \,.$$

Tralasciamo per il momento la dimostrazione.

4.12. **Spazi di vettori liberi.** Esempi importanti di sottospazi sono forniti dalla geometria dello spazio ordinario. Prima di esporli, facciamo la seguente semplice osservazione.

Osservazione 4.48. *Sia X una retta o un piano, sia A un punto di X e sia $\mathbf{v}$ un vettore libero. Allora*

$$\mathbf{v} \text{ è parallelo ad } X \iff A + \mathbf{v} \in X \,.$$

Infatti, se $\mathbf{v}$ è il vettore nullo la cosa è ovvia (le condizioni sono entrambe vere); se invece $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, posto $B = A + \mathbf{v}$, siccome la retta r_{AB} ha in comune con X il punto A, essa è parallela ad X se e solo se lo è impropriamente, e quindi se e solo se $B \in X$.

Esempio 4.49. *Sia $\mathcal{V}$ lo spazio dei vettori liberi ordinari, sia X una retta o un piano e sia $\mathcal{W}$ l'insieme dei vettori paralleli ad X.*

Siccome l'insieme $\mathcal{W}$ contiene sicuramente il vettore nullo, esso è non vuoto.

Se $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathcal{W}$ allora, scelto un qualunque punto $A \in X$ si ha che $(A + \mathbf{w}_1) + \mathbf{w}_2 \in X$, quindi $A + (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) \in X$ e dunque $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in \mathcal{W}$.

Inoltre, per definizione di prodotto per un numero $r \in \mathbb{R}$, il vettore $r\mathbf{w}_1$ è parallelo a $\mathbf{w}_1$, e dunque è parallelo ad X. Quindi $r\mathbf{w}_1 \in \mathcal{W}$.

Questo prova che $\mathcal{W}$ è un sottospazio di $\mathcal{V}$.

Osservazione 4.50. *Sia* $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ *un vettore libero ordinario. Per definizione del prodotto per un numero reale* h, $h\mathbf{u}$ *è parallelo a* $\mathbf{u}$. *Se, viceversa,* $\mathbf{v}$ *è un vettore libero parallelo a* $\mathbf{u}$, *prendendo*

$$h = \begin{cases} \frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|} & \text{se } \mathbf{u} \text{ e } \mathbf{v} \text{ sono concordi,} \\ \\ -\frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|} & \text{se } \mathbf{u} \text{ e } \mathbf{v} \text{ non sono concordi.} \end{cases}$$

abbiamo $\mathbf{v} = h\mathbf{u}$. *Notiamo pure che questo equivale a dire che* $\mathbf{v}$ *dipende dal sistema* $[\mathbf{u}]$.
In conclusione, dato un vettore libero non nullo $\mathbf{u}$ *abbiamo*

$$\mathbf{v} \text{ parallello a } \mathbf{u} \iff \exists h \mid \mathbf{v} = h\mathbf{u} \iff \mathbf{v} \text{ dipende dal sistema } [\mathbf{u}] \,.$$

Proposizione 4.51. *Sia* $\mathcal{V}$ *lo spazio dei vettori liberi ordinari, sia* r *una retta e sia* $\mathcal{W}$ *lo spazio dei vettori paralleli ad* r. *Allora*

$$\dim \mathcal{W} = 1 \,.$$

Dimostrazione. Presi punti distinti $A, B \in r$, il vettore $\mathbf{u} := B - A$ è non nullo ed appartiene a $\mathcal{W}$. Dunque $[\mathbf{u}]$ è un sistema linearmente indipendente di $\mathcal{W}$.

Se $\mathbf{v}$ è un qualunque vettore di $\mathcal{W}$, essendo parallelo ad r, è parallelo anche a $\mathbf{u}$. E allora per l'osservazione 4.50, $\mathbf{v}$ dipende da $[\mathbf{u}]$. Dunque $[\mathbf{u}]$ è anche un sistema di generatori, e quindi una base, di $\mathcal{W}$.

In conclusione, $\dim \mathcal{W} = 1$ perché ha una base di ordine 1. □

Osservazione 4.52. *Siano* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *vettori liberi ordinari.*
Supponiamo per il momento che $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *siano paralleli. Se* $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, *allora per l'osservazione 4.50 e la proposizione 4.15 il sistema* $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ *è linearmente dipendente. Se* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, *il sistema* $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ *è ovviamente linearmente dipendente.*
Se viceversa $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ *è linearmente dipendente allora, per la proposizione 4.17 e l'osservazione 4.50,* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *devono essere paralleli.*
In conclusione

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \text{ linearmente dipendente} \iff \mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ paralleli.}$$

Proposizione 4.53. *Sia* $\mathcal{V}$ *lo spazio dei vettori liberi ordinari, sia* π *un piano e sia* $\mathcal{W}$ *lo spazio dei vettori paralleli a* π. *Allora*

$$\dim \mathcal{W} = 2 \,.$$

Dimostrazione. Possiamo certamente fissare due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ non paralleli tra loro, e paralleli a π (ad esempio prendendo $P, Q, R \in \pi$ non allineati e ponendo $\mathbf{u} := Q - P$ e $\mathbf{v} := R - P$). Per l'osservazione 4.52 il sistema $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ è linearmente indipendente.

Sia poi $\mathbf{w}$ un qualunque vettore di $\mathcal{W}$, cioè parallelo a π. Fissiamo un punto $A \in \pi$. Per l'osservazione 4.48, il punto

$$B := A + \mathbf{w}$$

appartiene a π. Consideriamo la retta r passante per A e parallela a $\mathbf{u}$, e la retta s passante per B e parallela a $\mathbf{v}$. Poiché $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli a π, queste rette sono parallele a π, ed passando ciascuna per un punto di π, devono essere tutte contenute in π. Siccome $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ non sono paralleli tra loro, anche r ed s non sono parallele, ed essendo contenute in uno stesso piano (π) si devono intersecare in un (unico) punto O.

Poiché $O - A$ è parallelo a $\mathbf{u}$ (e $\mathbf{u}$ è non nullo), esiste uno scalare h tale che

$$O - A = h\mathbf{u} .$$

Analogamente, esiste k tale che

$$B - O = k\mathbf{v} .$$

Quindi

$$\mathbf{w} = B - A = (O - A) + (B - O) = h\mathbf{u} + k\mathbf{v} .$$

Dunque $\mathbf{w}$ dipende da $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$. Questo prova che il sistema $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ (oltre ad essere linearmente indipendente) è anche un sistema di generatori di $\mathcal{W}$; quindi è una base di $\mathcal{W}$.

In conclusione, $\dim \mathcal{W} = 2$ perché ha una base di ordine 2. □

Proposizione 4.54. *Sia $\mathcal{V}$ lo spazio dei vettori liberi ordinari. Allora*

$$\dim \mathcal{V} = 3 .$$

Dimostrazione (cenno). Prendiamo un piano π, un punto $O \in \pi$, un punto $P \notin \pi$ e due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ paralleli a π, ma non paralleli tra loro. Il sistema $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ è una base per lo spazio dei vettori paralleli a π. Dunque se $\mathbf{c}$ è una qualsiasi combinazione lineare del sistema $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$, allora $\mathbf{c}$ è parallelo a π e di conseguenza $O + \mathbf{c} \in \pi$ per l'osservazione 4.48. Poiché invece $P \notin \pi$, abbiamo che il vettore $\mathbf{w} := P - O$ non dipende da $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$. Per la proposizione 4.18, $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ è linearmente indipendente.

Sia poi $\mathbf{z}$ un qualunque vettore libero. Poniamo $Q := O + \mathbf{z}$ e sia r la retta per Q parallela a $\mathbf{w}$. Poiché r non è parallela a π, interseca π in un (solo) punto H. Abbiamo che $Q - H$ è parallelo a $\mathbf{w}$ e $H - O$ è parallelo a π. Da ciò ricaviamo che $H - 0 = h\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ per certi scalari h, k, e $Q - H = l\mathbf{w}$ per un certo scalare l. Quindi

$$\mathbf{z} = Q - O = (H - O) + (Q - H) = h\mathbf{u} + k\mathbf{v} + l\mathbf{w} .$$

Questo prova che il sistema $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ (oltre ad essere linearmente indipendente) è anche un sistema di generatori di $\mathcal{V}$; quindi è una base di $\mathcal{V}$.

In conclusione, $\dim \mathcal{V} = 3$ perché ha una base di ordine 3. □

5. Applicazioni lineari

Definizione 5.1. *Siano V e W spazi vettoriali. Un'applicazione*

$$f : V \longrightarrow W$$

si dice lineare *se comunque si prendano vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ e uno scalare h, si ha*

- $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2)$,
- $f(h\mathbf{v}_1) = hf(\mathbf{v}_1)$.

Le applicazioni lineari vengono anche dette omomorfismi.

Un'applicazione lineare con insieme d'arrivo $\mathbb{R}$ viene anche detta forma lineare.

Esempio 5.2. Questo esempio non è richiesto per l'esame. *Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}$ e l'applicazione*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$f(x) = x^2$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Poiché $f(1+1) = 4$ e $f(1) + f(1) = 2$, abbiamo $f(1+1) \neq f(1) + f(1)$. Dunque f non è *un'applicazione lineare.*

Esempio 5.3. Questo esempio non è richiesto per l'esame. *Consideriamo la funzione*

$$\ell : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

data da

$$\ell(x, y, z) = 2x - y + 3z$$

per tutti i vettori $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Prendiamo due vettori qualunque $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ in $\mathbb{R}^3$, e un qualunque scalare h. Si ha

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) = \ell(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = 2(x_1+x_2)-(y_1+y_2)+3(z_1+z_2) = \\ = 2x_1 + 2x_2 - y_1 - y_2 + 3z_1 + 3z_2 \end{aligned}$$

e

$$\ell(\mathbf{v}_1) + \ell(\mathbf{v}_2) = 2x_1 - y_1 + 3z_1 + 2x_2 - y_2 + 3z_2$$

Per le proprietà commutativa e associativa dell'addizione in $\mathbb{R}$, abbiamo subito che i due valori ottenuti per $\ell(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$ ed $\ell(\mathbf{v}_1) + \ell(\mathbf{v}_2)$ sono uguali. Dunque

- $\ell(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \ell(\mathbf{v}_1) + \ell(\mathbf{v}_2)$.

Inoltre si ha

$\ell(h\mathbf{v}_1) = \ell(hx_1, hy_1, hz_1) = 2hx_1 - hy_1 + 3hz_1 = h(2x_1 - y_1 + 3z_1) = h\ell(\mathbf{v}_1)$,

dunque

- $\ell(h\mathbf{v}_1) = h\ell(\mathbf{v}_1)$.

Valgono dunque le due proprietà necessarie ad affermare che ℓ è un'applicazione lineare.

Esempio 5.4. Questo esempio non è richiesto per l'esame. *Consideriamo la funzione*

$$l : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

data da

$$l(x, y, z) = 2x - y + 3z + 5$$

per tutti i vettori $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Presi $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 0)$ abbiamo

$$l(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = l(1, 0, 0) = 7$$

e

$$l(\mathbf{v}_1) + l(\mathbf{v}_2) = 7 + 5 = 12 ,$$

dunque

$$l(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \neq l(\mathbf{v}_1) + l(\mathbf{v}_2).$$

Quindi l'applicazione l non è *lineare.*

In qualche testo è possibile trovare il termine "polinomio lineare" per indicare un polinomio di primo grado. In questo caso bisogna stare attenti, perché se tale polinomio non ha il termine noto nullo (non è omogeneo), allora non definisce un'applicazione lineare.

Esempio 5.5. Questo esempio non è richiesto per l'esame. *Sia $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ un vettore numerico e sia $\phi_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'applicazione che a ciascun $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ associa il prodotto scalare standard $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$:*

$$\phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} .$$

Per le proprietà del prodotto scalare standard (proposizione 3.11), si ha subito che $\phi_{\mathbf{a}}$ è un'applicazione lineare.

Esempio 5.6. Questo esempio non è richiesto per l'esame. *Sia*

$$(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$

e sia

$$\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

la funzione data da

$$\ell(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n ,$$

per tutti i vettori $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *(l'esempio 5.3 è il caso particolare in cui* $n = 3$, $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $a_3 = 3$*). Allora* ℓ *è un'applicazione lineare. Infatti, con la notazione dell'esempio 5.5, abbiamo* $\ell = \phi_{(a_1,\dots,a_n)}$*, che abbiamo visto che è lineare.*

Esempio 5.7. *Sia* $\mathcal{V}$ *lo spazio dei vettori liberi ordinari, sia* $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$ *e sia*

$$\phi_{\mathbf{w}} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$$

l'applicazione che a ciascun $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ *associa il prodotto scalare* $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$*:*

$$\phi_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) := \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \ .$$

Per le proprietà del prodotto scalare (vedi la sottosezione 2.8), $\phi_{\mathbf{w}}$ *è un'applicazione lineare.*

Esempio 5.8. *Sia* $\mathcal{V}$ *lo spazio dei vettori liberi, sia* $\mathbf{w}$ *un versore e sia*

$$\pi_{\mathbf{w}} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$

l'applicazione che a ciascun $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ *associa* $(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$*.*

Per le proprietà del prodotto scalare e del prodotto esterno di numeri per vettori, $\pi_{\mathbf{w}}$ *è un'applicazione lineare.*

Tenendo presente la definizione del prodotto scalare (e il fatto che $\mathbf{w}$ è un versore) non è difficile capire il significato geometrico dell'applicazione $\pi_{\mathbf{w}}$ introdotta nell'esempio qui sopra. Presa una retta r parallela a $\mathbf{w}$, posto $\mathbf{v} = B - A$, detta A' la proiezione ortogonale di A su r (cioè l'intersezione di r con una perpendicolare ad r passante per A) e detta B' la proiezione ortogonale di B su r, si ha

$$\pi_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) = B' - A' \ .$$

Dunque $\pi_{\mathbf{w}}$ è una "proiezione ortogonale vettoriale".

Esempio 5.9. *Sia* V *uno spazio vettoriale di dimensione* n *e sia* $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ *un suo riferimento vettoriale. Se un vettore* $\mathbf{v}$ *ha componenti* $(x_1, \dots, x_n)$*, si ha per definizione*

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n \ .$$

Se $\mathbf{w}$ *è un altro vettore e* $(y_1, \dots, y_n)$ *sono le sue componenti, si ha*

$$\begin{aligned}\mathbf{v} + \mathbf{w} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n + y_1\mathbf{v}_1 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n = \\ = (x_1 + y_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (x_n + y_n)\mathbf{v}_n \ .\end{aligned}$$

Dunque il vettore delle componenti di $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ *è* $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$*, che è proprio uguale a*

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) \ .$$

In maniera simile si vede subito che se h è un qualunque scalare, il vettore delle componenti di $h\mathbf{v}$ è $h(x_1, \ldots, x_n)$.

Concludiamo che l'applicazione

$$c_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}^n$$

che ad ogni vettore di $\mathbf{v}$ associa il vettore numerico delle sue componenti rispetto al riferimento vettoriale $\mathcal{B}$, è un'applicazione lineare.

Definizione 5.10. *L'applicazione $c_{\mathcal{B}}$ definita nell'esempio precedente verrà detta* coordinazione *rispetto a $\mathcal{B}$.*

Esempio 5.11. *Sia V uno spazio vettoriale e sia r uno scalare. Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono vettori qualsiasi e h è un qualsiasi scalare, per le proprietà della moltiplicazione di scalari per vettori si ha*

$$r(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = r\mathbf{v}_1 + r\mathbf{v}_2$$

e

$$r(h\mathbf{v}_1) = (rh)\mathbf{v}_1 = h(r\mathbf{v}_1) \; .$$

Questo dimostra che l'applicazione

$$\omega_r : V \longrightarrow V$$

che ad ogni vettore $\mathbf{v}$ associa $r\mathbf{v}$ è un'applicazione lineare.

Se, nella situazione dell'esempio ora visto, V è lo spazio dei vettori liberi, l'applicazione ω_r si può facilmente visualizzare: se $r \geq 0$, ω_r consiste nel contrarre ($r < 1$) o dilatare ($r > 1$) i vettori; se $r < 0$ l'applicazione, oltre a questi effetti, ha quello di cambiare il verso.

Nel caso dei vettori numerici, l'applicazione ora vista consiste nel moltiplicare per r tutte le componenti. Cosa succede se invece di moltiplicarle tutte, ne moltiplichiamo solo alcune (ad esempio, solo la prima)?

Esempio 5.12. Questo esempio non è richiesto per l'esame. *Sia r uno scalare. L'applicazione*

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

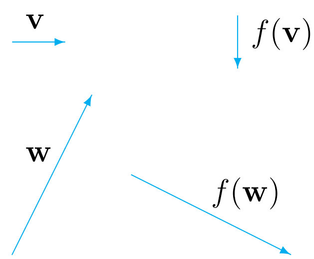
data da

$$(x, y) \mapsto (rx, y)$$

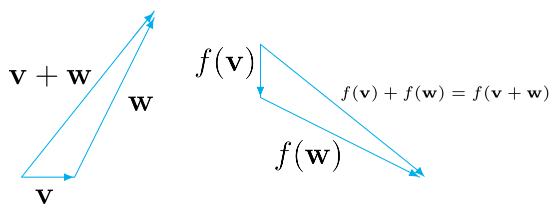
è lineare per l'esempio 5.6.

Se interpretiamo i vettori numerici come vettori delle componenti di vettori geometrici paralleli ad un piano, l'esempio ora visto dà luogo ad un'applicazione lineare che si può visualizzare immaginando di dilatare (o contrarre) il piano "tirandolo" lungo l'asse x.

Continuando a parlare in maniera informale, se "ruotiamo" un piano (ad esempio, di 90 gradi) diamo luogo ad un'applicazione tra vettori paralleli al piano, come illustrato nella figura qui di seguito:



È abbastanza evidente che tale applicazione è lineare (vedi figura qui sotto).



Tralasciamo di precisare quanto appena detto e di dare una definizione formale dell'applicazione ora descritta.

Esempio 5.13. *Sia A una matrice di tipo $m \times n$. Ricordando che $\mathbb{R}^{m\times p}$ e $\mathbb{R}^{n\times p}$ sono gli spazi delle matrici sui reali di tipo $m \times p$ ed $n \times p$, possiamo considerare l'applicazione*

$$\mathbb{R}^{n\times p} \to \mathbb{R}^{m\times p}$$

data da

$$M \longmapsto AM \ ,$$

cioè l'applicazione che ad ogni matrice M di tipo $n\times p$ associa il prodotto righe per colonne AM, che è una matrice di tipo $m \times p$.

Per le proprietà del prodotto righe per colonne (proposizione 3.19), comunque si prendano matrici $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^{n\times p}$ e uno scalare h, abbiamo

- $A(M_1 + M_2) = AM_1 + AM_2$
- $A(hM_1) = h(AM_1)$

Dunque l'applicazione considerata è lineare.

5.1. **Proprietà elementari delle applicazioni lineari.**

Proposizione 5.14. *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali. Allora si ha*

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

(qui abbiamo indicato con lo stesso simbolo $\mathbf{0}$ *i vettori nulli di* V *e* W*).*

Dimostrazione. Tenendo presente la proposizione 4.7, abbiamo

$$f(\mathbf{0}) = f(0\mathbf{0}) = 0f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\ .$$

Oppure, più elementarmente, possiamo anche ragionare così:

$$f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0}) - f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}+\mathbf{0}) - f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) - f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\ .$$

□

Proposizione 5.15. *Sia* $f : V \to W$ *un'applicazione lineare tra spazi vettoriali. Allora per ogni vettore* $\mathbf{v} \in V$ *si ha*

$$f(-\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v})\ .$$

Dimostrazione. Tenendo presente la proposizione 4.7, abbiamo

$$f(-\mathbf{v}) = f((-1)\mathbf{v}) = (-1)f(\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v})\ .$$

Oppure, più elementarmente, possiamo anche ragionare così:

$$f(-\mathbf{v}) + f(\mathbf{v}) = f(-\mathbf{v}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\ ,$$

e dunque $f(-\mathbf{v})$ è l'opposto di $f(\mathbf{v})$, come volevamo. □

Proposizione 5.16. *Sia* $f : V \to W$ *un'applicazione lineare tra spazi vettoriali. Se* $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$ *è un sistema di vettori linearmente dipendente, allora anche* $[f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_n)]$ *è un sistema di vettori linearmente dipendente.*

Dimostrazione. Siccome $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$ è linearmente dipendente, esistono scalari $h_1, \dots, h_n$ non tutti nulli tali che

$$h_1\mathbf{u}_1 + \cdots + h_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}\ .$$

Dunque si ha

$$f(h_1\mathbf{u}_1 + \cdots + h_n\mathbf{u}_n) = f(\mathbf{0})\ .$$

Applicando varie volte le proprietà

- $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2)$
- $f(h\mathbf{v}_1) = hf(\mathbf{v}_1)$,

si ha

$$f(h_1\mathbf{u}_1 + \cdots + h_n\mathbf{u}_n) = h_1 f(\mathbf{u}_1) + \cdots h_n f(\mathbf{u}_n)\ .$$

Siccome per la proposizione 5.14 si ha anche $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, otteniamo

$$h_1 f(\mathbf{u}_1) + \cdots h_n f(\mathbf{u}_n) = \mathbf{0}\ .$$

Poiché gli scalari non sono tutti nulli, questo prova che $[f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_n)]$ è linearmente dipendente, come volevamo. □

Esempio 5.17. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *l'applicazione che ad ogni vettore di* $\mathbb{R}^2$ *associa il vettore nulllo* $(0,0,0)$. *Si verifica molto facilmente che* f *è lineare. Notiamo che il sistema*

$$[\ (1,0),(0,1)\ ]$$

è linearmente indipendente, mentre il sistema

$$[\ f((1,0)), f((0,1))\ ]\ ,$$

essendo costituito da vettori nulli, non è linearmente indipendente.

Possiamo dire che le applicazioni lineari conservano sempre la dipendenza (cfr. proposizione 5.16), ma non sempre conservano l'indipendenza (cfr. esempio 5.17).

