15. Funzione potenza con tutti i tipi di esponenti

$$f(x)=x^b$$

Leggi allometriche

Negli individui di molte specie, il rapporto tra il peso dello scheletro Ps (y) e quello corporeo P (x) non e' costante e diminuisce all'aumentare della dimensione dell'organismo.

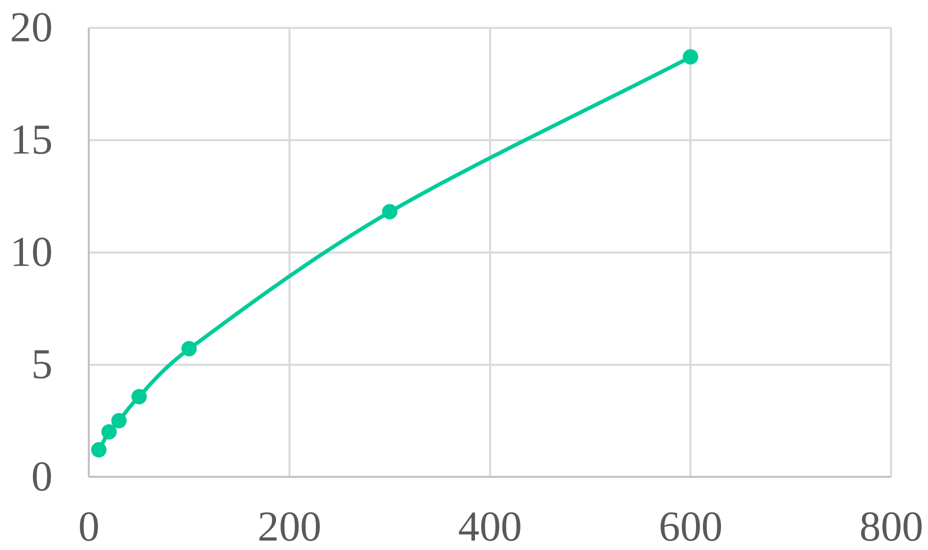
$$\frac{Ps}{P} = \frac{y}{x} \neq k \Rightarrow y \neq kx \Rightarrow non \text{ è } una\ retta!!!!!$$

In genere se x e y indicano le misure relative a due parti del corpo di un organismo, una legge allometrica è espressa come funzione potenza

$$y=f(x)=ax^b \quad (con\ b<1)$$

Leggi allometriche: dati e considerazioni

Peso x	Peso scheletro y	Peso scheletro/Peso y/x
10	1.2	0.12
20	2	0.1
30	2.5	0.083333333
50	3.57	0.0714
100	5.7	0.057
300	11.8	0.039333333
600	18.7	0.031166667



$$\frac{Ps}{P} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = f(x) \Rightarrow y = 0.2624 * x^{0.6674}$$

$$\Rightarrow Ps = 0.2624 * P^{0.6674}$$

Indice di massa corporeo

L'indice di massa corporeo (IMC) è un indice biometrico per "misurare" se un individuo ha peso vicino a quello considerato normale.

Indichiamo con p il peso (kg) e con h la sua altezza (m)

$$IMC=p \bullet h^{-2}$$

E' un indice di tipo allometrico, ritenuto utile perché e' tanto piu grande quanto maggiore è la percentuale di massa grassa del corpo.

In particolare l'Organizzazione Mondiale della Sanità considera "obesa" gli individui con $IMC>30$, "sottopeso" gli individui con $IMC<18.5$ e "gravemente magri" quelli con $IMC<16$

E tu che IMC hai?

Forma, dimensione e vita

La forma e la dimensione della vita dipende da leggi allometriche!!!!

Il piu grande animale vivente sulla terra e’ l’elefante africano (7 tonnellate). L’azione della gravità e’ esercitata sulle zampe (grandi diametri e ben distanziate).

Le balenottere azzurre possono raggiungere 130 tonnellate!!! MA … sfruttano la spinta di Archimede.

La crescita del peso “segue” la crescita del volume -> legge di potenza!!!!!

Forma, dimensione e vita 2

La crescita del peso “segue” la crescita del volume -> legge di potenza (*$Vol=l^3$, $b=3$*)!!!!!

La resistenza di un osso al peso e’ una funzione quadratica, perche dipende dall’area della sezione trasversale -> legge di potenza (*$Sup=l^2$, $b=2$*)!!!!!

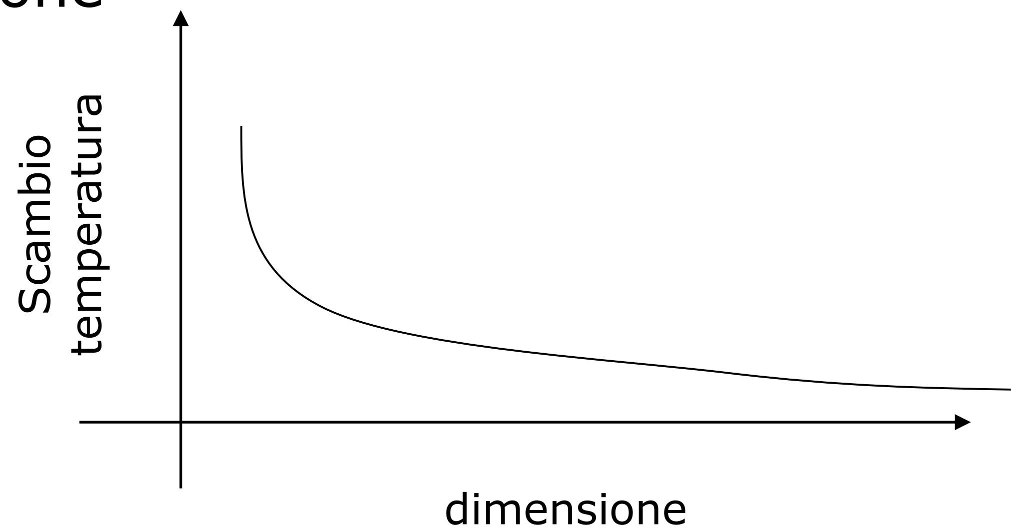
(un bambino puo portare un altro bambino, hai mai visto un elefante che porta un altro elefante? :)

L’evoluzione risolve il problema dell’eccessiva fragilità delle strutture favorendo la riproduzione di organismi le cui dimensioni siano contenute entro opportuni limiti e il cui corpo sia composto da materiali adeguati!!!