Proposizione 5.18. *Siano* $f : V \to W$ *e* $g : W \to X$ *applicazioni lineari tra spazi vettoriali (sui reali). Allora l'applicazione composta* $g \circ f$ *è lineare.*

Dimostrazione. Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ vettori di V e h uno scalare. Si ha

$$(g \circ f)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = g\left(f\left(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\right)\right) \overset{f \text{ lineare}}{=} g\left(f\left(\mathbf{v}_1\right) + f\left(\mathbf{v}_2\right)\right) \overset{g \text{ lineare}}{=}$$

$$= g\left(f\left(\mathbf{v}_1\right)\right) + g\left(f\left(\mathbf{v}_2\right)\right) = (g \circ f)(\mathbf{v}_1) + (g \circ f)(\mathbf{v}_2)$$

e

$$(g \circ f)(h\mathbf{v}_1) = g\left(f\left(h\mathbf{v}_1\right)\right) \overset{f \text{ lineare}}{=} g\left(hf\left(\mathbf{v}_1\right)\right) \overset{g \text{ lineare}}{=} hg\left(f\left(\mathbf{v}_1\right)\right) =$$

$$= h(g \circ f)(\mathbf{v}_1)\ .$$

Quindi $g \circ f$ è lineare, come volevamo. □

Proposizione 5.19. *Sia* $f : V \to W$ *un'applicazione lineare biettiva. Allora l'applicazione inversa* $f^{-1} : W \to V$ *è lineare.*

Dimostrazione. Siano $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$ e $h \in \mathbb{R}$. Per definizione di applicazione inversa, per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ si ha

$$f^{-1}(f(\mathbf{v})) = \mathbf{v} \tag{4}$$

e per ogni vettore $\mathbf{w} \in W$ si ha

$$f(f^{-1}(\mathbf{w})) = \mathbf{w}\ . \tag{5}$$

Quindi si ha

$$f^{-1}(\mathbf{w_1}+\mathbf{w}_2) \overset{(5)}{=} f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(\mathbf{w_1})\right) + f\left(f^{-1}(\mathbf{w}_2)\right) \right) \overset{f \text{ lineare}}{=}$$
$$= f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(\mathbf{w_1}) + f^{-1}(\mathbf{w}_2) \right)\right) \overset{(4)}{=} f^{-1}(\mathbf{w_1}) + f^{-1}(\mathbf{w}_2)\ .$$

In maniera simile si dimostra che

$$f^{-1}(h\mathbf{w_1}) = hf^{-1}(\mathbf{w_1})\ .$$

Dunque f^{-1} è lineare. □

5.2. **Isomorfismi.**

Definizione 5.20. *Un'applicazione lineare e biettiva $f : V \to W$ viene detta* isomorfismo *tra V e W. Se esiste un tale isomorfismo, V e W vengono detti* isomorfi*.*

Esempio 5.21. *Sia V uno spazio vettoriale. L'applicazione identica*

$$\mathrm{id}_V : V \to V$$

(cioè l'applicazione che ad ogni vettore di V associa sé stesso) è un isomorfismo.

Osservazione 5.22. *Per la proposizione 5.19 si ha che l'inversa di un isomorfismo è ancora un isomorfismo.*

Osservazione 5.23. *Se $f : V \to W$ e $g : W \to X$ sono isomorfismi, per la proposizione 5.18, $g \circ f$ è un isomorfismo tra V e X.*

Osservazione 5.24. *La relazione "essere isomorfi" in un insieme di spazi vettoriali ha la proprietà riflessiva (per l'esempio 5.21), simmetrica (per l'osservazione 5.22) e transitiva (per l'osservazione 5.23). Dunque la relazione d'isomorfismo è una relazione d'equivalenza.*

Esempio 5.25. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ un suo riferimento vettoriale. Nell'esempio 5.9 abbiamo visto che l'applicazione*

$$c_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}^n$$

che ad ogni vettore di $\mathbf{v}$ associa il vettore numerico delle sue componenti rispetto a $\mathcal{B}$, è un'applicazione lineare. Poiché tale applicazione è anche biettiva (cfr. osservazione 4.28), essa è un'isomorfismo.

Osservazione 5.26. *Dall'esempio ora esposto deduciamo che un qualunque spazio vettoriale (sui reali) di dimensione n è isomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Proposizione 5.27. *Sia $f : V \to W$ un'isomorfismo tra spazi vettoriali. Se*

$$[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$$

è un sistema di vettori linearmente indipendente, allora anche

$$[f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)]$$

è un sistema di vettori linearmente indipendente.

Dimostrazione. Se per assurdo $[f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)]$ fosse linearmente dipendente, per le proposizioni 5.16 e 5.19 il sistema

$$\left[\ f^{-1}(f(\mathbf{v}_1)), \ldots, f^{-1}(f(\mathbf{v}_n))\ \right]$$

sarebbe linearmente dipendente, il che va contro l'ipotesi perché tale sistema è proprio $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$. Dunque $[f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)]$ deve essere per forza linearmente indipendente, come volevamo. □

Abbiamo quindi visto che, mentre un'applicazione lineare non sempre conserva l'indipendenza (cfr. esempio 5.17), un isomorfismo lo fa. In effetti gli isomorfismi conservano molte più cose! Parlando informalmente, se in uno spazio vettoriale V vale una proprietà $\mathcal{P}$, e questa proprietà $\mathcal{P}$ ha a che fare solo con le operazioni (di addizione e moltiplicazione per scalari), ma non con le caratteristiche "interne" dei singoli vettori, allora $\mathcal{P}$ vale anche in ogni spazio vettoriale isomorfo a V.

Osservazione 5.28. *Poiché gli isomorfismi conservano sia l'indipendenza che la dipendenza, se due spazi vettoriali sono isomorfi allora ciascuno è finitamente generato se e solo se lo è l'altro, e in tal caso devono avere la stessa dimensione.*
Viceversa, se due spazi vettoriali (finitamente generati) hanno la stessa dimensione, per le osservazioni 5.26 e 5.24, allora sono isomorfi.

5.3. **Nucleo e Immagine.**

Definizione 5.29. *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. L'insieme*

$$f^{-1}(\mathbf{0}) := \{\mathbf{v} \in V : f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

viene detto nucleo *di f, e viene indicato con*

$$\ker f\ .$$

L'insieme immagine di f, cioè l'insieme

$$\{f(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V\}$$

viene spesso detto semplicemente immagine *di f e viene denotato con*

$$\operatorname{im} f \ :$$

Proposizione 5.30. *Il nucleo di un'applicazione lineare f è un sottospazio del dominio, l'immagine di f è un sottospazio dello spazio d'arrivo.*

Dimostrazione. Per la proposizione 5.14, $\mathbf{0} \in \ker f$, e quindi $\ker f$ è non vuoto. Prendiamo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \ker f$. Allora $f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ e $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Quindi

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \ ,$$

e dunque $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \ker f$. Inoltre, per qualunque scalare r abbiamo

$$f(r\mathbf{u}) = rf(\mathbf{u}) = r\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

e quindi anche $r\mathbf{u} \in \ker f$. Questo dimostra che $\ker f$ è un sottospazio.

Poiché il dominio di f è non vuoto (contiene $\mathbf{0}$), anche $\operatorname{im} f$ deve essere non vuoto. Notiamo poi che comunque prendiamo $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ nel dominio, abbiamo $f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{u} + \mathbf{v})$. Quindi la somma di due vettori di $\operatorname{im} f$ è ancora un vettore di $\operatorname{im} f$. Inoltre, poiché per ogni scalare r, abbiamo $rf(\mathbf{u}) = f(r\mathbf{u})$, allora anche il prodotto di r per qualunque vettore di $\operatorname{im} f$ è ancora un vettore di $\operatorname{im} f$. Questo dimostra che $\operatorname{im} f$ è un sottospazio. □

Osservazione 5.31. *Se $f : V \to W$ è un'applicazione lineare iniettiva, essa dà luogo ad un isomorfismo*

$$\varphi : V \to \operatorname{im} f$$

(che agisce come f). Siccome φ conserva l'indipendenza, e siccome un sistema linearmente indipendente di vettori in $\operatorname{im} f$ è ovviamente ancora linearmente indipendente in W, otteniamo che f conserva l'indipendenza.

Dunque le applicazioni lineari iniettive conservano l'indipendenza.

Proposizione 5.32. *Un'applicazione lineare f è iniettiva se e solo se il suo nucleo è $\{\mathbf{0}\}$.*

Dimostrazione. Dato che il vettore nullo appartiene sempre al nucleo, se l'applicazione è iniettiva nessun altro vettore oltre al vettore nullo può appartenere al nucleo (altrimenti avremmo due vettori diversi con la stessa immagine). Dunque $\ker f = \{\mathbf{0}\}$.

Viceversa, supponiamo che $\ker f = \{\mathbf{0}\}$, e consideriamo due vettori distinti $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Siccome $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$, allora $\mathbf{v} - \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, e siccome $\ker f = \{\mathbf{0}\}$

allora abbiamo anche che

$$f(\mathbf{v}-\mathbf{w}) \neq \mathbf{0} \ .$$

Ma $f(\mathbf{v}-\mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{w})$ perché f è lineare, dunque $f(\mathbf{v}) \neq f(\mathbf{w})$. Questo dimostra che vettori distinti hanno sempre immagini distinte, e quindi che f è iniettiva. □

Particolarmente importante è il seguente teorema.

Proposizione 5.33. *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, e supponiamo che V sia finitamente generato. Allora anche il nucleo e l'immagine di f sono finitamente generati e si ha*

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V \ .$$

Dimostrazione. Il nucleo è finitamente generato per la proposizione 4.46. Poniamo

$$k = \dim \ker f, \qquad n = \dim V \ .$$

Consideriamo una base $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k]$ di $\ker f$, e prendiamo $n-k$ vettori, indicandoli con $\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$, tali che $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ sia una base di V (questo è sempre possibile farlo).

Siccome $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ è una base di V, per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esistono scalari $h_1, \ldots, h_n$ tali che

$$\mathbf{v} = h_1\mathbf{v}_1 + \cdots + h_n\mathbf{v}_n$$

e dunque

$$f(\mathbf{v}) = h_1 f(\mathbf{v}_1) + \cdots + h_n f(\mathbf{v}_n) = h_{k+1} f(\mathbf{v}_{k+1}) + \cdots + h_n f(\mathbf{v}_n) \ .$$

Dunque il sistema

$$\left[\, f(\mathbf{v}_{k+1}), \ldots, f(\mathbf{v}_n) \,\right]$$

è un sistema di generatori di $\operatorname{im} f$. L'immagine è quindi uno spazio finitamente generato.

Il sistema ora considerato è anche indipendente. Infatti se

$$\alpha_1 f(\mathbf{v}_{k+1}) + \cdots + \alpha_{n-k} f(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$$

allora

$$\alpha_1 \mathbf{v}_{k+1} + \cdots + \alpha_{n-k}\mathbf{v}_n$$

appartiene al nucleo. Siccome $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k]$ è una base del nucleo, esistono scalari $\beta_1, \ldots, \beta_k$ tali che

$$\alpha_1 \mathbf{v}_{k+1} + \cdots + \alpha_{n-k}\mathbf{v}_n = \beta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_k\mathbf{v}_k \ .$$

Portando tutto al primo membro e tenendo presente che $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ è una base di V, otteniamo che tutti gli α (come anche tutti i β) sono nulli.

Dunque la dimensione di $\operatorname{im} f$ è $n-k$, il che dimostra la formula enunciata. □

6. Strumenti di teoria degli spazi vettoriali

6.1. **Dipendenza lineare per vettori numerici.** Una conseguenza importante delle proprietà del determinante (vedi sottosezione 3.13) è che se in una matrice c'è una riga che dipende dalle altre, allora il determinante è zero. In altre parole abbiamo la seguente proposizione.

Proposizione 6.1. *Sia A una matrice quadrata sui reali. Se le righe di A sono linearmente dipendenti allora si ha*

$$|A| = 0.$$

Dimostrazione. Per la proposizione 4.17, c'è una riga $\mathbf{a}_i$ che dipende dalle altre, quindi:

$$\mathbf{a}_i = h_1\mathbf{a}_1 + \cdots + h_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} + h_{i+1}\mathbf{a}_{i+1} + \cdots + h_n\mathbf{a}_n \ ,$$

dove n indica l'ordine della matrice (e quindi il numero delle righe). Per le proposizioni 3.42 e 3.43 possiamo scomporre il determinante come segue:

$$|A| = h_1\,|A_1| + \cdots + h_{i-1}\,|A_{i-1}| + h_{i+1}\,|A_{i+1}| + \cdots + h_n\,|A_n| \ ,$$

dove per ogni $j \in \{1,\dots,n\} \smallsetminus \{i\}$, A_j indica la matrice ottenuta da A sostituendo la riga i-esima con $\mathbf{a}_j$. Quindi ciascuna di queste matrici ha due righe uguali, e per la proposizione 3.41 ha determinante nullo. Dunque $|A| = 0$. □

È possibile anche invertire questa proposizione; cioè si può dimostrare che se il determinante è uguale a zero, allora le righe sono linearmente dipendenti. C'è bisogno però di un po' di lavoro preliminare, che illustriamo qui di seguito.

Definizione 6.2. *Sia A una matrice sui reali di tipo $m \times n$ e sia $I = \{i_1,\dots,i_r\}$ un sottoinsieme di $\{1,\dots,m\}$. Supponiamo che il sistema di righe $[\mathbf{a}_{i_1},\dots,\mathbf{a}_{i_r}]$ sia linearmente indipendente. Supponiamo poi che per ogni altro sottoinsieme $I' = \{i'_1,\dots,i'_{r'}\}$ che contenga propriamente I (quindi in particolare si deve avere $r' > r$), il sistema $[\mathbf{a}_{i'_1},\dots,\mathbf{a}_{i'_{r'}}]$ sia linearmente dipendente.*

In questa situazione si dice che $[\mathbf{a}_{i_1},\dots,\mathbf{a}_{i_r}]$ è un sistema massimo *linearmente indipendente di righe di A. In maniera analoga si definisce un sistema massimo linearmente indipendente di colonne di A.*

Osservazione 6.3. *Sia* $[\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}]$ *un sistema massimo linearmente indipendente di righe di una matrice* A *e sia* $\mathbf{a}_i$ *un'altra riga (quindi* $i \notin \{i_1, \dots, i_r\}$*). Per definizione di sistema massimo, abbiamo che il sistema* $[\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}, \mathbf{a}_i]$ *è linearmente dipendente.*

Per la proposizione 4.18 si ha che la riga $\mathbf{a}_i$ *dipende dal sistema* $[\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}]$*. Inoltre, ovviamente anche le righe* $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$ *dipendono dal sistema stesso. Dunque ogni riga della matrice dipende dal sistema massimo* $[\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}]$*.*

Osservazione 6.4. *Viceversa, sia* $[\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}]$ *un sistema linearmente indipendente di righe di una matrice* A*, e supponiamo che ogni riga di* A *dipenda da questo sistema. Allora il sistema* $[\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}]$ *è sicuramente un sistema massimo.*

Infatti, per ogni altro sottoinsieme $I' = \{i'_1, \dots, i'_{r'}\}$ *che contenga propriamente* I*, il sistema* $[\mathbf{a}_{i'_1}, \dots, \mathbf{a}_{i'_{r'}}]$ *ha almeno una riga che dipende da alcune delle rimanenti; dunque, ragionando come per la proposizione 4.15, otteniamo che questo sistema è linearmente dipendente.*

Dalle due osservazioni appena fatte ricaviamo che i sistemi massimi linearmente indipendenti di righe sono esattamente i sistemi indipendenti di righe tali che ogni riga della matrice dipenda da loro.

Osservazione 6.5. *Per il lemma di Steinitz (proposizione 4.19) due sistemi massimi linearmente indipendenti di righe di una matrice hanno lo stesso numero di righe.*

Naturalmente, lo stesso vale per i sistemi massimi di colonne linearmente indipendenti.

Definizione 6.6. *Sia* A *una matrice sui reali di tipo* $m \times n$*, sia*

$$|A_{I,J}|$$

un suo minore e siano $i \in \{1, \dots, m\}$ *e* $j \in \{1, \dots, n\}$ *indici tali che*

$$i \notin I \text{ e } j \notin J.$$

Posto

$$I' = I \cup \{i\} \text{ e } J' = J \cup \{j\},$$

il minore

$$|A_{I',J'}|$$

sarà detto orlato *di* $|A_{I,J}|$ *(tramite* i *e* j*).*

Esempio 6.7. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -3 & -5 & -7 \end{pmatrix},$$

consideriamo il minore

$$A_{\{1,3\},\{2,3\}} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}$$

e cerchiamo i suoi orlati. Dobbiamo scegliere un $i \notin \{1,3\}$ *e un* $j \notin \{2,3\}$*; dunque* i *deve essere per forza* 2*, mentre* j *può essere sia* 1 *che* 4*. Dunque gli orlati del nostro minore sono*

$$A_{\{1,3,2\},\{2,3,1\}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} \quad e \quad A_{\{1,3,2\},\{2,3,4\}} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ -3 & -5 & -7 \end{vmatrix}.$$

Definizione 6.8. *Un* minore fondamentale *di una matrice sui reali è un minore non nullo tale che tutti i suoi orlati (se ce ne sono) sono nulli.*

La seguente proposizione viene detta *Teorema degli orlati.*

Proposizione 6.9. *Sia* A *una matrice sui reali e sia* $|A_{I,J}|$ *un minore fondamentale di* A*, con* $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$*,* $J = \{j_1, \ldots, j_r\}$*.*
Allora $[\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}]$ *è un sistema massimo di righe indipendenti di* A *e* $[\mathbf{a}^{j_1}, \ldots, \mathbf{a}^{j_r}]$ *è un sistema massimo di colonne indipendenti di* A*.*

Per brevità, dobbiamo rinunciare alla dimostrazione, che è un po' articolata.

I seguenti fatti sono facili conseguenze del teorema degli orlati (omettiamo però i dettagli dimostrativi).

Proposizione 6.10. *Se il determinante di una matrice quadrata sui reali è uguale a zero, allora le sue righe sono linearmente dipendenti (e le sue colonne sono linearmente dipendenti).*

Proposizione 6.11. *Dato un minore fondamentale di una matrice sui reali, tutti i minori di ordine maggiore sono nulli.*

Viceversa, se abbiamo un minore non nullo tale che tutti i minori di ordine maggiore sono nulli, ovviamente questo è un minore fondamentale (perché gli eventuali orlati hanno ordine maggiore). Dunque abbiamo che un minore fondamentale può anche essere caratterizzato come un minore che abbia ordine massimo possibile tra tutti i minori non nulli.

In particolare abbiamo che tutti i minori fondamentali hanno lo stesso ordine.

Un'altra conseguenza, importante quanto immediata, del teorema degli orlati è la seguente.

Proposizione 6.12. *Data una matrice, un sistema massimo di righe indipendenti e un sistema massimo di colonne indipendenti hanno lo stesso ordine.*

6.2. **Rango.** Ricapitoliamo le principali osservazioni fatte nella sottosezione precedente.

Osservazione 6.13. *Data una matrice A sui reali, possiamo dire che i seguenti numeri sono tutti uguali ad uno stesso numero r:*

- *il massimo ordine per i minori non nulli*
- *l'ordine di un minore fondamentale*
- *l'ordine di un sistema massimo di righe indipendenti*
- *l'ordine di un sistema massimo di colonne indipendenti*

Definizione 6.14. *Il numero r introdotto nell'osservazione precedente si chiama* rango *della matrice A. Esso sarà indicato con* $\operatorname{rk} A$.

Ci sono vari modi per trovare il rango di una matrice. Ne illustriamo uno con il seguente esempio.

Esempio 6.15. *Troviamo il rango della matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo di trovare un minore fondamentale. Partiamo dal minore non nullo

$$|A_{\{1\},\{1\}}| = |1| = 1.$$

Vediamo se per caso tutti i suoi orlati sono nulli. L'orlato tramite $i = 2$ e $j = 2$ è

$$|A_{\{1,2\},\{1,2\}}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

L'orlato tramite $i = 3$ e $j = 2$ è

$$|A_{\{1,3\},\{1,2\}}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

L'orlato tramite $i = 2$ e $j = 3$ è

$$|A_{\{1,2\},\{1,3\}}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 3.$$

Siccome questo orlato è non nullo, il minore $|A_{\{1\},\{1\}}|$ non è fondamentale. A questo punto però possiamo ripartire dal minore non nullo

$|A_{\{1,2\},\{1,3\}}|$. *Vediamo se i suoi orlati sono tutti nulli. L'unico orlato possibile è*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Dunque il minore

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$$

è un minore fondamentale. Siccome il suo ordine è 2, il rango di A è 2.

6.3. **Applicazioni lineari tra vettori numerici.** In questo paragrafo vogliamo individuare tutte le possibili applicazioni lineari che hanno come dominio e insieme d'arrivo degli spazi vettoriali numerici:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m .$$

Incominciamo a vedere un'esempio di tali applicazioni.

Esempio 6.16. *Sia A una matrice sui reali di tipo $m \times n$. Per ciascun vettore numerico $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_t)$ (con t qualunque, ad esempio $t = n$ oppure $t = m$), possiamo considerare la matrice di tipo $t \times 1$*

$$\mathbf{x}^{\mathrm{c}} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix} .$$

Abbiamo allora una ben definita applicazione

$$m_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

tale che

$$m_A(\mathbf{x})^{\mathrm{c}} = A \cdot \mathbf{x}^{\mathrm{c}} ,$$

e si verifica facilmente che è lineare (vedi esempio 5.13).

In sostanza, l'applicazione m_A consiste nella moltiplicazione per la matrice A, purché i vettori numerici "si scrivano in colonna" (cioè, più precisamente, si usino i "vettori colonna" $\mathbf{x}^{\mathrm{c}}$ al posto dei rispettivi $\mathbf{x}$).

Notazione 6.17. *Conserveremo le notazioni $\mathbf{x}^{\mathrm{c}}$ ed m_A introdotte nell'esempio 6.16.*

Esempio 6.18. *Vediamo un caso "concreto" dell'esempio precedente: sia*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

Siccome A è una matrice di tipo 2×3, abbiamo allora un'applicazione

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 .$$

Per avere l'immagine di un vettore, ad esempio $(5, 0, -1)$, dobbiamo scriverlo come matrice di tipo 3×1 e moltiplicarlo a sinistra per A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Otteniamo la matrice di tipo 2×1

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} .$$

Dunque l'immagine di $(5, 0, -1)$ è il vettore numerico $(2, 12)$.
In generale, l'immagine del vettore (x, y, z) è $(x+2y+3z, 2x+y-2z)$.

Osservazione 6.19. *Sia $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ il riferimento vettoriale standard di $\mathbb{R}^n$ e sia A una matrice di tipo $m \times n$. I prodotti*

$$A \cdot {\mathbf{e}_1}^{\mathrm{c}}, \dots, A \cdot {\mathbf{e}_n}^{\mathrm{c}}$$

sono proprio le matrici di tipo $m \times 1$ dati dalle colonne $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n$ di A, e quindi abbiamo anche

$$m_A(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}^1 \ , \dots , \ , m_A(\mathbf{e}_n) = \mathbf{a}^n .$$

Proposizione 6.20. *Siano A e B matrici di tipo $m \times n$. Se $m_A = m_B$ allora $A = B$.*

Dimostrazione. Basta considerare la base standard di $\mathbb{R}^n$: se le applicazioni sono uguali, per l'osservazione 6.19 le colonne di A devono essere rispettivamente uguali alle colonne di B, dunque $A = B$. $\square$

Proposizione 6.21. *Sia*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

un'applicazione lineare. Allora esiste una ed una sola matrice A di tipo $m \times n$ tale che $f = m_A$.