Forma, dimensione e vita 3

Bilancio energetico

1. Un organismo produce energia proporzionale al suo peso
2. La regolazione della temperatura corporea e' proporzionale alla sua superficie
3. Il rapporto tra la superficie esterna e il suo peso -> 1/dimensione



Strategie adattative: animali dotati di peli (cani), sudorazione (uomini), unirsi in branchi piu grandi (pecore)

Indice della lezione

1. Funzione potenza ad esponente naturale
    - Esponente naturale pari
    - Esponente naturale dispari

2. Funzione radice ennesima (esponente razionale)
    - Esponente razionale con base pari
    - Esponente razionale con base dispari

3. Funzione potenza ad esponente reale
    - $b > 0$
    - $b < 0$

Funzione potenza ad esponente naturale

$$f(x) = x^n, \quad n \in N \quad fissato$$

$$f : x \in R \to x^n \in Codominio\, che\, varia\, a\, secondo\, di\, n$$

x è la base della funzione potenza e varia nel dominio

n è l'esponente della funzione potenza e viene fissato

Operazione di elevamento a potenza

In generale l’operazione di elevamento a potenza e’ ben definita per qualunque esponente se la base e’ positiva.

Inoltre puo’ essere definita anche con base negativa se l’esponente e’ intero oppure razionale (frazione) con denominatore dispari

base positiva -> *qualunque esponente*

base negativa -> *esponente intero o razionale (frazione) con base dispari*

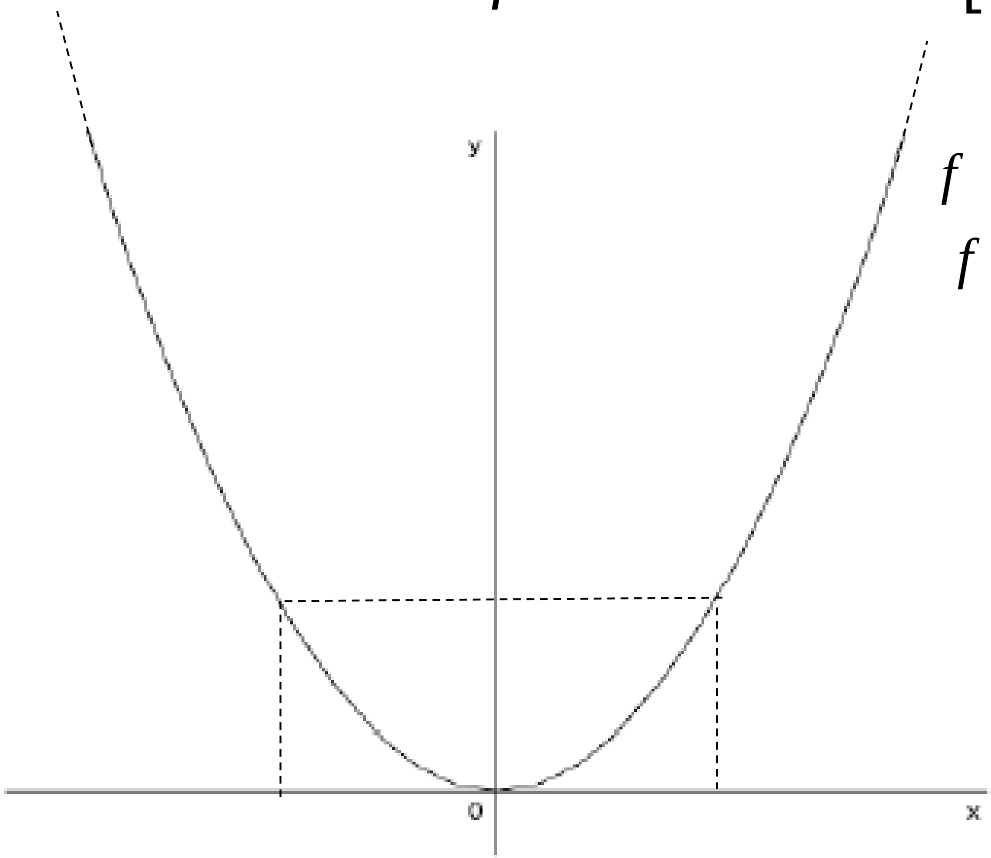
Funzione potenza ad esponente intero (positivo)