Dimostrazione. Sia $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ il riferimento vettoriale standard di $\mathbb{R}^n$ e sia A la matrice di tipo $m \times n$ tale che

$$\mathbf{a}^1 = f(\mathbf{e}_1) \ , \ \dots \ , \ \mathbf{a}^n = f(\mathbf{e}_n) \ .$$

Per l'osservazione 6.19 abbiamo

$$m_A(\mathbf{e}_1) = f(\mathbf{e}_1) \ , \dots \ , m_A(\mathbf{e}_n) = f(\mathbf{e}_n) \ .$$

(quindi f ed m_A agiscono allo stesso modo sui vettori $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$). Siccome poi sia f che m_A sono lineari, preso un qualunque $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{x}) = f(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1 f(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_n f(\mathbf{e}_n) \\ &= x_1 m_A(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_n m_A(\mathbf{e}_n) = m_A(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) = m_A(\mathbf{x}) \ . \end{aligned}$$

Quindi $f = m_A$ come volevamo.

La matrice A è poi unica per la proposizione 6.20. □

Abbiamo così descritto tutte le possibili applicazioni lineari tra vettori numerici: consistono nella moltiplicazione per qualche matrice. Inoltre abbiamo che la corrispondenza tra tali applicazioni e le rispettive matrici è biettiva.

6.4. **Matrice associata.**

Definizione 6.22. *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali finitamente generati, sia $\mathcal{B}$ un riferimento vettoriale di V, sia $\mathcal{B}'$ un riferimento vettoriale di W e siano $c_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}^n$ e $c_{\mathcal{B}'} : W \to \mathbb{R}^m$ le coordinazioni (vedi definizione 5.10 ed esempio 5.25).*
Consideriamo l'applicazione

$$c_{\mathcal{B}'} \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

e ricordiamo che esiste un'unica matrice A tale che questa applicazione sia uguale ad m_A.
Allora la matrice A sarà detta matrice associata *ad f rispetto ai riferimenti vettoriali $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.*

Osservazione 6.23. *Conservando le notazioni della definizione appena data, sia $\mathbf{v}$ un qualunque vettore di V, sia $\mathbf{x}$ il vettore delle componenti di $\mathbf{v}$ ed $\mathbf{y}$ il vettore delle componenti di $f(\mathbf{v})$. In altri termini $\mathbf{x} = c_{\mathcal{B}}(\mathbf{v})$ e $\mathbf{y} = c_{\mathcal{B}'}(f(\mathbf{v}))$, quindi*

$$\mathbf{y} = c_{\mathcal{B}'}\left(f\left(c_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbf{x})\right)\right) \ .$$

Si ha

$$\mathbf{y} = m_A(\mathbf{x}) \ .$$

Considerando la matrice $X := \mathbf{x}^{\mathrm{c}}$, di tipo $n \times 1$, e la matrice $Y := \mathbf{y}^{\mathrm{c}}$, di tipo $m \times 1$, abbiamo

$$Y = AX$$

Parlando informalmente, la matrice associata ad f descrive l'azione di f in termini di componenti dei vettori.

Osservazione 6.24. *Se V e W sono spazi vettoriali di rispettive dimensioni n ed m, e con rispettivi riferimenti vettoriali $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, data una matrice A di tipo $m \times n$ sui reali, esiste un'unica applicazione lineare $V \to W$ che ha A come matrice associata: l'applicazione*

$$c_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ m_A \circ c_{\mathcal{B}} \ ,$$

dove $c_{\mathcal{B}}$ e $c_{\mathcal{B}'}$ sono le coordinazioni.

La seguente proposizione stabilisce un modo per costruire la matrice associata.

Proposizione 6.25. *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali finitamente generati e sia A la matrice associata rispetto a riferimenti vettoriali $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$. Allora le colonne di A sono i vettori delle componenti delle immagini dei vettori di $\mathcal{B}$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, e siano $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ i rispettivi vettori delle componenti rispetto a $\mathcal{B}$ stessa. Per l'osservazione 6.23, i vettori delle componenti delle immagini di $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ (cioè di $f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)$) sono

$$m_A(\mathbf{x}_1), \dots, m_A(\mathbf{x}_n) \ .$$

A questo punto basta notare che $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ sono i vettori della base standard di $\mathbb{R}^n$ e tenere presente l'osservazione 6.19. □

La seguente proposizione afferma che un'applicazione lineare resta completamente individuata se si assegnano le immagini dei vettori di una base.

Proposizione 6.26. *Siano V e W spazi vettoriali finitamente generati, sia $\mathcal{B} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ una base di V e sia $[\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n]$ un qualunque sistema di vettori di W. Allora esiste un'unica applicazione lineare $f : V \to W$ tale che*

$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1 \ , \quad \dots \quad , \ f(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n \ .$$

Dimostrazione. Fissiamo un qualunque riferimento vettoriale $\mathcal{B}'$ di W. Per la proposizione 6.25, un'applicazione lineare $f : V \to W$ soddisfa la condizione richiesta se e solo se la sua matrice associata rispetto al riferimento vettoriale $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ e $\mathcal{B}'$ ha come colonne le componenti dei vettori $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ rispetto a $\mathcal{B}'$. Dunque il risultato segue subito dall'osservazione 6.24. □

Proposizione 6.27. *Siano $f : V \to V'$ ed $f' : V' \to V''$ applicazioni lineari tra spazi finitamente generati e siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ riferimenti vettoriali rispettivamente di V, V', V''. Se A è la matrice associata ad f*

rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, e A' è la matrice associata ad f' rispetto a $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$, allora la matrice associata ad $f' \circ f$ rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}''$ è il prodotto

$$A'A \ .$$

D'ora in avanti alcune dimostrazioni saranno "a scelta". Questo significa che non sono esposte a lezione, ma ciascuno studente, per esercizio, dovrà sceglierne due da portare all'esame orale.

Dimostrazione (a scelta). Dette $c_{\mathcal{B}}$, $c'_{\mathcal{B}}$ e $c''_{\mathcal{B}}$ le coordinazioni, abbiamo

$$c'_{\mathcal{B}} \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1} = m_A, \qquad c''_{\mathcal{B}} \circ f' \circ c'^{-1}_{\mathcal{B}} = m_{A'} \ .$$

Dalle formule

$$m_A\left(\mathbf{x}\right)^{\mathrm{c}} = A \cdot \mathbf{x}^{\mathrm{c}} \ , \qquad m_{A'}\left(\mathbf{y}\right)^{\mathrm{c}} = A' \cdot \mathbf{y}^{\mathrm{c}}$$

(esempio 6.16) segue subito che

$$m_{A'}\left(m_A(\mathbf{x})\right)^{\mathrm{c}} = A'A \cdot \mathbf{x}^{\mathrm{c}}$$

cioè $m_{A'} \circ m_A = m_{A'A}$.

Siccome

$$m_{A'} \circ m_A = c''_{\mathcal{B}} \circ f' \circ c'^{-1}_{\mathcal{B}} \circ c'_{\mathcal{B}} \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1} = c''_{\mathcal{B}} \circ f' \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1} \ ,$$

concludiamo che $c''_{\mathcal{B}} \circ f' \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1}$ è $m_{A'A}$, il che per definizione vuol dire che la matrice associata ad $f' \circ f$ rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}''$ è AA', come volevamo. □

Proposizione 6.28. *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi finitamente generati e sia A la matrice associata rispetto ad assegnati riferimenti vettoriali $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$. Allora si ha*

$$\dim \operatorname{im} f = \operatorname{rk} A \ .$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ e sia $[\mathbf{a}^{i_1}, \ldots, \mathbf{a}^{i_r}]$ un sistema massimo di colonne indipendenti di A, così che $r = \operatorname{rk} A$ (vedi definizione 6.14). Ricordiamo inoltre che ogni colonna di A dipende da $[\mathbf{a}^{i_1}, \ldots, \mathbf{a}^{i_r}]$. Per la proposizione 6.25, e dato che la coordinazione rispetto a $\mathcal{B}'$, essendo un'isomorfismo, conserva sia la dipendenza che l'indipendenza, otteniamo che tutti i vettori $f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)$ dipendono dal sistema indipendente $[\ f(\mathbf{v}_{i_1}), \ldots, f(\mathbf{v}_{i_r})\ ]$.

Se ora $\mathbf{w}$ è un qualunque vettore di $\operatorname{im} f$, allora (per definizione di $\operatorname{im} f$) esiste un $\mathbf{v} \in V$ tale che $\mathbf{w} = f(\mathbf{v})$. Poiché $\mathcal{B}$ è una base di V, abbiamo

$$\mathbf{v} = h_1\mathbf{v}_1 + \cdots + h_n\mathbf{v}_n$$

per opportuni scalari $h_1, \ldots, h_n$. Quindi

$$\mathbf{w} = h_1 f(\mathbf{v}_1) + \cdots + h_n f(\mathbf{v}_n) \ .$$

Ma poiché i vettori $f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)$ dipendono da (cioè sono combinazioni lineari di) $[\, f(\mathbf{v}_{i_1}), \dots, f(\mathbf{v}_{i_r})\,]$, otteniamo che $\mathbf{w}$ dipende dal sistema indipendente $[\, f(\mathbf{v}_{i_1}), \dots, f(\mathbf{v}_{i_r})\,]$. Dunque $[\, f(\mathbf{v}_{i_1}), \dots, f(\mathbf{v}_{i_r})\,]$ è una base di $\operatorname{im} f$, da cui si ha subito

$$\dim \operatorname{im} f = r = \operatorname{rk} A\,,$$

come volevamo. □

6.5. **Cambio di base.**

Definizione 6.29. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato, e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due riferimenti vettoriali di V.*
La matrice associata all'applicazione identica

$$\mathrm{id}_V : V \to V$$

rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ si dice matrice del cambio di riferimento *(o* di base*) da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.*

Osservazione 6.30. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ riferimenti vettoriali di V, B la matrice del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, $\mathbf{v}$ un qualunque vettore di V, $\mathbf{x}$ il vettore delle componenti rispetto a $\mathcal{B}$ e sia $\mathbf{x}'$ il vettore delle componenti rispetto a $\mathcal{B}'$. Per l'osservazione 6.23 si ha*

$$\mathbf{x}' = m_B(\mathbf{x})$$

Considerando la matrice $X := \mathbf{x}^{\mathrm{c}}$, di tipo $n \times 1$, e la matrice $X' := \mathbf{x}'^{\mathrm{c}}$, di tipo $m \times 1$, abbiamo anche

$$X' = BX\ .$$

Dunque, parlando informalmente, la matrice del cambio di base descrive come si passa dalle componenti rispetto ad un riferimento vettoriale alle componenti rispetto ad un'altro.

Per costruire la matrice del cambio di base, basta tenere presente la seguente osservazione.

Osservazione 6.31. *Per la proposizione 6.25, le colonne della matrice del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ sono le componenti dei vettori di $\mathcal{B}$ rispetto a $\mathcal{B}'$.*

Osservazione 6.32. *Per la proposizione 6.27, se B è la matrice del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ e B' è la matrice del cambio di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}''$, allora la matrice del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}''$ è il prodotto $B'B$.*

Osservazione 6.33. *Tenendo presente l'osservazione precedente e il fatto che la matrice del cambio di base da una base a sé stessa è la matrice identica, si ha subito che la matrice del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ e quella del cambio di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ sono inverse tra loro.*

In particolare una matrice di cambio di base ha sempre determinante non nullo.

6.6. **Orientazione.**

Definizione 6.34. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ suoi riferimenti vettoriali. Se il determinante della matrice del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è positivo, allora diremo che $\mathcal{B}$ è* concorde *a $\mathcal{B}'$. In caso contrario diremo che $\mathcal{B}$ è* discorde *con $\mathcal{B}'$.*

Proposizione 6.35. *La relazione di "concordanza" tra basi di uno spazio vettoriale, è una relazione d'equivalenza, e se lo spazio non è uguale a $\{\mathbf{0}\}$ esistono esattamente due classi di equivalenza.*

Dimostrazione - non richiesta per l'esame. Poiché la matrice del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}$ è la matrice identica, che ha determinante 1, ogni riferimento vettoriale è concorde a sé stesso. Dunque la "concordanza" è riflessiva.

Poiché la matrice del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ e quella del cambio di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ sono inverse tra loro, i loro determinanti sono inversi tra loro. Se dunque $\mathcal{B}$ è concorde a $\mathcal{B}'$, anche $\mathcal{B}$ è concorde a $\mathcal{B}'$ (dato che l'inverso di un numero positivo è ancora positivo). Dunque la "concordanza" è una relazione simmetrica.

Infine, dall'osservazione 6.32 si deduce che la "concordanza" è una relazione transitiva (perché il prodotto di numeri positivi è positivo).

Se ora $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è un riferimento vettoriale, allora $(-\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è un riferimento vettoriale discorde. Dunque le classi di equivalenza sono almeno due.

Se poi $\mathcal{B}$ è un riferimento vettoriale qualunque, se è discorde a $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ allora è concorde a $(-\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ (sempre per l'osservazione 6.32). Dunque le classi d'equivalenza sono esattamente due, come volevamo. $\square$

Definizione 6.36. *Una classe d'equivalenza di riferimenti vettoriali concordi di uno spazio V si chiama* orientazione *di V.*

Dunque l'orientazione di un riferimento vettoriale è la sua classe di equivalenza. Dire che un riferimento vettoriale $\mathcal{B}$ ha orientazione $\mathcal{O}$, formalmente equivale a dire che $\mathcal{B} \in \mathcal{O}$.

Il concetto di orientazione consente ad esempio di definire facilmente (e rigorosamente) un'applicazione di "rotazione" tra vettori liberi (cfr. quanto detto appena prima dell'esempio 5.13).

Osservazione 6.37. *Sia $\mathcal{W}$ lo spazio dei vettori paralleli ad un piano π, sia $\mathcal{O}$ un'orientazione di $\mathcal{W}$ e sia θ un numero reale tale che $0 < \theta < \pi$. Se $\mathbf{v} \in \mathcal{W}$ è un vettore non nullo, non è difficile dimostrare che esiste uno ed un solo vettore $\mathbf{v}' \in \mathcal{W}$ tale che*

- $|\mathbf{v}'| = |\mathbf{v}|$*;*
- $\widehat{\mathbf{v}\mathbf{v}'} = \theta$*;*
- *il riferimento vettoriale $(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ ha orientazione $\mathcal{O}$.*

Definizione 6.38. *Sia $\mathcal{W}$ lo spazio dei vettori paralleli ad un piano, sia $\mathcal{O}$ un'orientazione di $\mathcal{W}$ e sia θ un numero reale tale che $0 < \theta < \pi$. Per l'osservazione precedente, possiamo definire un'applicazione*

$$\mathcal{W} \to \mathcal{W}$$

che associa al vettore nullo il vettore nullo stesso, e che ad ogni vettore non nullo $\mathbf{v}$ associa l'unico vettore $\mathbf{v}' \in \mathcal{W}$ tale che

- $|\mathbf{v}'| = |\mathbf{v}|$*;*
- $\widehat{\mathbf{v}\mathbf{v}'} = \theta$*;*
- *il riferimento vettoriale $(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ ha orientazione $\mathcal{O}$.*

Tale applicazione si dice rotazione *di $\mathcal{W}$ di ampiezza θ e concorde ad $\mathcal{O}$.*

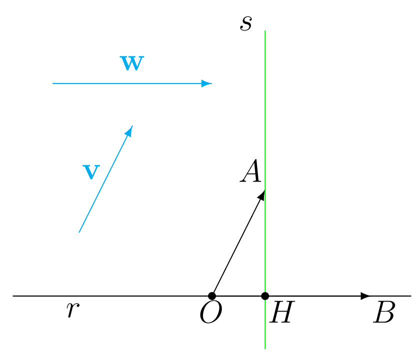
Proposizione 6.39. *Una rotazione è un'applicazione lineare.*

Tralasciamo la dimostrazione.

6.7. **Prodotto vettoriale.** Ritorniamo per un attimo alla geometria ordinaria, e stabiliamo la definizione di un'altra utile operazione tra vettori liberi: il prodotto vettoriale.

Siano dunque $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vettori liberi, e vediamo come si definisce il loro prodotto vettoriale. È utile ricordare la costruzione fatta per il prodotto scalare. Per comodità, la riportiamo qui di seguito.

Scelto un punto O, siano OA e OB i rispettivi rappresentanti di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ aventi origine in O. Sia r una retta contenente O e B e sia H l'intersezione di r con una perpendicolare s ad r passante per A.



Osservazione 6.40. *Conservando le notazioni ora introdotte, se* $\mathbf{w}$ *è non nullo,* $\mathbf{v}$ *è parallelo a* $\mathbf{w}$ *se e solo se* $H = A$*. Se* $\mathbf{w} = \mathbf{0}$*, allora* $\mathbf{v}$ *è automaticamente parallelo a* $\mathbf{w}$*. Dunque abbiamo che*

$$\mathbf{v} \quad e \quad \mathbf{w} \quad paralleli \quad \iff \quad |AH||OB| = 0 \ .$$

Proposizione 6.41. *Assumiamo le notazioni introdotte all'inizio del paragrafo, e sia* $\mathcal{O}$ *un'orientazione dello spazio dei vettori liberi. Allora esiste un'unico vettore* $\mathbf{n}$ *tale che*

- $\mathbf{n}$ *è ortogonale a* $\mathbf{v}$ *e a* $\mathbf{w}$*;*
- $|\mathbf{n}| = |AH||OB|$*;*
- *se* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *non sono paralleli, allora* $(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{n})$ *è un riferimento vettoriale che ha orientazione* $\mathcal{O}$*.*

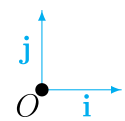
Tralasciamo la dimostrazione.

Definizione 6.42. *Siano* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *vettori liberi, e si fissi un'unità di misura* u *e una orientazione* $\mathcal{O}$ *nello spazio dei vettori liberi. Allora l'unico vettore* $\mathbf{n}$ *che soddisfa le condizioni stabilite nella proposizione 6.41 si dice* prodotto vettoriale *di* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *(rispetto a* u *ed* $\mathcal{O}$*). Il prodotto vettoriale di* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *sarà indicato con*

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \ .$$

Assumeremo tacitamente fissata (oltre che l'unità di misura) un'orientazione $\mathcal{O}$*.*

Nell'uso corrente, specialmente in Fisica, si assume fissata l'orientazione cosiddetta "levogira". Per definire tale orientazione, basta assegnare un qualunque riferimento vettoriale che abbia (per definizione) tale orientazione. Il lettore avrà già incontrato vari modi per stabilire tale riferimento vettoriale ("regola della mano destra", "regola del cavatappi", ecc.). Si può anche presentarla come l'orientazione del riferimento vettoriale $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, N - O)$, dove $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ed O sono rappresentati qui sotto, ed N è la punta del naso del lettore (se non lo ha appoggiato sul foglio).



Tutte queste definizioni hanno bisogno dell'introduzione di una nuova nozione primitiva. Più semplicemente, si può direttamente stabilire l'orientazione levogira come nozione primitiva (e assumere questa come l'orientazione sottintesa nella definizione 6.42).

Proposizione 6.43. *Siano* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *vettori liberi non nulli. Si ha*

$$|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}| = |\mathbf{v}||\mathbf{w}| \sin \widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}}.$$

Tralasciamo la (facile) dimostrazione.

Proposizione 6.44. *Siano* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *vettori liberi qualunque ed* h *uno scalare. Si ha*

- $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$;
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$;
- $(h\mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = h(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$.

Tralasciamo la (facile) dimostrazione.

6.8. **Endomorfismi.**

Definizione 6.45. *Un'applicazione lineare* $V \to V$ *(cioè tale che il dominio e l'insieme d'arrivo siano lo stesso spazio vettoriale* V*) si dice* endomorfismo *di* V.

Definizione 6.46. *Sia* f *un endomorfismo di uno spazio finitamente generato* V*, e sia* A *la matrice associata ad* f *rispetto a riferimenti vettoriali* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$ *di* V*. Se* $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ *allora* A *sarà detta matrice associata ad* f rispetto a $\mathcal{B}$.

Sebbene a volte sia comodo rappresentare un endomorfismo usando due riferimenti vettoriali diversi di V (una per il dominio ed una per l'insieme d'arrivo), come è successo quando abbiamo definito il cambio di base, nella maggior parte dei casi è preferibile fissare un'unico riferimento vettoriale.

Osservazione 6.47. *Sia* f *un endomorfismo di* V*, siano* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$ *riferimenti vettoriali di* V*, sia* A *la matrice associata ad* f *rispetto a* $\mathcal{B}$*,* *sia A' la matrice associata ad f rispetto a $\mathcal{B}'$ e sia infine B la matrice del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$. La composizione*

$$V \xrightarrow{\mathrm{id}_V} V \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\mathrm{id}_V} V$$

è ovviamente uguale ad f. Se fissiamo nell'ordine le basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}$, la proposizione 6.27 (tenendo anche presente l'osservazione 6.33) implica che

$$A = B^{-1}A'B\ .$$

Definizione 6.48. *Due matrici A ed A' si dicono* simili *se esiste una matrice invertibile B tale che*

$$A = B^{-1}A'B\ .$$

Osservazione 6.49. *Siccome una matrice invertibile B è per forza quadrata, affinché un prodotto $B^{-1}AB$ abbia senso, A deve anche essere quadrata dello stesso ordine di B, e il prodotto è allora ancora una matrice quadrata dello stesso ordine. Dunque due matrici simili devono per forza essere quadrate dello stesso ordine.*

Proposizione 6.50. *Sia V uno spazio vettoriale e sia $S = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ un sistema di vettori linearmente indipendenti. Se l'ordine n di S è uguale alla dimensione di V, allora S è una base di V.*

Dimostrazione (cenno). Basta prendere un qualsiasi vettore di V e osservare che dipende da S, per la proposizione 4.18 ed il Lemma di Steinitz. □

Osservazione 6.51. *Sia $\mathcal{B}$ un riferimento vettoriale di uno spazio vettoriale V di dimensione n e sia B una matrice invertibile di ordine n. Poiché la coordinazione rispetto a $\mathcal{B}$ è un isomorfismo, e poiché le colonne di B sono linearmente indipendenti (perché $|B| \neq 0$), il sistema $\mathcal{B}'$ dei vettori che hanno per rispettive componenti le colonne di B, è un sistema di n vettori indipendenti di V. Allora per la proposizione 6.50, $\mathcal{B}'$ è una base di V, e considerandolo come n-upla in base alla sequenza delle colonne della matrice B, è quindi un riferimento vettoriale di V. Per l'osservazione 6.31 la matrice del cambio di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è proprio B.*

Osservazione 6.52. *Sia f un endomorfismo di uno spazio finitamente generato V e sia A la matrice associata ad f rispetto ad un riferimento vettoriale $\mathcal{B}$. Se A' è una matrice simile ad A, allora esiste una matrice invertibile B tale che $A = B^{-1}A'B$. Per l'osservazione precedente (prendendo B^{-1} al posto di B), esiste un riferimento vettoriale $\mathcal{B}'$ tale* *che la matrice del cambio di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ sia B^{-1}. Per l'osservazione 6.47 la matrice associata ad f rispetto a $\mathcal{B}'$ è uguale a BAB^{-1}. Ma siccome*

$$BAB^{-1} = BB^{-1}A'BB^{-1} = A' ,$$

concludiamo che la matrice associata ad f rispetto a $\mathcal{B}'$ è proprio A'.

In definitiva, se A è associata ad un endomorfismo f rispetto ad un riferimento vettoriale $\mathcal{B}$, e se A' è simile ad A, allora anche A' è associata ad f rispetto ad un opportuno riferimento vettoriale $\mathcal{B}'$.

Osservazione 6.53. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Per l'osservazione 6.24, ogni matrice quadrata A di ordine n si può ottenere come matrice associata a qualche endomorfismo f di V, rispetto ad un fissato riferimento vettoriale $\mathcal{B}$.*

Dunque, le osservazioni 6.47 e 6.52 ci assicurano che due matrici sono simili se e solo se possono essere ottenute come matrici associate ad uno stesso endomorfismo, rispetto a (singoli) riferimenti vettoriali.

Proposizione 6.54. *Matrici simili hanno lo stesso rango.*

Dimostrazione. Segue subito dall'osservazione 6.53 insieme alla proposizione 6.28. □

6.9. **Autovalori ed autovettori.**

Definizione 6.55. *Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V. Se un vettore non nullo $\mathbf{v}$ ed uno scalare h sono tali che*

$$f(\mathbf{v}) = h\mathbf{v}$$

allora diremo che $\mathbf{v}$ è un autovettore *di f con* autovalore *h. Uno scalare qualunque è detto* autovalore *di f, se è autovalore per qualche autovettore.*

Data una matrice sui reali A, quadrata di ordine n, quando parleremo di autovalori (reali) ed autovettori (reali) di A intenderemo riferirci a quelli dell'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ dato dalla moltiplicazione per A.

Se nella definizione ora data non avessimo supposto che $\mathbf{v}$ fosse non nullo, ogni scalare sarebbe stato un autovalore. Dunque è importante tenere a mente che gli autovettori di f sono *non nulli.*

Osservazione 6.56. *Sia f un endomorfismo di V e sia t uno scalare. Consideriamo l'endomorfismo*

$$f_t := f - t\,\mathrm{id}_V ,$$

cioè l'endomorfismo che associa ad ogni $\mathbf{v}$ il vettore $f(\mathbf{v}) - t\,\mathrm{id}_V(\mathbf{v})$ (il fatto che sia lineare si verifica subito, tenendo conto che f e id_V

sono lineari). Allora gli (eventuali) autovettori con autovalore t sono i vettori non nulli appartenenti al nucleo di f_t. Dunque t è un autovalore di f se e solo se $\ker f_t \neq \{\mathbf{0}\}$.

Definizione 6.57. *Conservando le notazioni introdotte nell'osservazione precedente, se t è un autovalore allora il sottospazio non nullo* $\ker f_t$ *di V verrà detto* autospazio *relativo a t.*

In altre parole, l'autospazio relativo ad un autovalore t è l'insieme costituito da tutti gli autovettori con autovalore t e dal vettore nullo.

Osservazione 6.58. *Conservando le notazioni introdotte nell'osservazione 6.56, supponiamo che V sia finitamente generato, fissiamo un riferimento vettoriale di V e sia A la matrice associata ad f. Allora la matrice A_t associata ad f_t è uguale ad*

$$A - tI_n$$

(dove $n = \dim V$). Per le proposizioni 5.33 e 6.28, si ha

$$\dim \ker f_t = n - \operatorname{rk} A_t \ .$$

Allora l'osservazione 6.56 prova che t è un autovalore se e solo se il rango di A_t è strettamente minore di n, il che accade se e solo se il determinante di A_t è 0 (perché tale determinante è l'unico minore di ordine n di A_t).

Concludiamo che

$$t \text{ è autovalore di } f \iff \left|A - tI_n\right| = 0 \ .$$

Proposizione 6.59. *Siano A ed A' matrici simili. Allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha*

$$\left|A' - tI_n\right| = \left|A - tI_n\right| \ .$$

Dimostrazione (a scelta). Poiché le matrici sono simili, esiste una matrice invertibile B tale che

$$A' = B^{-1}AB \ .$$

Si ha

$$\begin{aligned}\left|A' - tI_n\right| &= \left|B^{-1}AB - tI_n\right| = \left|B^{-1}AB - B^{-1}(tI_n)B\right| = \\ &= \left|B^{-1}(A - tI_n)B\right| = |B^{-1}|\left|(A - tI_n)\right||B| = \left|A - tI_n\right| \ ,\end{aligned}$$

come volevamo. □

Prerequisito 6.60. *Assumiamo noto cosa sia un* polinomio a coefficienti reali di grado *n e che cosa siano le sue* radici.

Osservazione 6.61. *Per la proposizione precedente e per l'osservazione 6.47, se f è un endomorfismo di uno spazio finitamente generato V, comunque si scelga un riferimento vettoriale $\mathcal{B}$ di V, detta A la matrice associata ad f, la funzione che a $t \in \mathbb{R}$ associa*

$$\left|A - tI_n\right|$$

è sempre la stessa (non dipende da $\mathcal{B}$).

Notiamo inoltre che, siccome il determinante si ottiene con operazioni di moltiplicazione e di addizione, la funzione in questione è data da un polinomio.

Definizione 6.62. *Sia f un'endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato e sia A la matrice associata ad f rispetto ad un riferimento vettoriale qualunque. Allora la funzione*

$$p_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

che a $t \in \mathbb{R}$ associa

$$\left|A - tI_n\right|$$

(cfr. l'osservazione precedente) si chiama polinomio caratteristico *di f.*

Proposizione 6.63. *Sia f un'endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato e sia p_f il suo polinomio caratteristico. Allora*

$$t \text{ è autovalore di } f \quad \iff \quad p_f(t) = 0 \, .$$

Dimostrazione. Segue subito dalle definizioni e dall'osservazione 6.58. □

In parole povere, in questo paragrafo abbiamo provato che gli autovalori di un endomorfismo f di uno spazio finitamente generato, sono uguali alle radici (reali) del polinomio caratteristico di f. Inoltre, dato un autovalore t, gli autovettori con autovalore t sono i vettori non nulli appartenenti al nucleo di $f - t\,\mathrm{id}_V$.

Questi due fatti ci mettono in grado (almeno in linea di principio) di trovare tutti gli autovalori e gli autovettori di uno spazio finitamente generato. Dal punto di vista dei calcoli pratici, l'unica cosa che può comportare un po' di difficoltà è il calcolo delle radici del polinomio caratteristico, che può essere di grado elevato. A questo proposito è utile ricordare come si scompongono i polinomi (fatto noto dalle scuole superiori). Piuttosto che richiamare in generale il procedimento, vediamo come si opera su qualche esempio concreto.

Esempio 6.64. *Sia*

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

dato da

$$p(t) = t^3 - 2t^2 - 6t + 4 \; .$$

Se non si vogliono andare a scomodare le formule per le equazioni di terzo grado, o i metodi di approssimazione numerica, si può cercare di trovare per tentativi una radice, scegliendola tra i divisori del termine noto (nel nostro caso 4):

$$p(1) = -3 \qquad p(-1) = 7 \qquad p(2) = -8 \qquad p(-2) = 0$$

(avendo trovato la radice -2, è inutile provare altri divisori).

Dunque p è divisibile per $t+2$. Se non si ricordano la regola per la divisione di polinomi o la regola di Ruffini (note dalle scuole superiori), si può scrivere

$$(t+2)(at^2 + bt + c) = t^3 - 2t^2 - 6t + 4$$

e ricavare poi (facilmente) a, b, c. Otteniamo

$$p(t) = (t+2)(t^2 - 4t + 2) \; .$$

Le radici di p sono dunque -2 e le eventuali radici di $t^2 - 4t + 2$. La formula

$$\frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2}$$

ci dice che le altre due radici di p sono

$$2 + \sqrt{2} \qquad e \qquad 2 - \sqrt{2} \; .$$

Il calcolo degli autovettori di un endomorfismo richiede in genere la risoluzione di un semplice sistema di equazioni: vedremo più avanti dei metodi per farlo.

6.10. **Diagonalizzazione.**

Definizione 6.65. *Un endomorfismo f di uno spazio finitamente generato V si dice* diagonalizzabile *se esiste un riferimento vettoriale $\mathcal{B}$ tale che la matrice associata ad f rispetto a $\mathcal{B}$ sia una matrice diagonale.*

Osservazione 6.66. *Sia A una matrice quadrata di ordine n, sia ϕ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ dato dalla moltiplicazione per A e consideriamo le seguenti condizioni:*

1. *ϕ è diagonalizzabile;*
2. *A è simile ad una matrice diagonale.*

Visto che la matrice associata a ϕ rispetto al riferimento vettoriale standard è proprio A, per l'osservazione 6.47 si ha

$$(1) \implies (2)$$

e per l'osservazione 6.52 si ha

$$(2) \implies (1)\ .$$

Dunque le due condizioni sono equivalenti, cioè l'endomorfismo di moltiplicazione per A è diagonalizzabile se e solo se A è simile ad una matrice diagonale.

Definizione 6.67. *Sia A una matrice sui reali, quadrata di ordine n. Se sono verificate le condizioni equivalenti esposte nell'osservazione precedente, allora A si dice* diagonalizzabile *(sui reali).*

Osservazione 6.68. *Sia f un endomorfismo di uno spazio finitamente generato V, sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ un suo riferimento vettoriale e sia A la matrice associata ad f rispetto a $\mathcal{B}$. Dalla proposizione 6.25 segue subito che A è diagonale se e solo se*

$$f(\mathbf{v}_1) = a_{11}\mathbf{v}_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad f(\mathbf{v}_n) = a_{nn}\mathbf{v}_n\ ,$$

cioè se e solo se per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ il vettore (sicuramente non nullo) $\mathbf{v}_i$ è autovettore di f con autovalore a_{ii}.

Concludiamo che f è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di V costituita da autovettori di f, e in tal caso la matrice diagonale associata ha gli autovalori sulla diagonale $a_{11}, \ldots, a_{nn}$.

In particolare, una matrice quadrata è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori della matrice stessa.

Proposizione 6.69. *Un polinomio p di grado n ha un numero finito $t_1, \ldots, t_s$ di radici reali, ed esiste un'unica s-pla $(n_1, \ldots, n_s)$ di numeri naturali positivi tali che*

$$p(t) = (t - t_1)^{n_1} \cdots (t - t_s)^{n_s} q(t)\ , \tag{6}$$

dove q è un polinomio privo di radici reali (quindi $n_1 + \cdots + n_s \leq n$).

Tralasciamo la dimostrazione.

Definizione 6.70. *Nella situazione della proposizione precedente, si dirà che il numero naturale n_i è la* molteplicità *della radice t_i di p (per ogni $i \in \{1, \ldots, s\}$).*

Definizione 6.71. *Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato, sia $\bar{t}$ un autovalore di f e sia p_f il polinomio caratteristico. La molteplicità della radice $\bar{t}$ di p_f (cfr. proposizione 6.63) si dice* molteplicità algebrica *dell'autovalore $\bar{t}$.*

La dimensione dell'autospazio relativo a $\bar{t}$ si dice molteplicità geometrica *dell'autovalore $\bar{t}$.*

Proposizione 6.72. *Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato e sia $\bar{t}$ un autovalore di f. Allora la molteplicità geometrica di $\bar{t}$ è minore o uguale alla molteplicità algebrica.*

Tralasciamo la dimostrazione.

Proposizione 6.73. *Siano $t_1, \ldots, t_s$ autovalori distinti di un endomorfismo, e siano $S_1, \ldots, S_s$ sistemi linearmente indipendenti, rispettivamente costituiti da autovettori con autovalore $t_1, \ldots, t_s$. Allora il sistema "unione" di $S_1, \ldots, S_s$ è ancora linearmente indipendente.*

Tralasciamo la dimostrazione.

Proposizione 6.74. *Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato. Allora f è diagonalizzabile se e solo se valgono tutti e due i seguenti fatti.*

- *Nella decomposizione (6) del polinomio caratteristico, $q(t)$ è una costante;*
- *per ogni autovalore di f la molteplicità algebrica è uguale alla molteplicità geometrica.*

Tralasciamo la dimostrazione.

Un tipico esercizio d'esame è quello di stabilire se un'endomorfismo è o no diagonalizzabile, e in caso affermativo di trovare una base di autovettori e (una volta "organizzata in n-upla" tale base) la matrice associata. La proposizione 6.73 ci mette in grado di rispondere.

Se l'endomorfismo è diagonalizzabile, per trovare una base di autovettori basta "mettere insieme" le basi dei singoli autospazi. Queste basi si determinano facilmente: vedremo più avanti dei metodi molto efficaci.

6.11. **Spazi vettoriali euclidei.**

Definizione 6.75. *Chiameremo* prodotto scalare *su uno spazio vettoriale sui reali V un'applicazione*

$$s : V \times V \to \mathbb{R}$$

tale che per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ed $r \in \mathbb{R}$ si abbia:

- $s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = s(\mathbf{v}, \mathbf{u})$,
- $s(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + s(\mathbf{v}, \mathbf{w})$,
- $s(r\mathbf{u}, \mathbf{w}) = rs(\mathbf{u}, \mathbf{w})$.

Inoltre, diremo che un prodotto scalare s su V è definito positivo *se per ogni $\mathbf{v} \in V$ si ha*

- $s(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$;
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Uno spazio vettoriale euclideo *è una coppia* (V, s) *dove* V *è uno spazio vettoriale sui reali ed* s *è un prodotto scalare definito positivo su* V*.*

D'ora in poi, il prodotto scalare introdotto con la definizione 2.37 sarà detto prodotto scalare geometrico*, per distinguerlo dagli altri prodotti scalari che è possibile definire sullo spazio* $\mathcal{V}$ *dei vettori liberi.*

Esempio 6.76. *Sia* s *il prodotto scalare geometrico sullo spazio* $\mathcal{V}$ *dei vettori liberi. Allora* $(\mathcal{V}, s)$ *è uno spazio vettoriale euclideo.*

Esempio 6.77. *Sia* s *il prodotto scalare standard su* $\mathbb{R}^n$*. Allora* $(\mathbb{R}^n, s)$ *è uno spazio vettoriale euclideo.*

7. Sistemi lineari

7.1. **Sistemi di equazioni lineari.** Spesso si incontra il problema di trovare dei numeri $x_1, \ldots, x_n$ tali che

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

dove gli a_{ij} e b_i sono dei numeri assegnati, e dove la parentesi graffa sta ad indicare che le uguaglianze devono essere verificate tutte. Parlando un po' informalmente questo problema viene chiamato *sistema* di m equazioni lineari in n incognite; concisamente: *sistema lineare*.

Sempre parlando informalmente, un'*equazione lineare* è il problema di trovare dei numeri $x_1, \ldots, x_n$ tali che

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

dove gli $a_1, \ldots, a_n$ e b sono dei numeri assegnati.

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

si dice *matrice dei coefficienti* del sistema. La matrice

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

(cioè la matrice $m \times (n+1)$ tale che per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ la colonna $\mathbf{a}'^i$ è uguale alla colonna $\mathbf{a}^i$ di A, mentre la colonna $\mathbf{a}'^{n+1}$ è costituita dai termini noti) si dice *matrice completa* del sistema. Una *soluzione* del sistema lineare è un vettore numerico $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\begin{cases} a_{11}s_1 + \cdots + a_{1n}s_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}s_1 + \cdots + a_{mn}s_n = b_m \end{cases},$$

Se il sistema ammette almeno una soluzione si dice *compatibile*, in caso contrario *incompatibile*. Due sistemi si dicono *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni (più precisamente, se l'insieme di tutte le soluzioni del primo è uguale all'insieme di tutte le soluzioni del secondo). Un sistema si dice *omogeneo* se ha tutti i termini noti uguali a zero.

Osservazione 7.1. *Un sistema omogeneo è sicuramente compatibile, perché ha come soluzione il vettore numerico nullo* $(0, \ldots, 0)$.

7.2. **Forma matriciale dei sistemi lineari.** Consideriamo un sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sia A la matrice dei coefficienti e sia

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

una matrice di tipo $n \times 1$. Calcoliamo il prodotto AX:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Dunque AX è la matrice di tipo $m \times 1$ costituita dai primi membri delle equazioni del sistema. Consideriamo la matrice B, di tipo $m \times 1$, costituita dai termini noti:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Allora abbiamo che

$$(x_1, \ldots, x_n) \text{ è soluzione del sistema } \iff AX = B.$$

Per questo motivo, si dice che

$$AX = B$$

è la *forma matriciale* del sistema lineare.

Esempio 7.2. *La forma matriciale del sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 4 \end{cases}$$

è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

7.3. **Teorema di Rouché-Capelli.** La seguente proposizione si chiama *teorema di Rouché-Capelli*.

Proposizione 7.3. *Siano A e A' la matrice dei coefficienti e la matrice completa di un sistema lineare. Allora il sistema è compatibile se e solo se A e A' hanno lo stesso rango.*

Dimostrazione (a scelta). Sia

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

l'applicazione data dalla moltiplicazione per A e sia B la colonna dei termini noti. La dimostrazione della proposizione 6.28 mostra anche che un sistema massimo di colonne di A forma una base di $\operatorname{im} \varphi$. Ora, il sistema è compatibile se e solo se $B \in \operatorname{im} \varphi$, e questo accade se e solo se B dipende dal sistema massimo di colonne di A.

Ma se B dipende dal sistema massimo di A, allora questo è anche un sistema massimo di A', e allora A e A' hanno lo stesso rango. Se invece B non dipende dal sistema massimo allora (tenendo presente la proposizione 4.18) un sistema massimo di colonne di A' si ottiene "aggiungendo" B, e dunque $\operatorname{rk} A' = \operatorname{rk} A + 1$, e allora i ranghi sono diversi.

In conclusione il sistema è compatibile se e solo se A e A' hanno lo stesso rango. □

7.4. **Sistema omogeneo associato.**

Definizione 7.4. *Se*

$$AX = B$$

è un sistema lineare (scritto in forma matriciale), allora il sistema

$$AX = \mathbf{0}$$

si dice sistema omogeneo associato *al sistema $AX = B$.*

7.5. **Regola di Cramer.** La formula stabilita nella seguente proposizione si chiama *regola di Cramer*.

Proposizione 7.5. *Sia S un sistema lineare di n equazioni in n incognite e sia A la matrice dei coefficienti (quadrata di ordine n). Se*

$$|A| \neq 0$$

allora il sistema S ha un'unica soluzione, data da:

$$\left(\frac{|A_1|}{|A|}, \ \dots\ , \frac{|A_n|}{|A|}\right)$$

dove A_i indica la matrice ottenuta da A sostituendo la colonna $\mathbf{a}^i$ con la colonna dei termini noti.

Dimostrazione (a scelta). Per la proposizione 3.54 la matrice A è invertibile. Scrivendo il sistema in forma matriciale

$$AX = B\ ,$$

si deduce facilmente che

$$A^{-1}B$$

è una soluzione del sistema e che è l'unica possibile.

La i-esima componente di tale soluzione è data quindi dal prodotto scalare standard della i-esima riga di A^{-1} per la colonna dei termini noti. Sempre per la proposizione 3.54, la i-esima riga di A^{-1} è

$$\left(\frac{A_{1i}}{|A|}, \dots, \frac{A_{ni}}{|A|}\right)$$

Dunque la i-esima componente della soluzione è

$$\frac{b_1A_{1i} + \cdots + b_nA_{ni}}{|A|}\ ,$$

il cui numeratore è proprio lo sviluppo di Laplace di A_i rispetto alla sua i-esima colonna. □

7.6. **Metodo per la risoluzione dei sistemi lineari.**

Proposizione 7.6. *Se una riga della matrice completa di un sistema lineare dipende dalle rimanenti, eliminando la corrispondente equazione si ottiene un sistema lineare equivalente.*

Tralasciamo la dimostrazione.

Grazie a questa proposizione, al teorema di Rouché-Capelli ed alla regola di Cramer, possiamo fornire il seguente metodo generale per la risoluzione dei sistemi lineari:

- si calcolano i ranghi della matrice dei coefficienti e della matrice completa tramite il teorema degli orlati;
- se i ranghi sono diversi il sistema è incompatibile;
- se i ranghi sono uguali, si considera il sistema ottenuto prendendo solo le equazioni individuate da un minore fondamentale della matrice dei coefficienti (che è per forza anche un minore fondamentale della completa), si assegnano valori arbitrari alle incognite "escluse da quel minore fondamentale", e si applica la regola di Cramer.

Vediamo un esempio.

Esempio 7.7. *Risolviamo il sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ 3x + 4z = 7 \end{cases} .$$

Calcoliamo il rango delle due matrici. La matrice completa è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Il minore

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

(di entrambe le matrici) è non nullo. L'unico orlato di questo minore nella matrice dei coefficienti è

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

ed è nullo. Dunque la matrice dei coefficienti ha rango 2.

Nella matrice completa (oltre al precedente), c'è anche l'orlato

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} .$$

Poiché anche questo è nullo, e poiché non ci sono altri orlati, anche il rango della matrice completa è 2*. Per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ammette qualche soluzione.*

Per il teorema degli orlati, poiché il minore fondamentale coinvolge le prime due righe, la terza riga dipende dalle prime due. Dunque la *terza equazione dipende dalle prime due. La proposizione 7.6 assicura quindi che il nostro sistema è equivalente al sistema*

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+3z=4 \end{cases} .$$

Assegnando un valore arbitrario a z (ponendo quindi $z=t$) possiamo ricavare x e y come soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x+y=3-t \\ 2x-y=4-3t \end{cases} .$$

Siccome il determinante della matrice dei coefficienti di questo nuovo sistema è proprio il minore fondamentale trovato in precedenza (quindi è non nullo), possiamo usare la regola di Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3-t & 1 \\ 4-3t & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-t \\ 2 & 4-3t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}$$

Svolgendo i calcoli, le soluzioni sono date da

$$\left\{ \left(-\frac{4}{3}t+\frac{7}{3}\ ,\ \frac{1}{3}t+\frac{2}{3}\ ,\ t \right) : t\in\mathbb{R} \right\}.$$

Questo metodo, sebbene risulti utile in certe situazioni, generalmente comporta molti più calcoli rispetto ad un altro metodo, detto *metodo di Gauss*, il quale quindi va quasi sempre preferito.