Funzione potenza ad esponente naturale pari

$$f(x) = x^n, \quad n \in N \ \text{fissato}$$

$$n \ \text{pari}$$

$$f : x \in R \to x^n \in [0,+\infty)$$



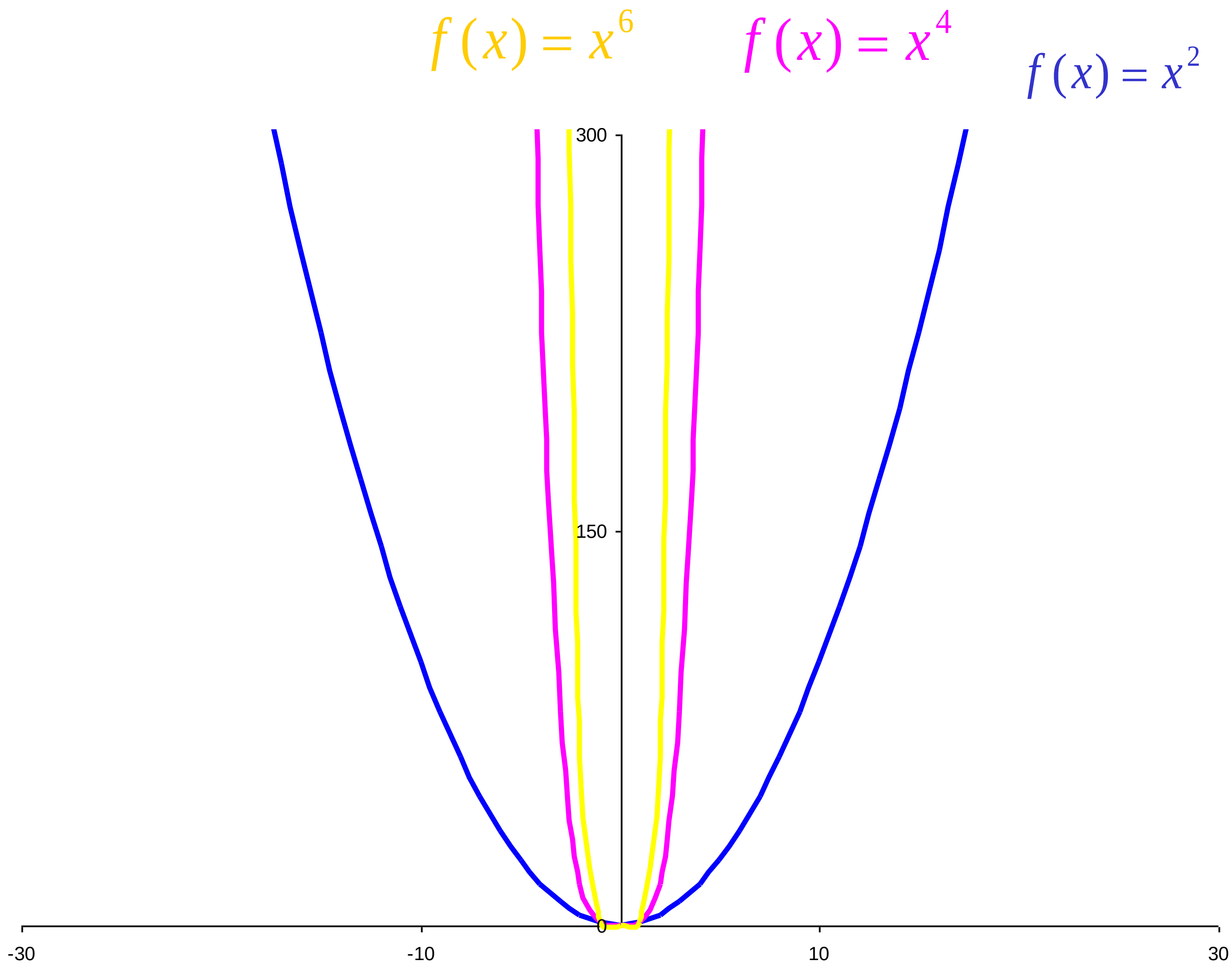
f *strettamente decrescente in (-∞,0)*

f *strettamente crescente in* $(0,+\infty)$

$$f \ \ pari : x^n = (-x)^n$$

$$\sup x^n = +\infty; \inf x^n = 0$$

Funzione potenza ad esponente naturale pari



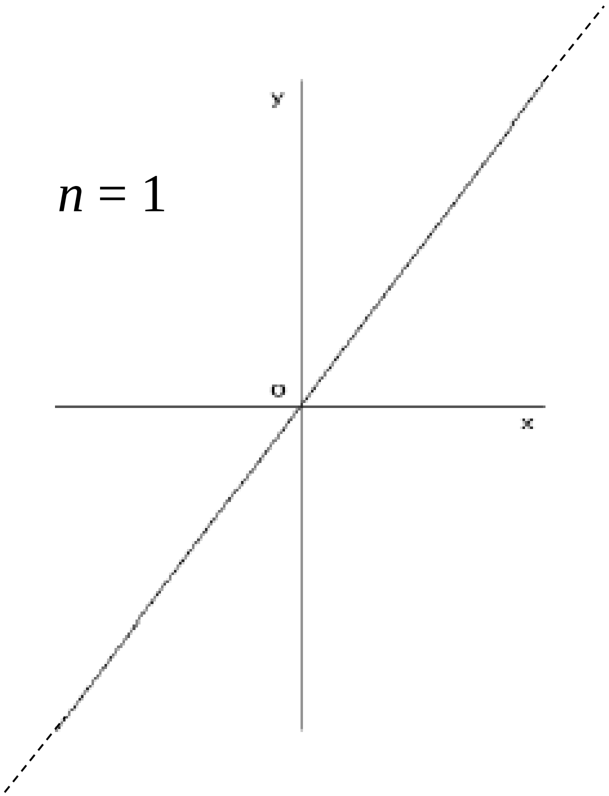
Funzione potenza ad esponente naturale dispari