7.7. **Cenno sul metodo di Gauss.** Rinunciando ad un'esposizione sistematica, vediamo qualche esempio pratico.

Esempio 7.8. *Risolviamo col metodo di Gauss il sistema del paragrafo precedente:*

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+3z=4 \\ 3x+4z=7 \end{cases} .$$

L'idea è di sostituire le equazioni con loro combinazioni lineari, in modo da ottenere sistemi equivalenti, ma più semplici (con molti coefficienti nulli). Poiché i calcoli si fanno sui coefficienti e sui termini noti, si può lavorare sulla matrice completa del sistema, senza appesantire inutilmente scrivendo le incognite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \underset{\substack{\boldsymbol{a}_2\to\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_3\to\boldsymbol{a}_3-3\boldsymbol{a}_1}}{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\boldsymbol{a}_3\to\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_2}{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha molti zeri. Inoltre questi sono disposti in una forma che si dice "a scalini", che è molto comoda, quando si passa a risolvere il sistema, se si procede "per sostituzione" partendo dall'ultima equazione, e via via poi a salire. Nel nostro caso:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ -3y+z=-2 \\ 0=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}+t=3 \longrightarrow x=-\frac{4}{3}t+\frac{7}{3} \\ \\ -3y+z=-2 \longrightarrow \quad z=t,\ y=\frac{1}{3}t+\frac{2}{3} \end{cases}$$

Quindi l'insieme di tutte le soluzioni è

$$\left\{\left(\ -\frac{4}{3}t+\frac{7}{3}\ ,\ \frac{1}{3}t+\frac{2}{3}\ ,\ t\ \right) : t\in\mathbb{R}\right\}.$$

Vediamo un altro esempio.

Esempio 7.9. *Risolviamo il sistema lineare*

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+4x_4=0 \\ x_1+x_2-4x_3+5x_4=2 \\ 2x_1+5x_2-11x_3+9x_4=-5 \\ -x_1-4x_2+10x_3-5x_4=1 \end{cases}.$$

Riduciamo a scalini la matrice completa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & -11 & 9 & -5 \\ -1 & -4 & 10 & -5 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{\boldsymbol{a}_2\to\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_3\to\boldsymbol{a}_3-2\boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_4\to\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_1}}{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Qui c'è un fatto un po' nuovo: per annullare gli elementi sotto il "-1" della seconda riga avremmo problemi con la seconda colonna. Per questo motivo, si devono scambiare la seconda e la terza riga.

$$\underset{\boldsymbol{a}_2\longleftrightarrow\boldsymbol{a}_3}{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\boldsymbol{a}_4\to\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_2}{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\boldsymbol{a}_4\to\boldsymbol{a}_4+2\boldsymbol{a}_3}{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sostituzioni a ritroso:

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 \qquad = 0 \\ 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -5 \\ -x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_4 \quad = 0 \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{r} x_1 + (-5) - 3\cdot(-2) + 4\cdot 0 = 0 \rightarrow x_1 = -1 \\ 3x_2 - 5\cdot(-2) + 0 = -5 \rightarrow x_2 = -5 \\ -x_3 + 0 = 2 \rightarrow x_3 = -2 \\ x_4 = 0 \end{array}\right.$$

(leggere le sostituzioni dal basso verso l'alto). Dunque il sistema ha un'unica soluzione: $(-1, -5, -2, 0)$.

7.8. **Calcolo di una base per lo spazio delle soluzioni di un sistema omogeneo.** Osserviamo che l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo, essendo il nucleo di un'applicazione lineare (l'applicazione di moltiplicazione per la matrice dei coefficienti), è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Vediamo, con qualche esempio, come si trova facilmente una base per questo sottospazio.

Esempio 7.10. *Consideriamo il sistema omogeneo*

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 3x + 4z = 0 \end{array}\right. .$$

Risolvendo come visto in precedenza, si ha l'insieme delle soluzioni

$$\left\{ \left(-\frac{4}{3}t,\ \frac{1}{3}t\ ,\ t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\} .$$

Se notiamo che la generica soluzione

$$\left(-\frac{4}{3}t,\ \frac{1}{3}t\ ,\ t \right)$$

può essere scritta

$$t\ \left(-\frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\ ,\ 1 \right)$$

abbiamo subito che

$$\left[\left(-\frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\ ,\ 1 \right) \right]$$

è una base per lo spazio delle soluzioni.

Esempio 7.11. *Consideriamo ora il sistema omogeneo*

$$\left\{\begin{array}{r} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{array}\right.$$

Risolvendo col metodo esposto nel paragrafo precedente, si ha l'insieme delle soluzioni

$$\left\{ \left(\frac{3}{2}s - t \ , \ s \ , \ -2t \ , \ t \right) \mid s,t \in \mathbb{R} \right\} \ .$$

Queste soluzioni possono essere scritte anche come segue:

$$s \left(\frac{3}{2} \ , \ 1 \ , \ 0 \ , \ 0 \right) \ + \ t \ (\ -1 \ , \ 0 \ , \ -2 \ , \ 1 \ ) \ .$$

Quindi un sistema di generatori dello spazio delle soluzioni del sistema lineare è

$$\left[\left(\frac{3}{2} \ , \ 1 \ , \ 0 \ , \ 0 \right) , (\ -1 \ , \ 0 \ , \ -2 \ , \ 1 \ ) \right] \ .$$

Notiamo che s e t, essendo componenti di $\left(\ -t + \frac{3}{2}s \ , \ s \ , \ -2t \ , \ t \ \right)$ (la seconda e la quarta componente, per la precisione), danno la soluzione nulla solo quando sono tutti e due nulli. In altre parole, la soluzione nulla può essere scritta come combinazione di questi due vettori solo con scalari nulli. Quindi il sistema è linearmente indipendente ed è dunque anche una base.

Il metodo ora suggerito è utile per trovare le basi di sottospazi vettoriali definiti come nell'esempio 4.38, o per trovare basi del nucleo di qualche omomorfismo, o per trovare basi di autovettori. Tutti questi sono tipici problemi d'esame.

Osservazione 7.12. *Sia A la matrice dei coefficienti di un sistema lineare omogeneo in n incognite, sia $r := \operatorname{rk} A$ e sia*

$$m_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

l'applicazione data dalla moltiplicazione per A. L'insieme delle soluzioni del sistema è

$$\ker m_A \ .$$

Tenendo presente che la matrice associata ad m_A rispetto ai riferimenti standard è proprio A, la proposizione 6.28 implica che

$$\dim \operatorname{im} m_a = r \ .$$

Per la proposizione 5.33, si ha

$$\dim \ker m_A = n - r \ .$$

Dunque l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo in n incognite con matrice dei coefficienti di rango r, è uno spazio di dimensione $n - r$. In particolare, se $n = r$ c'è solo la soluzione nulla.

7.9. **Sistemi con parametro.** Un tipico problema sui sistemi lineari è il seguente.

Esempio 7.13. *Stabilire, per ciascun valore di $t \in \mathbb{R}$, se il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z è compatibile. Nei casi in cui lo è, determinare le soluzioni.*

$$\begin{cases} x + (1+t^2)y - z = 1 \\ x + 2y - z = 0 \\ x + 2y - tz = 0 \end{cases}$$

Questo problema prende il nome di *sistema con parametro*. Applicando i metodi generali di risoluzione, non è difficile fornire la risposta (ci sono solo dei calcoli un po' più lunghi, perché coinvolgono il parametro t).

Nel caso dell'esempio ora esposto, cominciamo a scrivere la matrice completa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+t^2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -t & 0 \end{pmatrix} .$$

Calcoliamo il rango, prima della matrice dei coefficienti, poi di quella completa. I minori di ordine due esclusivamente numerici sono tutti nulli. Consideriamo allora il minore individuato dalla prima e terza riga e prima e terza colonna:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -t \end{vmatrix} = 1 - t .$$

Consideriamo prima i valori $t \neq 1$ (studieremo a parte $t = 1$), in modo che questo minore sia non nullo. L'unico orlato nella matrice dei coefficienti è

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+t^2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -t \end{vmatrix} = (t-1)(t^2-1) .$$

Se $t \neq -1$ (oltre che $\neq 1$), questo orlato è non nullo. Quindi il rango della matrice completa, e anche di quella dei coefficienti, è tre. Per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è compatibile. Rimangono da studiare i due casi $t = -1$ e $t = 1$.

Per $t = -1$, il rango della matrice dei coefficienti è due (perché il minore di ordine due considerato sopra è un minore fondamentale, avendo nullo il suo unico orlato). Calcolando l'altro orlato nella matrice completa

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

concludiamo che il rango della matrice completa è tre. Quindi, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è incompatibile per $t = -1$.

Per $t = 1$ la matrice completa diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

La matrice dei coefficienti ha tutti gli orlati di a_{11} uguali a zero. Quindi ha rango uno (si vede anche subito dal fatto che le tre righe sono uguali e non nulle). Invece nella matrice completa si trova facilmente un orlato non nullo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 .$$

Quindi, sempre per il teorema di Rouché-Capelli, per $t = 1$ il sistema è incompatibile.

In conclusione, la risposta alla prima domanda è che il sistema è compatibile per tutti i valori di t tranne $t = -1$ e $t = 1$.

Per rispondere alla seconda domanda, basta usare la regola di Cramer per t diverso da 1 e -1 (c'è quindi una sola soluzione per ciascuno di questi infiniti valori).

8. Spazi affini

Definizione 8.1. *Uno* spazio affine *è una terna* $(X, V, \bullet)$ *tale che* X *sia un insieme,* V *uno spazio vettoriale, e* $\bullet : V \times X \to X$ *un'operazione esterna su* X *con operatori in* V *tale che, denotando con* $P + \mathbf{v}$ *il corrispondente tramite* $\bullet$ *di una qualunque coppia* $(\mathbf{v}, P) \in V \times X$ *(e continuando a denotare con* $+$ *anche l'addizione in* V*), si abbia*

1. *per ogni* $P, P' \in X$ *esiste un unico* $\mathbf{v} \in V$ *tale che*
$$P' = P + \mathbf{v} ;$$
2. *per ogni* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ *e per ogni* $P \in X$ *si ha*
$$P + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (P + \mathbf{v}) + \mathbf{w} .$$

Se $P, P' \in X$*, l'unico* $\mathbf{v} \in V$ *tale che* $P' = P + \mathbf{v}$ *viene denotato con* $P' - P$*.*

Gli elementi di X vengono spesso detti punti *e lo spazio V viene detto* spazio direttore *di X. Se V è finitamente generato, la dimensione di V viene anche detta* dimensione *di X.*

Se $P \in X$ e W è un sottospazio vettoriale di V, l'insieme

$$P + W := \{P + \mathbf{w} \, : \, \mathbf{w} \in W\}$$

si dice sottospazio affine *di X (e conserveremo la notazione del tipo $P + W$ per l'insieme sopra descritto).*

Uno spazio affine euclideo *è una 4-upla $(X, V, \bullet, s)$ tale che $(X, V, \bullet)$ sia uno spazio affine e (V, s) sia uno spazio vettoriale euclideo.*

Per semplicità di linguaggio, se $(X, V, \bullet)$ è uno spazio affine, si dice semplicemente che "X è uno spazio affine".

Esempio 8.2. *Sia $Y := P + W$ un sottospazio affine di uno spazio affine X, dove $P \in X$ e W è un sottospazio dello spazio direttore di X. Allora Y è in modo naturale anch'esso uno spazio affine, il cui spazio direttore è W e con l'operazione esterna data dalla restrizione dell'operazione esterna su X.*

Esempio 8.3. *Se V è uno spazio vettoriale, allora $(V, V, +)$ (dove $+$ è l'addizione in V) è uno spazio affine. Dunque ogni spazio vettoriale è in maniera ovvia anche uno spazio affine. In particolare, $\mathbb{R}^n$ è anche uno spazio affine.*

Proposizione 8.4. *Sia S l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare in n incognite che abbia tutte e due le matrici (dei coefficienti e completa) di rango r. Allora S è un sottospazio affine di dimensione $n - r$ dello spazio affine $\mathbb{R}^n$. In particolare, se $n = r$ c'è un'unica soluzione.*

Dimostrazione (a scelta). Per il teorema di Rouché-Capelli esiste almeno una soluzione $\overline{s} \in S$. In forma matriciale, il sistema ed il suo sistema omogeneo si scrivono

$$AX = B \, , \qquad AX = \mathbf{0} \, .$$

Per l'osservazione 7.12 l'insieme W delle soluzioni de sistema omogeneo è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - r$. Per ogni $\mathbf{w} \in W$, abbiamo

$$A \cdot (\overline{s}^{\mathrm{c}} + \mathbf{w}^{\mathrm{c}}) = A\overline{s}^{\mathrm{c}} + A\mathbf{w}^{\mathrm{c}} = B + \mathbf{0} = B \, ,$$

quindi $\overline{s} + \mathbf{w} \in S$. Viceversa, se $s \in S$, ponendo $\mathbf{w} = s - \overline{s}$ abbiamo $s = \overline{s} + \mathbf{w}$ e

$$A\mathbf{w}^{\mathrm{c}} = A \cdot (s^{\mathrm{c}} - \overline{s}^{\mathrm{c}}) = As^{\mathrm{c}} - A\overline{s}^{\mathrm{c}} = B - B = \mathbf{0} \, .$$

Dunque $S = \overline{s} + W$ ed è quindi un sottospazio affine di dimensione $n - r$ dello spazio affine $\mathbb{R}^n$. $\square$

Proposizione 8.5. *Sia S lo spazio ordinario, sia $\mathcal{V}$ lo spazio dei vettori liberi, sia $\bullet$ data dalla definizione 2.17 e sia s il prodotto scalare geometrico (cfr. definizione 6.75). Allora $(S, \mathcal{V}, \bullet, s)$ è uno spazio affine euclideo di dimensione tre. I sottospazi di dimensione uno sono le rette e i sottospazi di dimensione due sono i piani.*

Dimostrazione - non richiesta per l'esame. Il fatto che $(S, \mathcal{V}, \bullet, s)$ sia uno spazio affine euclideo di dimensione tre si deduce subito dalla proposizione 2.16, dalla definizione 2.23, dall'esempio 4.3, dalla proposizione 4.54 e dall'esempio 6.76.

Il fatto che ogni retta sia un sottospazio di dimensione uno e ogni piano sia un sottospazio di dimensione due si deduce subito dall'osservazione 4.48 e dalle proposizioni 4.51 e 4.53.

Se, viceversa, $P + \mathcal{W}$ è un sottospazio affine di dimensione uno, sia $[\mathbf{u}]$ una base di $\mathcal{W}$. Siccome il vettore $\mathbf{u}$ è non nullo, esiste un'unica retta r passante per P e parallela ad $\mathbf{u}$ (che poi è la retta passante per i due punti distinti P e $P + \mathbf{u}$). Dunque i vettori paralleli ad r sono esattamente i vettori di $\mathcal{W}$, e quindi (sempre per l'osservazione 4.48) r coincide con $P + \mathcal{W}$. Questo prova che ogni sottospazio affine di dimensione uno è una retta.

Se infine $P + \mathcal{W}$ è un sottospazio affine di dimensione due, sia $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ una base di $\mathcal{W}$. Poiché $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono indipendenti non possono essere paralleli, dunque i tre punti P, $P + \mathbf{u}$ e $P + \mathbf{v}$ non sono allineati. Esiste allora un unico piano π che contiene tali punti. Lo spazio dei vettori paralleli a π contiene $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e ha dimensione due (per la proposizione 4.53). Dunque lo spazio dei vettori paralleli a π è $\mathcal{W}$, e quindi (sempre per l'osservazione 4.48) π coincide con $P + \mathcal{W}$. Questo prova che ogni sottospazio affine di dimensione due è un piano. $\square$

Osservazione 8.6. *Per l'osservazione 4.48 lo* spazio direttore *di una retta o di un piano è l'insieme dei vettori ad essi paralleli.*

La proposizione ora dimostrata costituisce il moderno punto di partenza per la geometria dello spazio ordinario. Tutti gli assiomi della geometria elementare, e quindi tutta la geometria elementare, possono essere ricostruiti sulla sola base della definizione di "spazio affine euclideo di dimensione tre". Inoltre il campo di applicabilità dei teoremi dimostrati su questa base è estremamente vasto, in quanto le strutture coinvolte (spazi vettoriali, prodotti scalari, ecc.) si riscontrano in moltissime situazioni diverse, tanto nella matematica pura quanto nella realtà fisica.

A riprova dell'efficacia di questi metodi, vedremo nei prossimi paragrafi come si possano rapidamente ottenere i risultati principali della geometria analitica.

8.1. **Riferimenti.**

Definizione 8.7. *Un* riferimento *di uno spazio affine X (con spazio direttore finitamente generato) è una coppia $(O, \mathcal{B})$, dove O è un punto di X, detto* origine, *e $\mathcal{B}$ è un riferimento vettoriale dello spazio direttore. Le* coordinate *di un punto $P \in X$ rispetto al riferimento $(O, \mathcal{B})$ sono le componenti di $P - O$ rispetto a $\mathcal{B}$.*

Proposizione 8.8. *Sia $(O, \mathcal{B})$ un riferimento di uno spazio affine, sia P un punto di coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ e sia $\mathbf{v}$ un vettore di componenti $(l_1, \ldots, l_n)$ (rispetto al riferimento vettoriale $\mathcal{B}$). Allora le coordinate del punto $P + \mathbf{v}$ sono*

$$(x_1 + l_1, \ldots, x_n + l_n) \ .$$

Dimostrazione. Poniamo $Q = P + \mathbf{v}$, così che $Q - P = \mathbf{v}$. Dunque

$$Q - O = (P - O) + (Q - P) = (P - O) + \mathbf{v}.$$

Siccome le componenti di $P - O$ sono $(x_1, \ldots, x_n)$ e le componenti di $\mathbf{v}$ sono $(l_1, \ldots, l_n)$ le componenti di $Q - O$ sono $(x_1 + l_1, \ldots, x_n + l_n)$ perché la coordinazione è un'applicazione lineare. Quindi le coordinate di $Q = P + \mathbf{v}$ sono $(x_1 + l_1, \ldots, x_n + l_n)$, come volevamo dimostrare. $\square$

Proposizione 8.9. *Sia $(O, \mathcal{B})$ un riferimento di uno spazio affine e siano P, P' punti di coordinate rispettivamente $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(x'_1, \ldots, x'_n)$. Allora le componenti del vettore $P' - P$ sono*

$$(x'_1 - x_1, \ldots, x'_n - x_n) \ .$$

Dimostrazione. Basta osservare che $P' = P + (P' - P)$ e applicare la proposizione precedente. $\square$

8.2. **Cambio di riferimento.**

Proposizione 8.10. *Siano $(O, \mathcal{B})$ e $(O', \mathcal{B}')$ riferimenti di uno spazio affine, sia P un qualunque punto, sia $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ il vettore delle coordinate di P rispetto al primo riferimento e $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$ il vettore delle cordinate di P rispetto al secondo. Allora, posto $X := \mathbf{x}^{\mathrm{c}}$ e $X' := \mathbf{x}'^{\mathrm{c}}$ si ha*

$$X' = BX + C \ ,$$

dove B è la matrice del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, e $C := \mathbf{c}^{\mathrm{c}}$, con $\mathbf{c}$ vettore delle coordinate di O rispetto ad $(O', \mathcal{B}')$.

Dimostrazione. Per definizione di coordinate, $\mathbf{x}$ è il vettore delle componenti di $P - O$ rispetto a $\mathcal{B}$ e X' è il vettore delle componenti di $P - O'$ rispetto a $\mathcal{B}'$. Per l'osservazione 6.30, BX è data dalle componenti di $P - O$ rispetto a $\mathcal{B}'$. Siccome

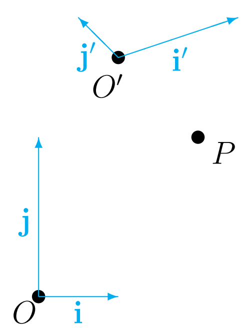
$$P = O + (P - O) \ ,$$

la proposizione 8.8 (applicata al riferimento $(O', \mathcal{B}')$) prova che

$$X' = C + BX \ ,$$

come volevamo. $\square$

Esempio 8.11. *Consideriamo i seguenti riferimenti e il seguente punto P del piano del foglio.*



Le componenti di $\mathbf{i}$ rispetto ad $(\mathbf{i}', \mathbf{j}')$ sono $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Le componenti di $\mathbf{j}$ rispetto ad $(\mathbf{i}', \mathbf{j}')$ sono $(1, 3)$. Quindi la matrice del cambio da $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ a $(\mathbf{i}', \mathbf{j}')$ è la matrice che ha per colonne tali coppie:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \ .$$

Le coordinate di O rispetto ad $(O', (\mathbf{i}', \mathbf{j}'))$ sono $(-2, -4)$. Dunque la formula che ci dà le coordinate $X' = (x', y')$ di un qualunque punto nel riferimento $(O', (\mathbf{i}', \mathbf{j}'))$ a partire dalle coordinate $X = (x, y)$ nel riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ è:

$$\begin{pmatrix} x' \\ \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ \\ -4 \end{pmatrix} .$$

Scritte per esteso:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + y - 2 \\ \\ y' = -\frac{1}{2}x + 3y - 4 \end{cases} .$$

A titolo di verifica, se misuriamo le coordinate del punto P, abbiamo $(x, y) = (2, 1)$ e $(x', y') = (0, -2)$. Sono dunque in accordo con la formula data.

9. Rudimenti di geometria analitica

9.1. Rappresentazione parametrica di una retta.

Definizione 9.1. *Sia r una retta. Un* vettore direzionale *di r è un vettore non nullo parallelo ad r. Fissato un riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ dello spazio (ordinario), le componenti (l, m, n) di un vettore direzionale di r vengono dette* numeri direttori *(o* parametri direttori*) di r, rispetto al riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$.*

Definizione 9.2. *Dei vettori numerici $(x_1, \ldots, x_n)$ ed $(y_1, \ldots, y_n)$ sono detti* proporzionali *se esiste un numero reale h tale che*

$$(x_1, \ldots, x_n) = h(y_1, \ldots, y_n)$$

oppure

$$(y_1, \ldots, y_n) = h(x_1, \ldots, x_n) .$$

Se $(x_1, \ldots, x_n) = h(y_1, \ldots, y_n)$, a volte si dice anche che $(x_1, \ldots, x_n)$ è multiplo *di $(y_1, \ldots, y_n)$.*

Osservazione 9.3. *Una terna di numeri direttori non può mai essere $(0, 0, 0)$, perché i vettori direzionali sono non nulli. Poiché i vettori non nulli paralleli ad r sono tutti multipli l'uno dell'altro, ogni retta ha infinite terne di numeri direttori (rispetto ad un fissato riferimento), tutte proporzionali tra loro. Questo fatto può anche essere espresso dicendo che una terna di numeri direttori (rispetto ad un fissato riferimento) è definita a meno di un fattore non nullo di proporzionalità.*

Proposizione 9.4. *Sia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ un riferimento dello spazio, sia P_0 un punto di coordinate (x_0, y_0, z_0), sia $\mathbf{v}$ un vettore non nullo di componenti (l, m, n) e sia r la retta contenente P_0 e parallela a $\mathbf{v}$. Se P è un qualunque punto dello spazio e (x, y, z) sono le sue coordinate, si ha*

$$P \in r \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

Dimostrazione. Si ha

$$P \in r \overset{Oss.\ 4.48}{\iff} P - P_0 \text{ è parallelo a } \mathbf{v} \iff \exists t \in \mathbb{R} : P - P_0 = t\mathbf{v}.$$

Siccome

$$P - P_0 = t\mathbf{v} \iff P = P_0 + t\mathbf{v} \overset{Prop.\ 8.8}{\iff} (x, y, z) = (x_0 + tl, y_0 + tm, z_0 + tn)$$

concludiamo

$$P \in r \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

come volevamo dimostrare. □

Definizione 9.5. *Nella situazione della proposizione ora dimostrata, l'affermazione*

$$P \in r \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

viene sinteticamente espressa dicendo che

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

sono le equazioni parametriche *(o una* rappresentazione parametrica*) della retta r rispetto al riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$, con parametro t.*

Osservazione 9.6. *Fissato un riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ dello spazio, ogni retta r può sempre essere rappresentata con delle equazioni parametriche: se (x_0, y_0, z_0) sono le coordinate di un punto di r ed (l, m, n) sono i numeri direttori di r, le equazioni parametriche di r si scrivono subito:*

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

Osservazione 9.7. *Se x_0, y_0, z_0, l, m, n sono numeri reali, con l, m, n non tutti nulli, allora scrivendo*

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

si ottiene sempre una rappresentazione parametrica di qualche retta: di quella passante per il punto di coordinate (x_0, y_0, z_0) e parallela al vettore di componenti (l, m, n).

Esempio 9.8. *Fissato un riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ dello spazio, sia P_0 il punto di coordinate $(1, 2, 3)$ e $\mathbf{v}$ il vettore di componenti $(4, 5, 6)$. Allora la retta passante per P_0 e parallela a $\mathbf{v}$ ha equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 + 6t \end{cases} .$$

Dunque i suoi punti si ottengono tutti assegnando a t tutti i possibili valori reali (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene P_0, per $t = 1$ si ottiene il punto di coordinate $(5, 7, 9)$, per $t = -2$ si ottiene il punto di coordinate $(-7, -8, -9)$, ecc.).

9.2. **Rappresentazione parametrica di un piano.**

Proposizione 9.9. *Sia P_0 un punto dello spazio e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori non paralleli tra loro (in particolare, sono quindi non nulli). Allora esiste un unico piano π passante per P_0 e parallelo ai due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e si ha*

$$P \in \pi \iff \exists t, s \in \mathbb{R} : P = P_0 + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} .$$

Dimostrazione (a scelta). Siccome i due vettori non sono paralleli, il sistema $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ è linearmente indipendente per l'osservazione 4.52. Quindi il sottospazio generato $\mathcal{W} = \langle[\mathbf{u}, \mathbf{v}]\rangle$ ha dimensione due. Per la proposizione 8.5, il sottospazio affine

$$\pi := P_0 + \mathcal{W}$$

è un piano (che poi è l'unico piano che passa per i punti P_0, $P_0 + \mathbf{u}$ e $P_0 + \mathbf{v}$). Per l'osservazione 4.48, π è parallelo ai due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e contiene ovviamente P_0, come si voleva.

Per dimostrare l'unicità si può usare l'assioma 1.65, o ragionare in modo "più affine" come segue. Supponiamo che π' sia un piano passante per P_0 e parallelo ai due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e consideriamo il suo spazio direttore $\mathcal{W}'$. Dunque i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ appartengono a $\mathcal{W}'$. Poiché $\mathcal{W}'$ ha dimensione 2 (per la proposizione 4.53), e poiché $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono indipendenti, applicando la proposizione 6.50, otteniamo che $[\mathbf{u},\mathbf{v}]$ è una base di $\mathcal{W}'$. Quindi $\mathcal{W}'=\mathcal{W}$. Siccome per l'osservazione 4.48 si ha $\pi'=P_0+\mathcal{W}'$, deduciamo che $\pi'=\pi$.

Infine notiamo che

$$P\in\pi \iff \exists \mathbf{w}\in\mathcal{W} : P=P_0+\mathbf{w}\ ;$$

e che inoltre, siccome $\mathcal{W}$ è il sottospazio generato da $(\mathbf{u},\mathbf{v})$, si ha

$$\mathbf{w}\in\mathcal{W} \iff \exists t,s\in\mathbb{R} : \mathbf{w}=t\mathbf{u}+s\mathbf{v}.$$

Quindi si ha

$$P\in\pi \iff \exists t,s\in\mathbb{R} : P=P_0+t\mathbf{u}+s\mathbf{v}\ ,$$

come volevamo. □

Proposizione 9.10. *Sia $(O,(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}))$ un riferimento dello spazio, sia P_0 un punto di coordinate (x_0,y_0,z_0), siano $\mathbf{u},\mathbf{u}'$ due vettori non paralleli e siano (l,m,n), (l',m',n') rispettivamente le loro componenti. Detto π l'unico piano passante per P_0 e parallelo ai due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u}'$ e se P è un punto di cordinate (x,y,z), si ha*

$$P\in\pi \iff \exists t,t'\in\mathbb{R} : \begin{cases} x=x_0+lt+l't' \\ y=y_0+mt+m't' \\ z=z_0+nt+n't' \end{cases}$$

Dimostrazione. Si ha

$$P\in\pi \overset{Prop.\ 9.9}{\iff} \exists t,t'\in\mathbb{R} : P=P_0+t\mathbf{u}+t'\mathbf{u}' \overset{Prop.\ 8.8}{\iff}$$
$$\exists t,t'\in\mathbb{R} : (x,y,z)=(x_0+lt+l't', y_0+mt+m't', z_0+nt+n't').$$

Concludiamo che

$$P\in\pi \iff \exists t,t'\in\mathbb{R} : \begin{cases} x=x_0+lt+l't' \\ y=y_0+mt+m't' \\ z=z_0+nt+n't' \end{cases} .$$

□

Definizione 9.11. *Nella situazione della proposizione ora dimostrata, l'affermazione*

$$P\in r \iff \exists t,t'\in\mathbb{R} : \begin{cases} x=x_0+lt+l't' \\ y=y_0+mt+m't' \\ z=z_0+nt+n't' \end{cases}$$

viene sinteticamente espressa dicendo che

$$\begin{cases} x = x_0 + lt + l't' \\ y = y_0 + mt + m't' \\ z = z_0 + nt + n't' \end{cases}$$

sono le equazioni parametriche *(o una* rappresentazione parametrica*) del piano π rispetto al riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$, con* parametri t, t'.

Naturalmente, al posto di t, t' possono essere usate anche altre lettere.

Osservazione 9.12. *Fissato un riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ dello spazio, ogni piano π può essere rappresentato con delle equazioni parametriche: basta scegliere un punto $P_0 \in \pi$ e una base dello spazio direttore di π, cioè due vettori paralleli a π, non paralleli tra loro.*

Esempio 9.13. *Fissiamo nello spazio un riferimento, e consideriamo il punto P_0 di coordinate $(4, 6, 8)$ e i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, rispettivamente di componenti $(1, 2, 3)$ e $(-1, 0, 4)$. Poiché le terne $(1, 2, 3)$ e $(-1, 0, 4)$ non sono proporzionali, i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ non sono paralleli. Quindi esiste un unico piano π contenente il punto P_0 e parallelo ai vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Le equazioni parametriche di π si scrivono subito:*

$$\begin{cases} x = 4 + t - s \\ y = 6 + 2t \\ z = 8 + 3t + 4s \end{cases}$$

(con parametri t, s).

Osservazione 9.14. *Abbiamo visto che ogni piano può essere rappresentato con equazioni parametriche. Viceversa, se x_0, y_0, z_0, l, m, n, l', m', n' sono numeri reali tali che le terne (l, m, n) e (l', m', n') non siano proporzionali, allora scrivendo*

$$\begin{cases} x = x_0 + lt + l't' \\ y = y_0 + mt + m't' \\ z = z_0 + nt + n't' \end{cases} ,$$

otteniamo sicuramente le equazioni parametriche di qualche piano: di quello passante per il punto di coordinate (x_0, y_0, z_0) e parallelo ai vettori di componenti rispettivamente (l, m, n) ed (l', m', n').

9.3. **Equazione cartesiana di un piano.**

Proposizione 9.15. *Sia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ un riferimento dello spazio e sia π un piano. Allora esistono $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che, se P è un qualunque punto dello spazio e (x, y, z) sono le sue coordinate, si ha*

$$P \in \pi \iff ax + by + cz + d = 0.$$

Inoltre a, b, c non possono essere tutti nulli.

Dimostrazione (a scelta). Sia P_0 un punto di π e sia $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ un riferimento vettoriale dello spazio direttore di π. Siano (l, m, n) e (l', m', n') le componenti rispettivamente di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e siano (x_0, y_0, z_0) le coordinate di P_0.

Per l' osservazione 4.48, P appartiene a π se e solo se $P - P_0$ appartiene allo spazio direttore di π. Poiché $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ è una base di tale spazio direttore, tenendo presente la proposizione 4.18, possiamo dire che

$$P \in \pi \iff (P - P_0, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ è un sistema linearmente dipendente.}$$

La dipendenza di un sistema di vettori equivale alla dipendenza del corrispondente sistema dei vettori delle componenti. Quindi, tenendo presente la proposizione 8.9, si ha

$$P \in \pi \iff \big(\, (x - x_0, y - y_0, z - z_0),\ (l, m, n),\ (l', m', n')\, \big) \text{ è lin. dip.}$$

A questo punto consideriamo la matrice che ha per righe i tre vettori numerici $(x-x_0, y-y_0, z-z_0), (l, m, n), (l', m', n')$: il suo determinante è nullo se e solo se i tre vettori sono dipendenti (per le proposizioni 6.1 e 6.10). Quindi abbiamo

$$P \in \pi \iff \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0 \ .$$

A questo punto, sviluppando il determinante secondo la prima riga e ponendo

$$a = \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix},\ b = -\begin{vmatrix} l & n \\ l' & n' \end{vmatrix},\ c = \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix},\ d = -ax_0 - by_0 - cz_0$$

otteniamo

$$P \in r \iff ax + by + cz + d = 0,$$

come volevamo.

Il fatto che a, b, c non possono essere tutti nulli si deduce facilmente dal fatto che (l, m, n) e (l', m', n') non sono proporzionali, o anche osservando che un'equazione con a, b, c tutti nulli rappresenta l'insieme vuoto (se $d \neq 0$) oppure tutto lo spazio (se $d = 0$). $\square$

Definizione 9.16. *Nella situazione della proposizione ora dimostrata, l'affermazione*

$$P \in \pi \iff ax + by + cz + d = 0,$$

viene sinteticamente espressa dicendo che

$$ax + by + cz + d = 0$$

è un'equazione cartesiana (ordinaria) *del piano* π *(nell'assegnato riferimento* $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$*).*

In sintesi, l'insieme delle terne di coordinate dei punti di π coincide con l'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Proposizione 9.17. *Una qualsiasi equazione del tipo* $ax+by+cz+d = 0$ *con* $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ *rappresenta un piano, e se due equazioni di questo tipo rappresentano lo stesso piano allora sono l'una multiplo dell'altra.*

Tralasciamo la dimostrazione.

Osservazione 9.18. *Dalla dimostrazione della proposizione 9.15 si ricava la seguente formula "pratica" per calcolare l'equazione di un piano che contenga un punto di coordinate* (x_0, y_0, z_0) *e sia parallelo a due vettori di componenti* (l, m, n) *e* (l', m', n')*, non paralleli tra loro:*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0\ .$$

9.4. Rappresentazione cartesiana di una retta nello spazio.

Proposizione 9.19. *Una retta si può sempre ottenere come intersezione di due piani.*

Tralasciamo la dimostrazione.

Proposizione 9.20. *Sia* $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ *un riferimento dello spazio e sia* r *una retta. Allora esistono* $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{R}$ *tali che, se* P *è un qualunque punto dello spazio e* (x, y, z) *sono le sue coordinate, si ha*

$$P \in r \iff (\ ax + by + cz + d = 0 \quad e \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0\ ).$$

Dimostrazione. Per la proposizione precedente, esistono piani π e π' tali che

$$r = \pi \cap \pi'.$$

Se le equazioni cartesiane dei due piani sono

$$\pi : ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{e} \qquad \pi' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

allora abbiamo che

$$\begin{aligned} P \in r &\iff (P \in \pi \text{ e } P \in \pi') \\ &\iff (ax + by + cz + d = 0 \quad \text{e} \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0)\ , \end{aligned}$$

come volevamo. □

Definizione 9.21. *Nella situazione della proposizione ora dimostrata, l'affermazione*

$$P \in r \iff (ax + by + cz + d = 0 \quad e \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0)$$

viene sinteticamente espressa dicendo che

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

è una rappresentazione cartesiana (ordinaria) *della retta* r.

In sintesi, l'insieme delle terne di coordinate dei punti di r coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} .$$

Proposizione 9.22. *Fissato un riferimento nello spazio, una terna di numeri direttori della retta rappresentata da*

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

è data da

$$\left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right) .$$

Tralasciamo la dimostrazione.

9.5. **Condizioni di parallelismo.**

Proposizione 9.23. *(Condizione di parallelismo tra rette). Siano* r *ed* r' *rette. Fissato un riferimento dello spazio, sia* (l, m, n) *una terna di numeri direttori di* r *e sia* (l', m', n') *una terna di numeri direttori di* r'. *Si ha:*

$$r \text{ ed } r' \text{ sono parallele} \iff (l, m, n) \text{ ed } (l', m', n') \text{ sono proporzionali.}$$

Dimostrazione. Siccome (l, m, n) è una terna di numeri direttori di r, il vettore $\mathbf{v}$ di componenti (l, m, n) è un vettore direzionale di r, cioè è un vettore non nullo parallelo ad r. Allo stesso modo, il vettore $\mathbf{v}'$ di componenti (l', m', n') è un vettore non nullo parallelo ad r'. Quindi si ha che

$$\begin{aligned} r \text{ ed } r' \text{ sono parallele} &\iff \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{v}' \text{ sono paralleli} \iff \\ &\iff \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{v}' \text{ sono l'uno multiplo dell'altro} \iff \\ &\iff (l, m, n) \text{ ed } (l', m', n') \text{ sono proporzionali,} \end{aligned}$$

come volevamo. □

La condizione di parallelismo può essere utile per verificare se due rette sono o meno sghembe (vedi definizione 1.76): un'esercizio che spesso serve saper risolvere nelle prove scritte (si tenga presente lo schema riassuntivo appena prima dell'osservazione 1.78).

Definizione 9.24. *Sia π un piano, si fissi un riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ dello spazio e sia*

$$ax + by + cz + d = 0$$

un'equazione cartesiana di π. La terna (a, b, c) viene detta una terna di parametri di giacitura *di π rispetto a $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$.*

Osservazione 9.25. *Per le proposizioni 9.15 e 9.17, le terne di parametri di giacitura di un piano sono non nulle e tutte proporzionali tra loro.*

Proposizione 9.26. *(Condizione di parallelismo tra piani). Siano π e π' piani. Fissato un riferimento dello spazio, siano (a, b, c) parametri di giacitura di π ed (a', b', c') parametri di giacitura di π'. Si ha:*

$$\pi \text{ e } \pi' \text{ sono paralleli} \iff (a, b, c) \text{ ed } (a', b', c') \text{ sono proporzionali.}$$

Dimostrazione (a scelta). Dire che (a, b, c) sono parametri di giacitura di π vuol dire che sono i tre coefficienti di un'equazione cartesiana di π:

$$\pi : ax + by + cz + d = 0.$$

Allo stesso modo, un'equazione cartesiana di π' sarà:

$$\pi' : a'x + b'y + c'z + d' = 0.$$

Consideriamo il sistema lineare costituito dalle due equazioni:

$$\begin{cases} ax + by + cz = -d \\ a'x + b'y + c'z = -d' \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti e la matrice completa sono:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & c & -d \\ a' & b' & c' & -d' \end{pmatrix}.$$

Siccome le matrici A e B sono non nulle, il loro rango è maggiore di 0; siccome sono matrici con due righe, il loro rango è al massimo 2; siccome A è una sottomatrice di B, il rango di A è minore o uguale al rango di B. Abbiamo quindi tre casi possibili:

1. $\operatorname{rk} A = 1, \quad \operatorname{rk} B = 1$,
2. $\operatorname{rk} A = 1, \quad \operatorname{rk} B = 2$,
3. $\operatorname{rk} A = 2, \quad \operatorname{rk} B = 2$.

Nel caso 1, poiché $\operatorname{rk} B = 1$, un sistema massimo di righe indipendenti è fatto da una sola riga. Quindi le due righe di B sono proporzionali tra loro. Dunque le due equazioni sono proporzionali fra loro, e quindi rappresentano lo stesso piano, cioè $\pi = \pi'$.

Nel caso 2, poiché i ranghi delle due matrici sono diversi, per il teorema di Rouché-Capelli (proposizione 7.3), il sistema è incompatibile. Quindi in questo caso $\pi \cap \pi' = \emptyset$.

Nel caso 3, per il teorema di Rouché-Capelli abbiamo che il sistema ammette qualche soluzione, e dalla proposizione 9.17 deduciamo che, siccome le due equazioni non sono proporzionali, deve essere $\pi \neq \pi'$.

Riassumendo:

$$\text{caso } 1 \Rightarrow \pi \text{ e } \pi' \text{ impropriamente paralleli}$$

$$\text{caso } 2 \Rightarrow \pi \text{ e } \pi' \text{ propriamente paralleli}$$

$$\text{caso } 3 \Rightarrow \pi \text{ e } \pi' \text{ non paralleli.}$$

Quindi i piani sono paralleli se e solo se si presenta il caso 1 o il caso 2. Ma questi sono esattamente i casi in cui $\operatorname{rk} A = 1$. Dunque abbiamo che

$$\pi \text{ e } \pi' \text{paralleli} \iff \operatorname{rk} A = 1.$$

Ma siccome $\operatorname{rk} A = 1$ se e solo se (a, b, c) e (a', b', c') sono proporzionali, abbiamo l'asserto. □

Proposizione 9.27. *Sia* $\mathbf{v}$ *un vettore libero e* π *un piano. Fissato un riferimento dello spazio, siano* (l, m, n) *le componenti di* $\mathbf{v}$ *ed* (a, b, c) *i parametri di giacitura di* π*. Si ha:*

$$\mathbf{v} \textit{ è parallelo a } \pi \iff al + bm + cn = 0 \ .$$

Dimostrazione (a scelta). Scegliamo un punto P_0 a piacere su π e siano (x_0, y_0, z_0) le sue coordinate. Siccome (a, b, c) sono parametri di giacitura di π allora c'è un'equazione cartesiana di π del tipo:

$$\pi : ax + by + cz + d = 0 \ .$$

Poniamo ora

$$Q_0 = P_0 + \mathbf{v} \ .$$

Per l'osservazione 4.48 si ha

$$\mathbf{v} \text{ è parallelo a } \pi \iff Q_0 \in \pi \tag{7}$$

Per la proposizione 8.8, le coordinate di Q_0 sono (x_0+l, y_0+m, z_0+n), dunque

$$Q_0 \in \pi \iff a(x_0 + l) + b(y_0 + m) + c(z_0 + n) + d = 0 \ . \tag{8}$$

Siccome $P_0 \in \pi$ abbiamo

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \ ,$$

e quindi

(9)
$$a(x_0 + l) + b(y_0 + m) + c(z_0 + n) + d =$$
$$= (al + bm + cn) + (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) = al + bm + cn \ .$$

Da (7), (8), (9) si deduce subito

$$\mathbf{v} \text{ è parallelo a } \pi \iff al + bm + cn = 0 \ ,$$

come volevamo. □

Proposizione 9.28. *(Condizione di parallelismo tra retta e piano). Sia r una retta e sia π un piano. Fissato un riferimento dello spazio, siano (l, m, n) i numeri direttori di r ed (a, b, c) i parametri di giacitura di π. Si ha:*

$$r \text{ e } \pi \text{ sono paralleli} \iff al + bm + cn = 0 \ .$$

Dimostrazione. Siccome (l, m, n) sono numeri direttori di r, il vettore $\mathbf{v}$ di componenti (l, m, n) è parallelo ad r. Dunque r e π sono paralleli se e solo se $\mathbf{v}$ e π sono paralleli. Dunque, l'asserto segue subito dalla proposizione 9.27. □

9.6. **Fascio di piani.** Fissato un riferimento nello spazio, consideriamo una retta r rappresentata da

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

e sia π un piano che la contiene. Preso un punto $P \in \pi \smallsetminus r$, siano $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ le sue coordinate e poniamo

$$\lambda := a'\bar{x} + b'\bar{y} + c'\bar{z} + d' \ , \quad \mu := -a\bar{x} - b\bar{y} - c\bar{z} - d \ .$$

Si ha $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ perché $P \notin r$. L'equazione che si ottiene con la combinazione lineare

$$\lambda\,(ax + by + cz + d) + \mu\,(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

è ancora l'equazione di un piano,

$$(\lambda a + \mu a')\,x + (\lambda b + \mu b')\,y + (\lambda c + \mu c')\,z + (\lambda d + \mu d') = 0 \ ,$$

perché i tre coefficienti non possono essere nulli in quanto $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ e (a, b, c) , (a', b', c') non sono proporzionali (sono i parametri di giacitura di due piani che hanno per intersezione r, e che quindi non sono paralleli).

Notiamo che sia le coordinate di P che quelle di un qualunque punto di r soddisfano questa equazione. Per la proposizione 1.68, questa deve essere un'equazione di π.

Concludiamo che qualunque piano contenente r ha un'equazione che è combinazione delle due equazioni di r. Viceversa, ogni combinazione lineare con coefficienti non tutti e due nulli rappresenta un piano contenente r.

L'insieme dei piani che contengono r viene detto *fascio (proprio) di piani di asse* r. Possiamo dire che la sua rappresentazione cartesiana è

$$\lambda\,(ax + by + cz + d) + \mu\,(a'x + b'y + c'z + d') = 0\ ,$$

nel senso che al variare di tutte le coppie $(\lambda, \mu) \neq 0$ si ottengono le equazioni di tutti i piani del fascio.