$$f(x) = x^n, \quad n \in N \text{ fissato}$$

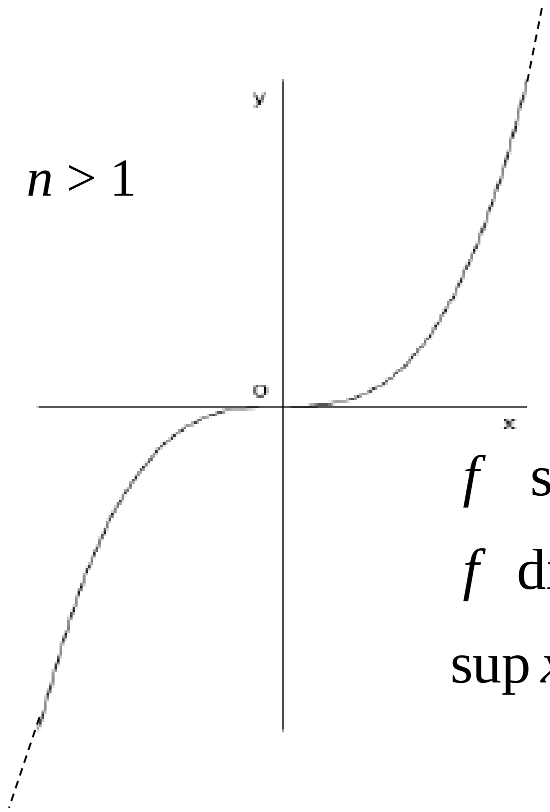
$$n \text{ dispari}$$

$$f : x \in R \to x^n \in R$$

$n = 1$



$n > 1$



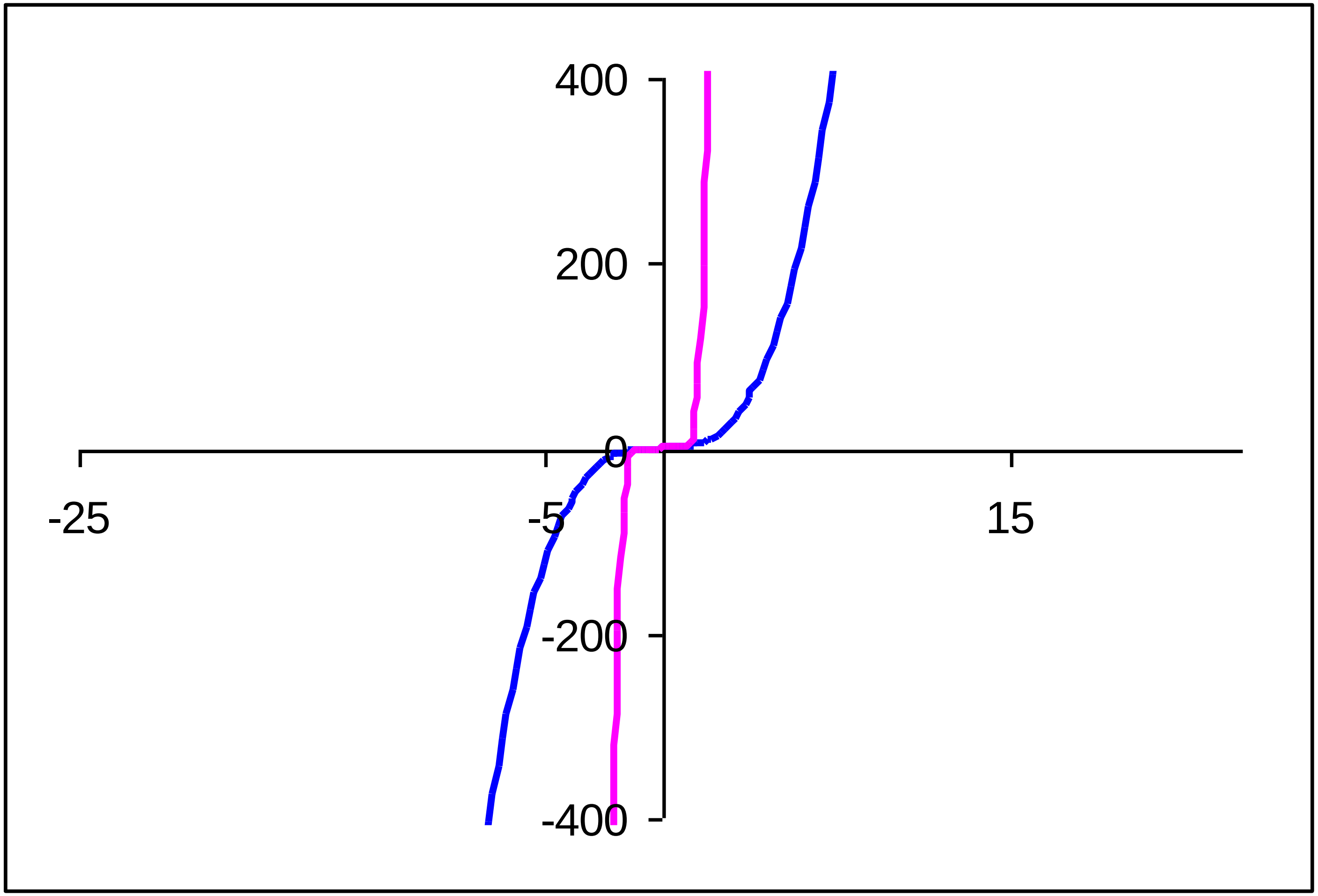
f strettamente crescente in R

f dispari: $-x^n = (-x)^n$

$\sup x^n = +\infty; \inf x^n = -\infty$

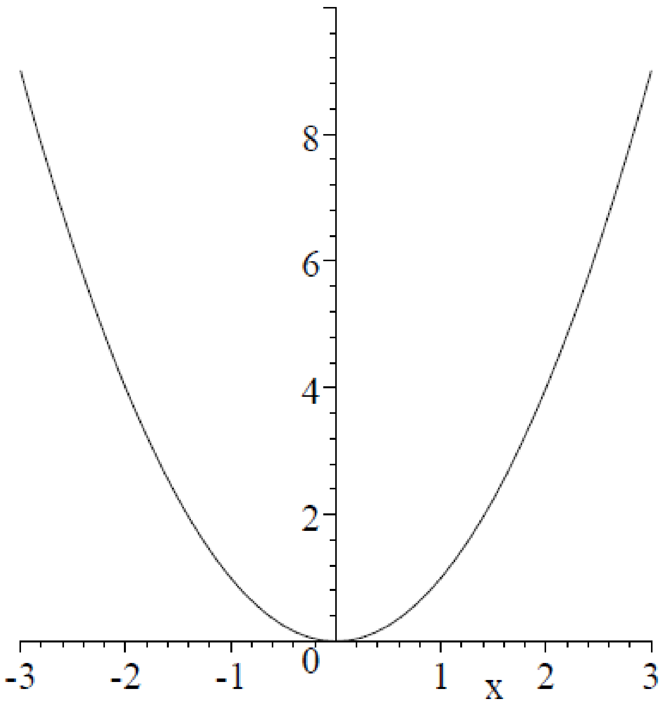
Funzione potenza ad esponente naturale dispari

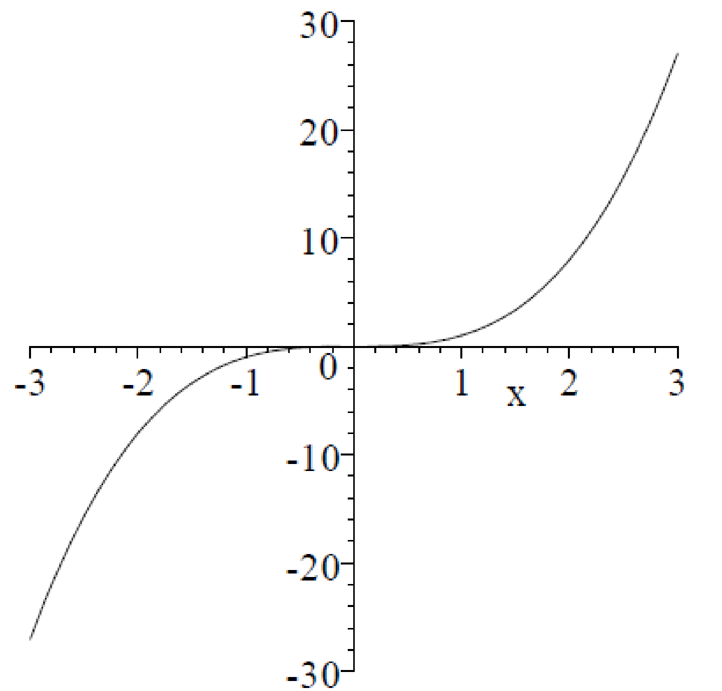
$$f(x) = x^9 \qquad f(x) = x^3$$



Funzione potenza e funzione inversa

n pari	*n* dispari
$f(x) = x^n$	$f(x) = x^n$
$f: x \in R \to x^n \in [0, +\infty[$	$f: x \in R \to x^n \in R$
f NON str. crescente in $]-\infty, +\infty[$	f str. crescente in $]-\infty, +\infty[$
f NON invertibile in $]-\infty, +\infty[$	f invertibile in $]-\infty, +\infty[$



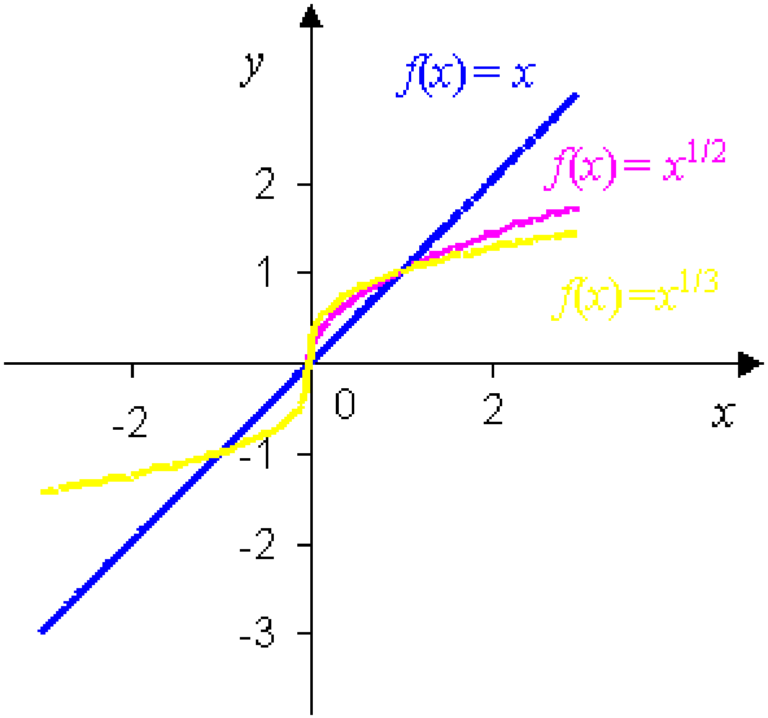


Funzione potenza ad esponente 1/n (n positivo)

Funzione radice

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, \quad n \in N \text{ fissato, } n \geq 2$$