Menzioniamo che l'insieme di tutti i piani paralleli ad un dato piano viene detto *fascio improprio di piani*.

9.7. **Relazione tra prodotto scalare geometrico e numerico.** Vediamo ora che collegamento c'è tra il prodotto scalare di vettori liberi e il prodotto scalare standard di vettori numerici.

Definizione 9.29. *Un riferimento dello spazio ordinario, o di un suo sottospazio, sarà detto* monometrico *se i vettori del riferimento vettoriale sono tutti versori, e sarà detto* ortogonale *se sono a due a due ortogonali tra loro.*

Un asse *di un riferimento è una retta orientata passante per l'origine e parallela e concorde ad uno dei vettori del riferimento vettoriale.*

Osservazione 9.30. *Sia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ un riferimento monometrico ortogonale dello spazio. Per la proposizione 2.39, (2) si ha*

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1\ , \qquad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1\ , \qquad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

e per la proposizione 2.38, si ha

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0\ , \qquad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0\ , \qquad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0\ .$$

Proposizione 9.31. *Sia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ un riferimento dello spazio e siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vettori liberi rispettivamente di componenti (l, m, n) e (l', m', n'). Se il riferimento è monometrico ortogonale, allora si ha*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = ll' + mm' + nn'$$

(in altre parole: in un riferimento monometrico ortogonale, il prodotto scalare di vettori liberi è uguale al prodotto scalare standard dei vettori delle componenti).

Dimostrazione. Per definizione di componenti, si ha

$$\mathbf{v} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}\,, \qquad \mathbf{w} = l'\mathbf{i} + m'\mathbf{j} + n'\mathbf{k}\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} &= (l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k})\cdot(l'\mathbf{i} + m'\mathbf{j} + n'\mathbf{k}) = \\ &= ll'\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + lm'\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + ln'\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} + \\ &\quad + ml'\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + mm'\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + mn'\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} + \\ &\quad + nl'\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} + nm'\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} + nn'\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = \\ &\overset{\text{Oss. 9.30}}{=} ll' + mm' + nn'\,,\end{aligned}$$

come volevamo. □

9.8. **Componenti di un prodotto vettoriale.** Ricordiamo che per definire il prodotto vettoriale si assume fissata un'orientazione (definizione 6.42).

Proposizione 9.32. *Sia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ un riferimento monometrico ortogonale tale che $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ abbia la stessa orientazione fissata per il prodotto vettoriale, sia $\mathbf{v}$ un vettore di componenti (l, m, n) e $\mathbf{w}$ un vettore di componenti (l', m', n'). Allora le componenti di $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$ sono*

$$\left(\begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}, \; -\begin{vmatrix} l & n \\ l' & n' \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix} \right),$$

cioè i tre minori di ordine due, con il secondo cambiato di segno, della matrice che ha per righe le componenti di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

Dimostrazione (a scelta). Dalla definizione del prodotto vettoriale, tenendo presente che $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ sono versori a due a due ortogonali, e che l'orientazione di $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ è concorde all'orientazione fissata (rispetto a cui facciamo il prodotto vettoriale), si ha

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{i}\wedge\mathbf{i} = \mathbf{0}\,, & \mathbf{j}\wedge\mathbf{j} = \mathbf{0}\,, & \mathbf{k}\wedge\mathbf{k} = \mathbf{0} \\ \mathbf{i}\wedge\mathbf{j} = \mathbf{k}\,, & \mathbf{j}\wedge\mathbf{k} = \mathbf{i}\,, & \mathbf{k}\wedge\mathbf{i} = \mathbf{j} \end{array}$$

Dunque, per la proposizione 6.44, abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\wedge\mathbf{w} &= (l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k})\wedge(l'\mathbf{i} + m'\mathbf{j} + n'\mathbf{k}) = \\ &= ll'\,\mathbf{i}\wedge\mathbf{i} + lm'\,\mathbf{i}\wedge\mathbf{j} + ln'\,\mathbf{i}\wedge\mathbf{k} + \\ &\quad + ml'\,\mathbf{j}\wedge\mathbf{i} + mm'\,\mathbf{j}\wedge\mathbf{j} + mn'\,\mathbf{j}\wedge\mathbf{k} + \\ &\quad + nl'\,\mathbf{k}\wedge\mathbf{i} + nm'\,\mathbf{k}\wedge\mathbf{j} + nn'\,\mathbf{k}\wedge\mathbf{k} = \\ &= (mn' - m'n)\mathbf{i} - (ln' - l'n)\mathbf{j} + (lm' - l'm)\mathbf{k}\,.\end{aligned}$$

Quindi le componenti di $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$ sono

$$\left(mn' - m'n,\; -(ln' - l'n),\; lm' - l'm \right)$$

come volevamo. □

9.9. **Formula per il modulo di un vettore libero.**

Proposizione 9.33. *Sia fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale* $(O,(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}))$*. Per ogni vettore libero* $\mathbf{v}$*, dette* (l,m,n) *le sue componenti, si ha*

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{l^2+m^2+n^2}\ .$$

Dimostrazione. Basta osservare che

$$|\mathbf{v}| \overset{\text{Prop. } 2.39,\ (2)}{=} \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} \overset{\text{Prop. } 9.31}{=} \sqrt{l^2+m^2+n^2}\ .$$

9.10. **Distanza tra due punti.**

Definizione 9.34. *Si dice* distanza *tra due punti* A *e* B *il modulo del segmento* $\overline{AB}$*. Tale distanza sarà indicata con* $d(A,B)$*.*

Proposizione 9.35. *Sia fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale* $(O,(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}))$*. Se* P *e* P' *sono punti di coordinate rispettivamente* (x,y,z) *ed* (x',y',z') *allora la distanza tra* P *e* P' *è data da*

$$d(P,P') = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}\ .$$

Dimostrazione. Si ha

$$d(P,P') = |\overline{PP'}| = |P'-P| \overset{\textit{Prop. } 8.9, \textit{Prop. } 9.33}{=} \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}\ ,$$

come volevamo. □

9.11. **Coseni direttori.**

Per descrivere numericamente la direzione di una retta r, abbiamo introdotto i numeri direttori, e abbiamo visto che le terne di numeri direttori sono infinite e proporzionali tra loro. Se il riferimento scelto è monometrico ortogonale, per alcuni tipi di problemi di carattere metrico (riguardanti cioè le distanze) risulta comoda una particolare scelta dei numeri direttori.

Definizione 9.36. *Sia fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale. I* coseni direttori *di una retta* r *sono le componenti di un versore parallelo ad* r*. I* coseni direttori *di una retta orientata* $\vec{r}$ *sono le componenti di un versore parallelo e concorde ad* $\vec{r}$*.*

Poiché un versore parallelo ad r è in particolare un vettore direzionale di r, una terna di coseni direttori (λ, μ, ν) è una particolare terna di numeri direttori. Dalla proposizione 9.33 si ha subito che i coseni direttori di una retta non orientata sono numeri direttori caratterizzati dalla condizione

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Osservazione 9.37. *Una retta orientata ha un'unica terna di coseni direttori. Una retta non orientata ha due terne di coseni direttori, opposte tra loro (corrispondenti ai due versori paralleli ad essa, a loro volta corrispondenti ai due versi su di essa).*

Il nome "coseni" è dovuto al seguente fatto.

Proposizione 9.38. *Sia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ un riferimento monometrico ortogonale, sia $\vec{r}$ una retta orientata e siano (λ, μ, ν) i suoi coseni direttori. Detti $\vec{x}$, $\vec{y}$ e $\vec{z}$ i tre assi del riferimento (considerati come rette orientate), si ha:*

$$\lambda = \cos \widehat{\vec{r}\vec{x}}\,, \qquad \mu = \cos \widehat{\vec{r}\vec{y}}\,, \qquad \nu = \cos \widehat{\vec{r}\vec{z}}\,.$$

Dimostrazione (a scelta). Sia $\mathbf{v}$ il versore parallelo e concorde ad $\vec{r}$, di modo che le sue componenti sono (λ, μ, ν). Per definizione di angolo tra vettori non nulli, si ha:

$$\widehat{\vec{r}\vec{x}} = \widehat{\mathbf{v}\mathbf{i}}\,, \qquad \widehat{\vec{r}\vec{y}} = \widehat{\mathbf{v}\mathbf{j}}\,, \qquad \widehat{\vec{r}\vec{z}} = \widehat{\mathbf{v}\mathbf{k}}\,. \tag{10}$$

Il versore $\mathbf{i}$ ha componenti $(1,0,0)$, perché $\mathbf{i} = 1 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}$. Similmente i versori $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ hanno componenti, rispettivamente, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$. Applicando la proposizione 9.31 si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{i} &= (\lambda, \mu, \nu) \cdot (1,0,0) = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 + \nu \cdot 0 = \lambda \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} &= (\lambda, \mu, \nu) \cdot (0,1,0) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 + \nu \cdot 0 = \mu \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} &= (\lambda, \mu, \nu) \cdot (0,0,1) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 + \nu \cdot 1 = \nu\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \cos \widehat{\vec{r}\vec{x}} &\overset{(10)}{=} \cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{i}} \overset{\text{Oss. } 2.44}{=} \mathbf{v} \cdot \mathbf{i} \overset{(11)}{=} \lambda \\ \cos \widehat{\vec{r}\vec{y}} &\overset{(10)}{=} \cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{j}} \overset{\text{Oss. } 2.44}{=} \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} \overset{(11)}{=} \mu \\ \cos \widehat{\vec{r}\vec{z}} &\overset{(10)}{=} \cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{k}} \overset{\text{Oss. } 2.44}{=} \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} \overset{(11)}{=} \nu\,, \end{aligned}$$

come volevamo. □

Riassumendo, i coseni direttori di una retta r sono particolari numeri direttori, e in quanto tali determinano la direzione di r. Dunque la direzione di una retta può essere determinata tramite i coseni dei tre angoli formati con gli assi del riferimento (fatto del resto abbastanza intuitivo).

9.12. **Ortogonalità per rette e piani.** In questa sezione conviene tenere sempre presente che due vettori liberi sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo (proposizione 2.38).

La proposizione 1.206 assicura che i riferimenti ortogonali in un piano esistono (fatto intuitivamente ovvio, ma che non è stato immediato dimostrare a partire dagli assiomi).

Nello spazio (anche usando la proposizione 1.206), non è facilissimo dimostrare direttamente l'esistenza di tre rette a due a due perpendicolari (sebbene anche questo sia abbastanza intuitivo). Dunque, a rigore, non siamo ancora sicuri che esista un riferimento ortogonale dello spazio. Usando le proprietà del prodotto scalare, la cosa diventa facile, come vediamo ora nella proposizione seguente.

Proposizione 9.39. *Nello spazio dei vettori liberi esistono tre versori* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *a due a due ortogonali tra loro.*

Dimostrazione (a scelta).

Sia $\mathbf{u}'$ un qualunque vettore non nullo. Ponendo

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{u}'|}\mathbf{u}'$$

si ottiene un versore $\mathbf{u}$.

Sia ora $\mathbf{v}''$ un vettore che non dipende da $[\mathbf{u}]$ e poniamo

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}'' - (\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} \; .$$

Questo vettore è non nullo, altrimenti si avrebbe

$$\mathbf{v}'' = (\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} \; ,$$

mentre $\mathbf{v}''$ non dipende da $[\mathbf{u}]$. Notiamo che

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{v}'' - (\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 0$$

(poiché $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$). Quindi $\mathbf{v}'$ è ortogonale ad $\mathbf{u}$. Ponendo

$$\mathbf{v} = \frac{1}{|\mathbf{v}'|}\mathbf{v}'$$

si ottiene un versore $\mathbf{v}$ ortogonale ad $\mathbf{u}$.

Poiché lo spazio dei vettori liberi ha dimensione tre, esiste un vettore $\mathbf{w}''$ che non dipende da $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$.

Poniamo

$$\mathbf{w}' = \mathbf{w}'' - (\mathbf{w}'' \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} - (\mathbf{w}'' \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}.$$

Questo vettore è non nullo, altrimenti si avrebbe

$$\mathbf{w}'' = (\mathbf{w}'' \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} + (\mathbf{w}'' \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} \; ,$$

mentre $\mathbf{w}''$ non dipende da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Quindi si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{w}' \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{w}'' \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{w}'' \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{w}'' \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = \\ &= \mathbf{w}'' \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{w}'' \cdot \mathbf{u}) \cdot 1 - (\mathbf{w}'' \cdot \mathbf{v}) \cdot 0 = 0 \ .\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{w}' \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{w}'' \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{w}'' \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{w}'' \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \\ &= \mathbf{w}'' \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{w}'' \cdot \mathbf{u}) \cdot 0 - (\mathbf{w}'' \cdot \mathbf{v}) \cdot 1 = 0 \ .\end{aligned}$$

Dunque il vettore $\mathbf{w}'$ è ortogonale ad $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Ponendo

$$\mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{w}'|}\mathbf{w}'$$

si ottiene un versore $\mathbf{w}$ ortogonale ad $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. □

La dimostrazione fatta in questa maniera è valida per ogni spazio euclideo di dimensione almeno tre. Anzi, in uno spazio euclideo (V, s) di dimensione n, questo metodo (che porta il nome di procedimento di Gram-Schmidt) permette di trovare n versori $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ a due a due ortogonali (cioè i vettori sono tali che $s(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) = 1$ e $s(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0$ per $i \neq j$).

È possibile trovare nello spazio quattro rette a due a due perpendicolari? Intuitivamente, no. Ma per essere proprio sicuri, meglio dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione 9.40. *Siano* $S = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ *e* $T = [\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m]$ *due sistemi di vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale euclideo* (V, s)*. Se per ogni* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *e* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *si ha*

$$s(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j) = 0 \ ,$$

allora il sistema "unione" $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m]$ *è anch'esso linearmente indipendente.*

Dimostrazione (a scelta). Per comodità, dati due vettori qualunque $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, indicheremo con

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

lo scalare

$$s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \ .$$

Consideriamo una combinazione lineare nulla dei vettori del sistema "unione":

$$h_1\mathbf{v}_1 + \cdots + h_n\mathbf{v}_n + k_1\mathbf{w}_1 + \cdots + k_m\mathbf{w}_m = \mathbf{0} \ .$$

Dunque abbiamo

$$h_1\mathbf{v}_1 + \cdots + h_n\mathbf{v}_n = -k_1\mathbf{w}_1 - \cdots - k_m\mathbf{w}_m \ .$$

Se poniamo

$$\mathbf{u} = h_1\mathbf{v}_1 + \cdots + h_n\mathbf{v}_n \ ,$$

abbiamo anche

$$\mathbf{u} = -k_1\mathbf{w}_1 - \cdots - k_m\mathbf{w}_m \ .$$

Tenendo presente le proprietà del prodotto scalare s, lo sviluppo di

$$s(\mathbf{u},\mathbf{u}) = (h_1\mathbf{v}_1 + \cdots + h_n\mathbf{v}_n) \cdot (-k_1\mathbf{w}_1 - \cdots - k_m\mathbf{w}_m)$$

consiste in una somma di termini del tipo

$$-h_i k_j \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{w}_j \ ,$$

che sono tutti nulli. Dunque $s(\mathbf{u},\mathbf{u}) = 0$, e siccome s è definito positivo questo implica che $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Quindi

$$h_1\mathbf{v}_1 + \cdots + h_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

e

$$-k_1\mathbf{w}_1 - \cdots - k_m\mathbf{w}_m = \mathbf{0} \ .$$

Siccome i sistemi S e T sono indipendenti, gli scalari h_i e gli scalari k_j sono tutti nulli. Questo dimostra che il sistema "unione" è indipendente, come volevamo. □

A questo punto è facile dimostrare che non possono esistere quattro rette a due a due ortogonali. Infatti, se queste esistessero, prendendo un vettore direzionale per ciascuna otterremmo quattro vettori non nulli a due a due ortogonali, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$. Per la proposizione 9.40 i sistemi $S = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ e $T = [\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$ sono indipendenti. Ancora per la proposizione 9.40, il sistema $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$ sarebbe indipendente. Ma questo è impossibile perché lo spazio dei vettori liberi ha dimensione 3.

Definizione 9.41. *Un vettore libero si dice* ortogonale *ad un piano π se è ortogonale a tutti i vettori paralleli a π. Un vettore ortogonale a π che sia non nullo, sarà detto* normale *al piano. Una retta si dice* ortogonale*, o* normale*, o* perpendicolare*, ad un piano π se è ortogonale a tutte le rette contenute in π.*

Per noi dunque un vettore normale a π è un vettore non nullo ortogonale a π. Avvertiamo che in qualche testo è possibile trovare "la normale a π", col significato di versore (cioè vettore di modulo 1) ortogonale a π. Inoltre, attenzione a non far confusione col termine "normalizzare" che vuol dire dividere un vettore per il suo modulo (ottenendo così un versore).

Naturalmente il vettore nullo, essendo ortogonale a qualsiasi vettore, è ortogonale a qualsiasi piano. Tuttavia è bene puntualizzare il fatto, peraltro abbastanza intuitivo, che per ogni piano ci sono vettori non nulli ad esso ortogonali.

Proposizione 9.42. *Sia π un piano. Allora esiste un vettore normale a π.*

Dimostrazione - non richiesta per l'esame.
Proponiamo due dimostrazioni.

Prima dimostrazione. Possiamo certamente trovare due versori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ paralleli a π e ortogonali tra loro (ragionando come nella dimostrazione della proposizione 9.39, oppure usando la proposizione 1.206). Ragionando come nella dimostrazione della proposizione 9.39, troviamo un vettore $\mathbf{n}$ non nullo e ortogonale ad $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$. Siccome lo spazio direttore $\mathcal{W}$ di π ha dimensione due, e i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono non nulli e non paralleli (quindi indipendenti), $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ è una base di $\mathcal{W}$.

Se quindi $\mathbf{w}$ è un qualsiasi vettore parallelo a π (cioè appartenente a $\mathcal{W}$), esso è combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{w} = h\mathbf{u} + k\mathbf{v} .$$

Dunque si ha

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{n} \cdot (h\mathbf{u} + k\mathbf{v}) = h\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} + k\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 .$$

Quindi $\mathbf{n}$ è ortogonale a $\mathbf{w}$, che era un arbitrario vettore parallelo a π. E allora $\mathbf{n}$, essendo ortogonale a qualsiasi vettore parallelo a π, è normale a π, come richiesto.

Seconda dimostrazione. Fissiamo un riferimento monometrico ortogonale (che certamente esiste), siano (a, b, c) parametri di giacitura di π e sia $\mathbf{n}$ il vettore di componenti (a, b, c).

Poiché (a, b, c) non sono tutti nulli (cfr. osservazione 9.25), il vettore $\mathbf{n}$ è non nullo. Se $\mathbf{w}$ è un qualsiasi vettore parallelo a π, dette (l, m, n) le sue componenti, abbiamo

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} \overset{\text{Prop. 9.31}}{=} al + bm + cn \overset{\text{Prop. 9.27}}{=} 0 .$$

Dunque, $\mathbf{n}$ è ortogonale ad un arbitrario vettore $\mathbf{w}$ parallelo a π, cioè è normale a π come richiesto. □

Proposizione 9.43. *In un riferimento monometrico ortogonale, i parametri di giacitura di un piano π sono le componenti di un vettore normale a π.*

Dimostrazione - non richiesta per l'esame. La seconda dimostrazione della proposizione precedente prova esattamente questo fatto. □

Proposizione 9.44. *I vettori normali ad uno stesso piano sono tutti paralleli tra loro.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano due vettori $\mathbf{n}$ ed $\mathbf{n}'$ normali ad un piano π, ma non paralleli tra loro. Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori paralleli a π, non paralleli tra loro. Dunque i sistemi $S = [\mathbf{n}, \mathbf{n}']$ e $T = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ sono indipendenti. Inoltre, poiché $\mathbf{n}$ ed $\mathbf{n}'$ sono normali a π e $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli a π, ogni vettore di S è ortogonale a ogni vettore di T.

Per la proposizione 9.40, avremmo che il sistema $[\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{u}, \mathbf{v}]$ sarebbe linearmente indipendente, che è assurdo perché lo spazio dei vettori liberi ha dimensione 3. Questo prova che non possono esistere due vettori $\mathbf{n}$ ed $\mathbf{n}'$ normali a π ma non paralleli tra loro, come volevamo. □

Poiché i vettori normali ad un piano sono tutti paralleli tra loro, le loro componenti sono tutte multiple l'una dell'altra. Inoltre poco fa abbiamo detto che in un riferimento monometrico ortogonale, i parametri di giacitura di un piano π sono le componenti di un vettore normale a π. Poiché anche i parametri di giacitura sono tutti multipli l'uno dell'altro (cfr. l'osservazione 9.25), otteniamo subito la seguente proposizione.

Proposizione 9.45. *Sia π un piano e (a, b, c) le componenti di un vettore $\mathbf{v}$ rispetto ad un riferimento monometrico ortogonale. Abbiamo che*

$$(a, b, c) \text{ parametri di giacitura di } \pi \iff \mathbf{v} \text{ vettore normale a } \pi \, .$$

Proposizione 9.46. *Sia P un punto e π un piano. Allora esiste una ed una sola retta passante per P e ortogonale a π.*

Dimostrazione. Una retta è normale ad un piano se e solo se lo è il suo vettore direzionale. Basta quindi considerare l'unica retta passante per P e avente come vettore direzionale un qualunque vettore normale a π. □

Proposizione 9.47. *Sia P un punto ed r una retta. Esiste uno ed un solo piano passante per P ed ortogonale ad r.*

Tralasciamo la facile dimostrazione.

Quand'è che due piani si dicono ortogonali? Sicuramente non è possibile che tutte le rette di un piano siano ortogonali a tutte le rette dell'altro, dobbiamo quindi "accontentarci" di una proprietà più debole. Per descriverla, stabiliamo la seguente proposizione.

Proposizione 9.48. *Siano π e π' piani. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

1. *c'è una retta contenuta in π e normale a π';*
2. *c'è una retta contenuta in π' e normale a π;*
3. *una retta normale a π e una retta normale a π' sono ortogonali*

(dire che le affermazioni sono equivalenti, vuol dire che sono o tutte vere o tutte false, a seconda della scelta dei piani π e π').

Dimostrazione (a scelta). Supponiamo che sia vera la (1), cioè che esista una retta r contenuta in π e normale a π'. Se s è una retta normale a π, essa è per definizione ortogonale a tutte le rette contenute in π, in particolare ad r. Quindi r ed s sono ortogonali, e rispettivamente normali a π' e a π. Dunque la (3) è vera.