Dominio e Codominio che variano a secondo di n

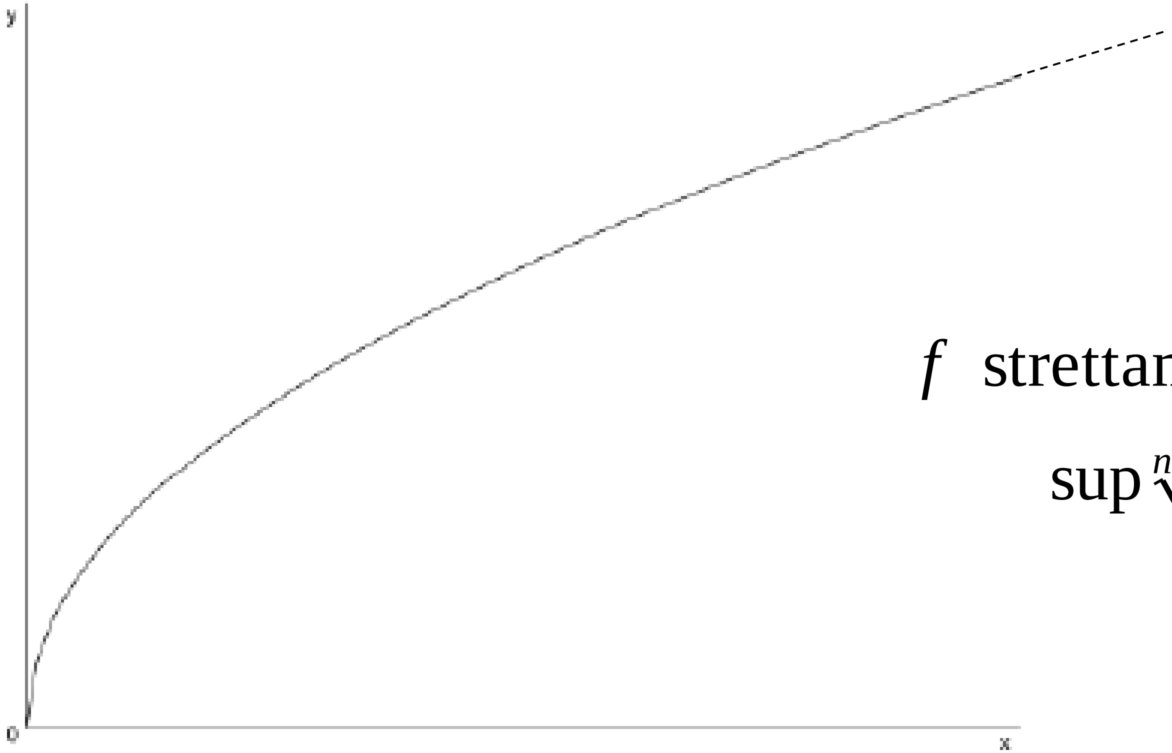


Funzione radice n pari

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, \quad n \in N \text{ fissato, } n \geq 2$$

$$n \text{ pari}$$

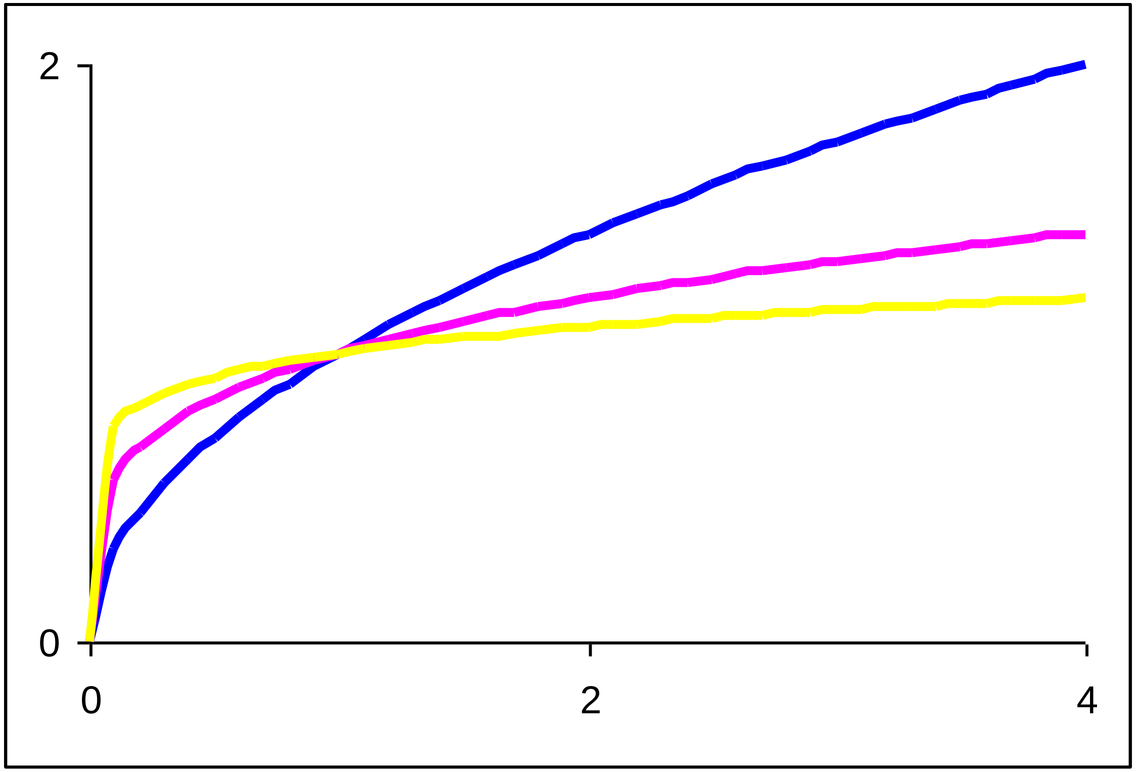
$$f : x \in [0,+\infty) \to \sqrt[n]{x} \in [0,+\infty)$$