Viceversa, supponiamo che la (3) sia vera: esiste quindi una normale t a π e una normale t' a π', tali che t e t' siano ortogonali tra loro. Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u}'$ vettori direzionali rispettivamente di t e t', e sia $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ una base dello spazio direttore di π. Il sistema $S = [\mathbf{u}]$ è linearmente indipendente e il suo unico vettore è ortogonale a tutti i vettori del sistema $T = [\mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{w}]$. Se dunque T fosse indipendente, la proposizione 9.40 implicherebbe che i quattro vettori $\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sarebbero indipendenti, il che è assurdo perché lo spazio dei vettori liberi ha dimensione 3. Dunque T è dipendente.

Tenendo presente che $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ una base dello spazio direttore di π, e la proposizione 4.18, abbiamo che $\mathbf{u}'$ è parallelo a π. Quindi t' è parallela a π. Possiamo allora trovare una retta t'' contenuta in π e parallela a t'. Siccome t e t' sono ortogonali, la retta $t'' \subset \pi$, essendo parallela a t', è ortogonale a t, come richiesto da (1).

Abbiamo dimostrato che (1) e (3) sono equivalenti. Allo stesso modo si dimostra che (2) e (3) sono equivalenti. Dunque le tre affermazioni sono tutte equivalenti, come volevamo. □

Definizione 9.49. *Due piani si dicono* ortogonali *se sono verificate le affermazioni della proposizione 9.48.*

9.13. **Condizioni di ortogonalità.** Le condizioni analitiche per l'ortogonalità sono simili a quelle per il parallelismo, purché però si usino riferimenti monometrici ortogonali (altrimenti queste condizioni diventano più complicate).

Proposizione 9.50. *(condizione di ortogonalità tra rette). Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, siano r ed r' rette, con numeri direttori rispettivamente (l, m, n) ed (l', m', n'). Allora si ha:*

$$r \text{ ed } r' \text{ ortogonali} \iff ll' + mm' + nn' = 0\ .$$

Dimostrazione. Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ i vettori rispettivamente di componenti (l, m, n) ed (l', m', n'), così che $\mathbf{v}$ è un vettore parallelo r e $\mathbf{v}'$ è un vettore parallelo ad r'. Si ha:

$$r \text{ ed } r' \text{ ortogonali} \iff \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{v}' \text{ ortogonali} \overset{\text{Prop. 2.38}}{\iff}$$
$$\iff \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = 0 \overset{\text{Prop. 9.31}}{\iff} ll' + mm' + nn' = 0\ ,$$

come volevamo. □

Proposizione 9.51. *(condizione di ortogonalità tra piani). Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, siano π e π' piani, con parametri di giacitura rispettivamente (a, b, c) ed (a', b', c'). Allora si ha:*

$$\pi \text{ e } \pi' \text{ ortogonali} \iff aa' + bb' + cc' = 0\ .$$

Dimostrazione. Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ i vettori rispettivamente di componenti (a, b, c) ed (a', b', c'). Per la proposizione 9.45, $\mathbf{v}$ è un vettore normale a π e $\mathbf{v}'$ è un vettore normale a π'. Per definizione, π e π' sono ortogonali se e solo se verificano una (e quindi tutte) le condizioni della proposizione 9.48. Usando la condizione (3), otteniamo

$$\pi \text{ e } \pi' \text{ ortogonali} \iff \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{v}' \text{ ortogonali} \overset{\text{Prop. 2.38}}{\iff}$$
$$\iff \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = 0 \overset{\text{Prop. 9.31}}{\iff} aa' + bb' + cc' = 0\ ,$$

come volevamo. □

Proposizione 9.52. *(condizione di ortogonalità tra una retta e un piano). Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, sia r una retta di numeri direttori (l, m, n) e π un piano di parametri di giacitura (a, b, c). Si ha:*

$$r \text{ e } \pi \text{ sono ortogonali} \iff (l, m, n) \text{ ed } (a, b, c) \text{ sono proporzionali.}$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{v}$ il vettore direzionale di r di componenti (l, m, n). Si ha

$$\begin{aligned} r \text{ e } \pi \text{ sono ortogonali} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{v} \text{ normale a } \pi \\ &\overset{\text{Prop. 9.45}}{\Longleftrightarrow} (l, m, n) \text{ parametri di giacitura di } \pi \\ &\overset{\text{Oss. 9.25}}{\Longleftrightarrow} (l, m, n) \text{ ed } (a, b, c) \text{ sono proporzionali },\end{aligned}$$

come volevamo. □

9.14. **Distanza tra sottoinsiemi.**

Definizione 9.53. *La* distanza tra due insiemi X, Y *di punti dello spazio ordinario è per definizione l'estremo inferiore di tutte le distanze* $d(P, Q)$ *con* $P \in X$ *e* $Q \in Y$*. Se* P *è un punto, la distanza di* $\{P\}$ *da* X *si può anche chiamare la* distanza di P da X. *Si possono usare le notazioni* $d(X, Y)$ *e* $d(P, X)$*.*

Definizione 9.54. *Sia* P *un punto dello spazio ordinario e* X *una retta o un piano. L'intersezione di* X *con una retta perpendicolare a* X *e passante per* P *(vedi la proposizione 1.206 e la discussione successiva) si dice* proiezione ortogonale *di* P *su* X*.*

Osservazione 9.55. *Siano* P *un punto ed* r *una retta contenuti in un piano* π*, con* $P \notin r$*, e consideriamo la proiezione ortogonale* H *di* P *su* r*. Per il teorema di Pitagora, la distanza di* P *da* H *è minore della distanza di* P *da ogni altro punto di* r*. Quindi*

$$d(P, r) = d(P, H) .$$

Tenendo presente che una retta ortogonale ad un piano è ortogonale a tutte le rette contenute in quel piano, anche la distanza di P *da un piano* π *è uguale alla distanza di* P *dalla sua proiezione ortogonale su* π*.*

Proposizione 9.56. *Fissato un sistema di riferimento monometrico ortogonale in un piano* π*. Sia* $P \in \pi$ *un punto di coordinate* $(\bar{x}, \bar{y})$ *ed* $r \subseteq \pi$ *una retta di equazione* $ax + by + c = 0$*. Allora si ha*

$$d(P, r) = \frac{|a\bar{x} + b\bar{y} + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$

Tralasciamo la dimostrazione.

Proposizione 9.57. *Fissato un sistema di riferimento monometrico ortogonale nello spazio. Sia* $P \in \pi$ *un punto di coordinate* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ *e* π

un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$. *Allora si ha*

$$d(P, \pi) = \frac{|a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} .$$

Tralasciamo la dimostrazione.

9.15. **Geometria piana.** Gli stessi ragionamenti usati per la geometria analitica delle rette e dei piani nello spazio, consentono (in maniera ancora più semplice) di trattare la geometria analitica delle rette in un piano. In questo paragrafo facciamo un elenco dei risultati e delle definizioni di base di geometria analitica piana, che sono analoghi a (e anzi più semplici di) quelli visti per lo spazio. Al termine faremo anche vedere che, per il piano, il concetto elementare di coefficiente angolare gioca lo stesso ruolo dei numeri direttori.

Definizione 9.58. *Sia* r *una retta contenuta in un piano* π. *Fissato un riferimento* $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ *di* π, *le componenti* (l, m) *di un vettore direzionale di* r *(rispetto al riferimento vettoriale* $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$*) vengono dette* numeri direttori *(o* parametri direttori*) di* r, *rispetto al riferimento* $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$.

Osservazione 9.59. *Le coppie di numeri direttori sono non nulle e tutte proporzionali tra loro.*

Proposizione 9.60. *Sia* $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ *un riferimento di un piano* π, *sia* P_0 *un punto di coordinate* (x_0, y_0), *sia* $\mathbf{v}$ *un vettore non nullo di componenti* (l, m) *e sia* r *la retta contenente* P_0 *e parallela a* $\mathbf{v}$. *Se* P *è un qualunque punto di* π *e* (x, y) *sono le sue coordinate, si ha*

$$P \in r \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

Definizione 9.61. *L'affermazione*

$$P \in r \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

viene sinteticamente espressa dicendo che

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

sono le equazioni parametriche *(o una* rappresentazione parametrica*) della retta* r *rispetto al riferimento* $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$, *con parametro* t.

Osservazione 9.62. *Fissato un riferimento* $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ *di un piano* π, *ogni retta* $r \subseteq \pi$ *può essere rappresentata con delle equazioni parametriche.*

Osservazione 9.63. *Se x_0, y_0, l, m sono numeri reali, con l, m non entrambi nulli, allora scrivendo*

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

si ottiene sempre una rappresentazione parametrica di qualche retta: di quella passante per il punto di coordinate (x_0, y_0) e parallela al vettore di componenti (l, m).

Proposizione 9.64. *Sia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ un riferimento di un piano π e sia $r \subseteq \pi$ una retta. Allora esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che, se P è un qualunque punto di π e (x, y) sono le sue coordinate, si ha*

$$P \in r \iff ax + by + c = 0.$$

Inoltre a e b non possono essere entrambi nulli.

Definizione 9.65. *Nella situazione della proposizione ora dimostrata, l'affermazione*

$$P \in r \iff ax + by + c = 0,$$

viene sinteticamente espressa dicendo che

$$ax + by + c = 0$$

è un'equazione cartesiana (ordinaria) *della retta r (nell'assegnato riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$).*

In sintesi, l'insieme delle terne di coordinate dei punti di r coincide con l'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare

$$ax + by + c = 0.$$

Proposizione 9.66. *Una qualsiasi equazione del tipo $ax + by + c = 0$, in un fissato riferimento di un piano π, con $(a, b) \neq (0, 0)$ rappresenta sempre una retta contenuta in π, e se due equazioni di questo tipo rappresentano lo stessa retta allora sono l'una multiplo dell'altra.*

Proposizione 9.67. *Siano r ed r' rette contenute in un piano π. Fissato un riferimento di π, sia (l, m) una coppia di numeri direttori di r e sia (l', m') una coppia di numeri direttori di r'. Si ha:*

$$r \text{ ed } r' \text{ sono parallele} \iff (l, m) \text{ ed } (l', m') \text{ sono proporzionali.}$$

Proposizione 9.68. *Fissato un riferimento di un piano π, sia $r \subseteq \pi$ una retta con numeri direttori (l, m) e sia $s \subseteq \pi$ una retta di equazione cartesiana $ax + by + c = 0$.*

Si ha:

$$r \text{ ed } r' \text{ sono parallele} \iff al + bm = 0\,.$$

Proposizione 9.69. *Fissato un riferimento di un piano π, siano r ed r' rette contenute in π di equazioni cartesiane ripettivamente*

$$ax + by + c = 0 \qquad e \qquad a'x + b'y + c' = 0 \ .$$

Si ha:

$$r \text{ ed } r' \text{ sono parallele} \iff (a, b) \text{ ed } (a', b') \text{ sono proporzionali.}$$

Definizione 9.70. *Sia fissato in un piano π un riferimento monometrico ortogonale. I* coseni direttori *di una retta $r \subseteq \pi$ sono le componenti di un versore parallelo ad r. I* coseni direttori *di una retta orientata $\vec{r}$ contenuta in π sono le componenti di un versore parallelo e concorde ad $\vec{r}$.*

Proposizione 9.71. *Sia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ un riferimento monometrico ortogonale di un piano π, sia $\vec{r}$ una retta orientata contenuta in π e siano (λ, μ) i suoi coseni direttori. Detti $\vec{x}$, $\vec{y}$ i due assi del riferimento (considerati come rette orientate), si ha:*

$$\lambda = \cos \widehat{\vec{r}\vec{x}} \ , \qquad \mu = \cos \widehat{\vec{r}\vec{y}} \ .$$

Definizione 9.72. *Se r è una retta contenuta in un piano π, un vettore non nullo ortogonale ad r e parallelo a π, sarà detto* normale *ad r in π.*

Proposizione 9.73. *Fissato un riferimento monometrico ortogonale in un piano π, sia r una retta contenuta in π. Una coppia (a, b) è la coppia di componenti di un vettore normale ad r in π se e solo se r ha un'equazione cartesiana con (a, b) rispettivamente coefficienti di x e y (cioè $ax + by + c = 0$).*

Proposizione 9.74. *Fissato in un piano π un riferimento monometrico ortogonale, siano r ed r' rette contenute in π, con numeri direttori rispettivamente (l, m) ed (l', m'). Allora si ha:*

$$r \text{ ed } r' \text{ perpendicolari} \iff ll' + mm' = 0 \ .$$

Proposizione 9.75. *Fissato in un piano π un riferimento monometrico ortogonale, sia r una retta contenuta in π con numeri direttori (l, m) e sia s una retta di equazione cartesiana $ax + by + c = 0$.*
Si ha:

$$r \text{ ed } r' \text{ perpendicolari} \iff (a, b) \text{ ed } (l, m) \text{ sono proporzionali.} \ .$$

Proposizione 9.76. *Fissato in un piano π un riferimento monometrico ortogonale, siano r ed r' rette contenute in π di equazioni cartesiane ripettivamente*

$$ax + by + c = 0 \qquad e \qquad a'x + b'y + c' = 0 \ .$$

Allora si ha:

$$r \text{ ed } r' \text{ perpendicolari} \iff aa' + bb' = 0 \,.$$

Proposizione 9.77. *Sia fissato in un piano π un riferimento monometrico ortogonale. Per ogni vettore libero $\mathbf{v}$ parallelo a π, dette (l, m) le sue componenti, si ha*

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{l^2 + m^2}.$$

Proposizione 9.78. *Sia fissato in un piano π un riferimento monometrico ortogonale. Se P e P' sono punti di π, di coordinate rispettivamente (x, y) ed (x', y') allora la distanza tra P e P' è data da*

$$d(P, P') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \,.$$

Osservazione 9.79. *Sia fissato in un piano π un riferimento, sia r una retta contenuta in π non parallela all'asse y e sia (l, m) una coppia di numeri direttori di r. Siccome r non è parallela all'asse y, si ha $l \neq 0$. Dunque ha senso il rapporto*

$$\frac{m}{l} \,.$$

Poiché le coppie di numeri direttori di r sono tutte proporzionali, tale numero non dipende dalla scelta di (l, m), ma solo dalla retta r (e dal riferimento fissato).

Definizione 9.80. *Sia fissato in un piano π un riferimento e sia r una retta contenuta in π non parallela all'asse y. Allora il numero reale*

$$\frac{m}{l}$$

si dice coefficiente angolare *di r rispetto al riferimento fissato.*

Per le rette parallele all'asse y, si può dire che il coefficiente angolare è infinito.

Osservazione 9.81. *Una retta r ha coefficiente angolare m se e solo se $(1, m)$ è una coppia di numeri direttori di r.*

Osservazione 9.82. *Sia fissato un riferimento in un piano π e sia r una retta contenuta in π non parallela all'asse y. Per la proposizione 9.68, se r ha equazione cartesiana $ax + by + c = 0$, allora il coefficiente angolare di r è dato da*

$$-\frac{a}{b} \,.$$

Dalla proposizione 9.67 discende subito la seguente proposizione.

Proposizione 9.83. *Siano r ed r' rette con rispettivi coefficienti angolari m ed m'. Allora r ed r' sono parallele se e solo se $m = m'$.*

Dalla proposizione 9.74 discende subito la seguente proposizione.

Proposizione 9.84. *Siano r ed r' rette con rispettivi coefficienti angolari m ed m'. Allora r ed r' sono perpendicolari se e solo se $mm' = -1$.*

9.16. **Accenno alle coniche.**

Definizione 9.85. *Sia π un piano, siano F_1 ed F_2 punti di π e sia a un numero reale tale che*

$$a > \frac{1}{2} d(F_1, F_2) .$$

L'insieme

$$E = \{P \in \pi : \ d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$$

si chiama ellisse *(ordinaria) di* fuochi F_1, F_2 *e semiasse maggiore a.*

Osservazione 9.86. *Un'ellisse con i fuochi coincidenti si riduce ad una circonferenza.*

Proposizione 9.87. *Sia E un'ellisse in un piano π, di fuochi F_1, F_2 e* semiasse maggiore *a. Sia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ un riferimento monometrico ortogonale in π con origine uguale al punto medio di F_1, F_2 (cioè l'unico punto allineato con tali punti ed equidistante da essi) e con versore $\mathbf{i}$ parallelo al vettore $F_2 - F_1$ (cioè con l'asse x contenente i fuochi). Allora un punto P di coordinate (x, y) appartiene ad E se e solo se*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ,$$

con

$$b^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2} d(F_1, F_2) \right)^2 .$$

Tralasciamo la dimostrazione.

Definizione 9.88. *Sia π un piano, siano F_1 ed F_2 punti di π e sia a un numero reale tale che*

$$0 < a < \frac{1}{2} d(F_1, F_2) .$$

L'insieme

$$I = \{P \in \pi : \ \left| d(P, F_1) - d(P, F_2) \right| = 2a\}$$

si chiama iperbole *di* fuochi F_1, F_2 *e* semiasse a.

Proposizione 9.89. *Sia I un'iperbole in un piano π, di fuochi F_1, F_2 e semiasse a. Sia $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}))$ un riferimento monometrico ortogonale in π con origine uguale al punto medio di F_1, F_2 e con versore $\mathbf{i}$ parallelo al vettore $F_2 - F_1$. Allora un punto P di coordinate (x, y) appartiene ad I se e solo se*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ ,$$

con

$$b^2 = \big(\frac{1}{2} d(F_1, F_2)\big)^2 - a^2 \ .$$

Tralasciamo la dimostrazione.

Definizione 9.90. *Sia π un piano. Siano F un punto ed r una retta contenuti in π, con $F \notin r$. L'insieme*

$$C = \{P \in \pi : \ d(P, F) = d(P, r)\}$$

si chiama parabola *di* fuoco *F e* direttrice *r.*

Proposizione 9.91. *Sia C una parabola in un piano π, di fuoco F e direttrice r. Detto H il punto d'intersezione di r con la perpendicolare ad r passante per F, sia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ un riferimento monometrico ortogonale in π con origine uguale al punto medio di F ed H e con versore $\mathbf{i}$ parallelo e concorde ad $F - H$. Allora un punto P di coordinate (x, y) appartiene a C se e solo se*

$$2px - y^2 = 0 \ ,$$

con

$$p = d(F, r) \ .$$

Tralasciamo la dimostrazione.

Osservazione 9.92. *Abbiamo visto che ellissi, iperboli e parabole sono tutte rappresentate, in opportuni riferimenti, da equazioni di secondo grado in due variabili. Tenendo presenti la formule del cambio di riferimento (proposizione 8.10), che sono date da polinomi di primo grado, si ha che in un riferimento qualunque, ellissi iperboli e parabole sono ancora rappresentate da equazioni di secondo grado.*

Definizione 9.93. *Consideriamo un polinomio in due variabili di grado 2, cioè una funzione*

$$p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

del tipo

$$(x, y) \longmapsto ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, a, b, c non tutti nulli.

Fissato un riferimento di un piano, chiameremo conica *l'insieme* Γ *di tutti i punti le cui coordinate sono soluzioni dell'equazione*

$$p(x, y) = 0 \ .$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}$$

si dice matrice associata a p, *o anche* matrice associata a Γ.

Esempio 9.94. *Fissato un riferimento in un piano, consideriamo il polinomio* p *dato da*

$$p(x, y) = xy \ .$$

La conica rappresentata dall'equazione $p(x, y) = 0$ *è chiaramente l'unione dei due assi del riferimento. La matrice associata è*

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Coniche come quelle dell'esempio ora visto vengono dette *degeneri*.

Proposizione 9.95. *Sia* Γ *una conica,* $A = (a_{ij})$ *una sua matrice associata e ricordiamo che* A_{33} *denota il complemento algebrico dell'elemento* a_{33}*. Allora* Γ *è un'ellisse (ordinaria), un'iperbole o una parabola se e solo se* $|A| \neq 0$ *e* Γ *è non vuota. Inoltre in tal caso si ha:*

- Γ *è un'ellisse* $\iff$ $A_{33} > 0$*;*
- Γ *è un'iperbole* $\iff$ $A_{33} < 0$*;*
- Γ *è una parabola* $\iff$ $A_{33} = 0$.

Tralasciamo la dimostrazione.

Nello spazio, gli insiemi rappresentati da equazioni di secondo grado in tre variabili si chiamano *quadriche*. Lo studio delle quadriche è analogo a (ma più ricco di) quello delle coniche. Uno strumento generale (anche in dimensione superiore a tre) utile in tale contesto sono le forme quadratiche, di cui qui ci limitiamo a dare la definizione.

Definizione 9.96. *Siano* V*,* V' *e* W *spazi vettoriali sui reali e sia*

$$\phi : V \times V' \longrightarrow W$$

un'applicazione. Per ogni $\mathbf{v} \in V$ *indichiamo con* $\phi_{\mathbf{v}} : V' \to W$ *l'applicazione che a ciascun* $\mathbf{v}' \in V'$ *associa* $\phi((\mathbf{v}, \mathbf{v}'))$*:*

$$\phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}') := \phi\big((\mathbf{v}, \mathbf{v}')\big) \ .$$

Per ogni $\mathbf{v}' \in V'$ *indichiamo con* $\phi'_{\mathbf{v}'} : V \to W$ *l'applicazione che a ciascun* $\mathbf{v} \in V$ *associa* $\phi((\mathbf{v}, \mathbf{v}'))$*:*

$$\phi'_{\mathbf{v}'}(\mathbf{v}) := \phi\big((\mathbf{v}, \mathbf{v}')\big) .$$

Se per ogni $\mathbf{v} \in V$ *e* $\mathbf{v}' \in V'$ *le applicazioni* $\phi_{\mathbf{v}}$ *e* $\phi'_{\mathbf{v}'}$ *sono lineari, allora si dirà che* ϕ *è un'applicazione* bilineare*.*

Se $V = V'$ *e* $W = \mathbb{R}$*, allora l'applicazione bilineare* ϕ *sarà anche detta* forma bilineare *su* V*.*

Se $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ *è una forma bilineare su uno spazio vettoriale* V*, l'applicazione*

$$q : V \to \mathbb{R}$$

data da

$$q(\mathbf{v}) := \beta(\mathbf{v}, \mathbf{v})$$

si dice forma quadratica *su* V*.*

Esempio 9.97. *Siano* $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$*. L'applicazione* $\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *data da*

$$\begin{aligned} &\beta\big(\ (x_0, x_1, x_2)\ ,\ (y_0, y_1, y_2)\ \big) \\ &:= ax_1y_1 + \frac{b}{2}x_1y_2 + \frac{b}{2}x_2y_1 + cx_2y_2 + \frac{d}{2}x_1y_0 + \frac{d}{2}x_0y_1 + \frac{e}{2}x_2y_0 + \frac{e}{2}x_0y_2 + fx_0y_0 . \end{aligned}$$

è una forma bilineare. Se $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *è la forma quadratica data da* $q(\mathbf{x}) := \beta(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ *e se definiamo* $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *ponendo*

$$p(x, y) = q(1, x, y) ,$$

abbiamo che p *è proprio il polinomio*

$$(x, y) \longmapsto ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f .$$

Indice