f strettamente crescente in $[0,+\infty)$

$$\sup \sqrt[n]{x} = +\infty; \inf \sqrt[n]{x} = 0$$

Funzione radice n pari



$f(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = \sqrt[4]{x}$

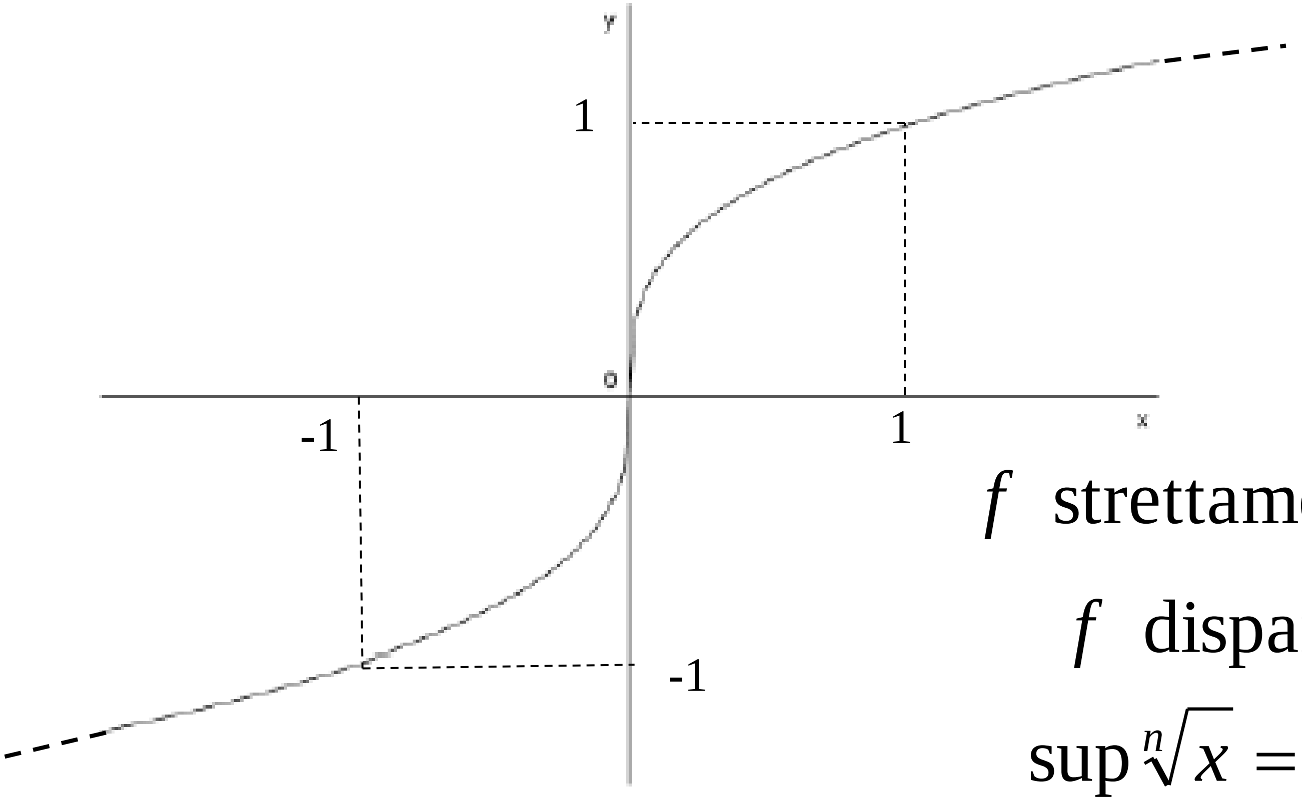
$f(x) = \sqrt[8]{x}$

Funzione radice n dispari

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, \quad n \in N \text{ fissato, } n \geq 2$$

$$n \text{ dispari}$$

$$f : x \in R \to \sqrt[n]{x} \in R$$



$$f \text{ strettamente crescente in } R$$

$$f \text{ dispari} : -\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{-x}$$

$$\sup \sqrt[n]{x} = +\infty; \inf \sqrt[n]{x} = -\infty$$

Funzione potenza ad esponente reale

Funzione potenza ad esponente reale

$$f(x) = x^b, \quad b \in R \text{ fissato}$$

Dominio e Codominio che variano a secondo del segno di b

x è la base della funzione potenza e varia nel dominio

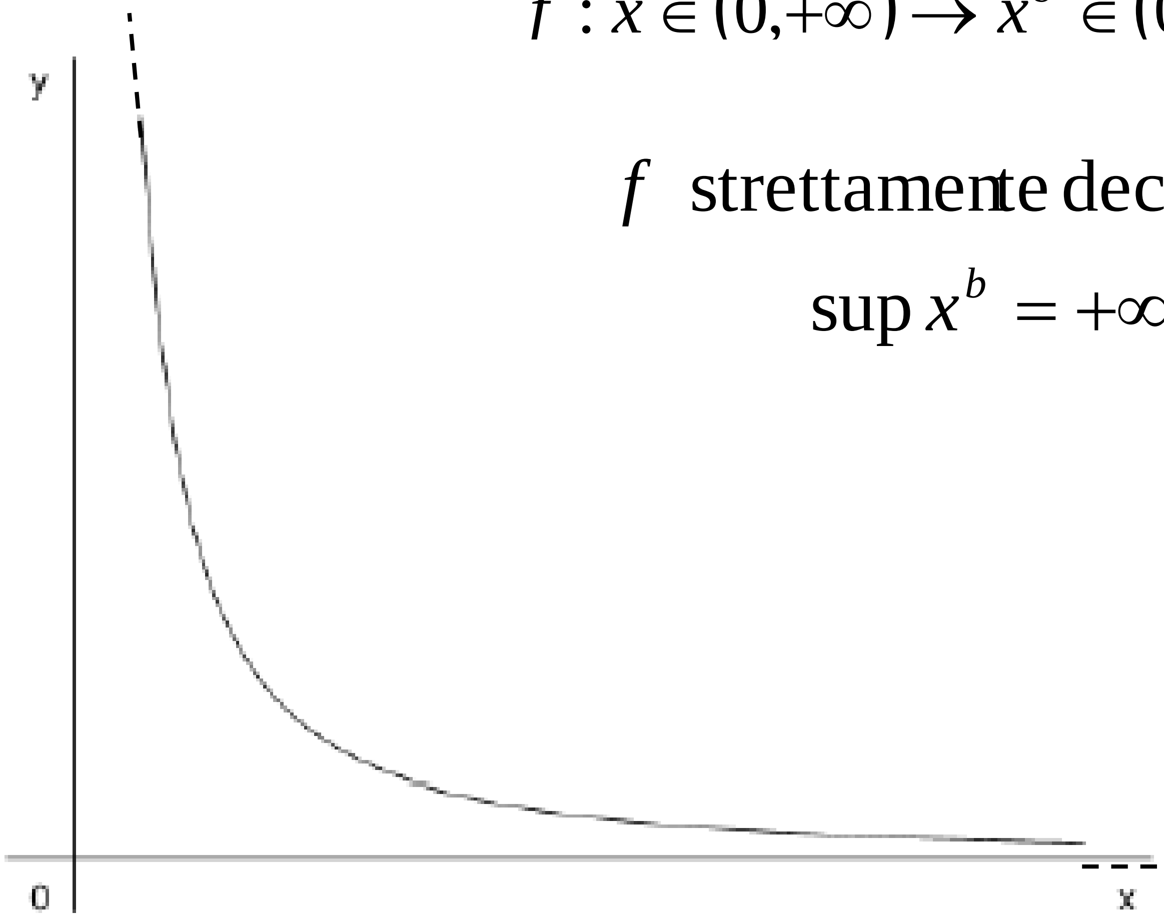
b è l'esponente della funzione potenza ed è fissato

Funzione potenza ad esponente reale (b<0)

$$f(x) = x^b, \quad b \in R \text{ fissato}$$

$$b < 0$$

$$f : x \in (0,+\infty) \to x^b \in (0,+\infty)$$



$$f \text{ strettamente decrescente in } (0,+\infty)$$

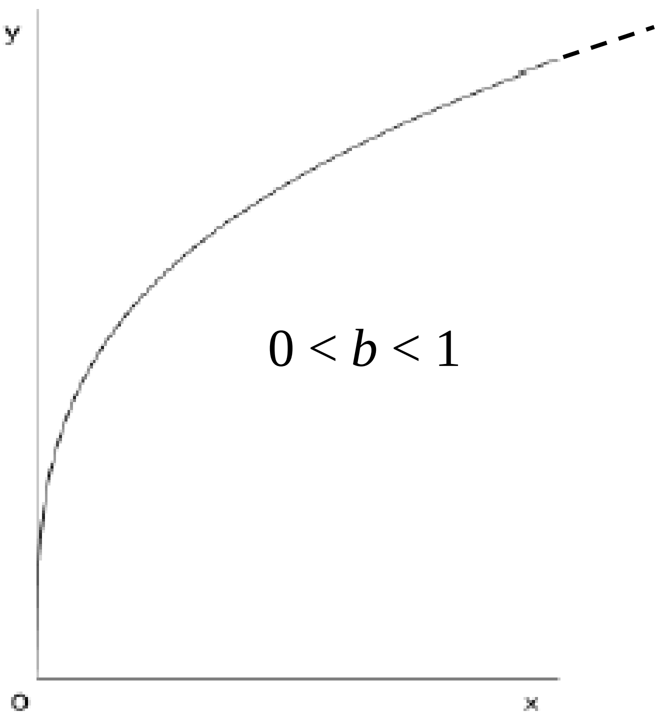
$$\sup x^b = +\infty; \inf x^b = 0$$

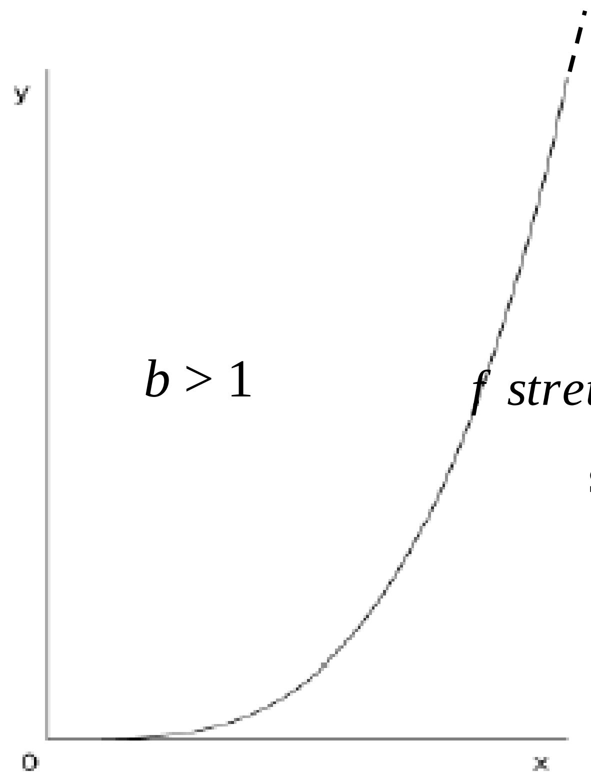
Funzione potenza ad esponente reale (b>0)

$$f(x) = x^b, \quad b \in R \text{ fissato}$$

$$b > 0$$

$$f : x \in [0,+\infty) \to x^b \in [0,+\infty)$$





f *strettamente crescente in* $(0,+\infty)$

$$\sup x^b = +\infty; \inf x^b = 0$$

Funzione potenza ad esponente intero (negativo)

Osservazione

Ricordiamo che per definizione si pone

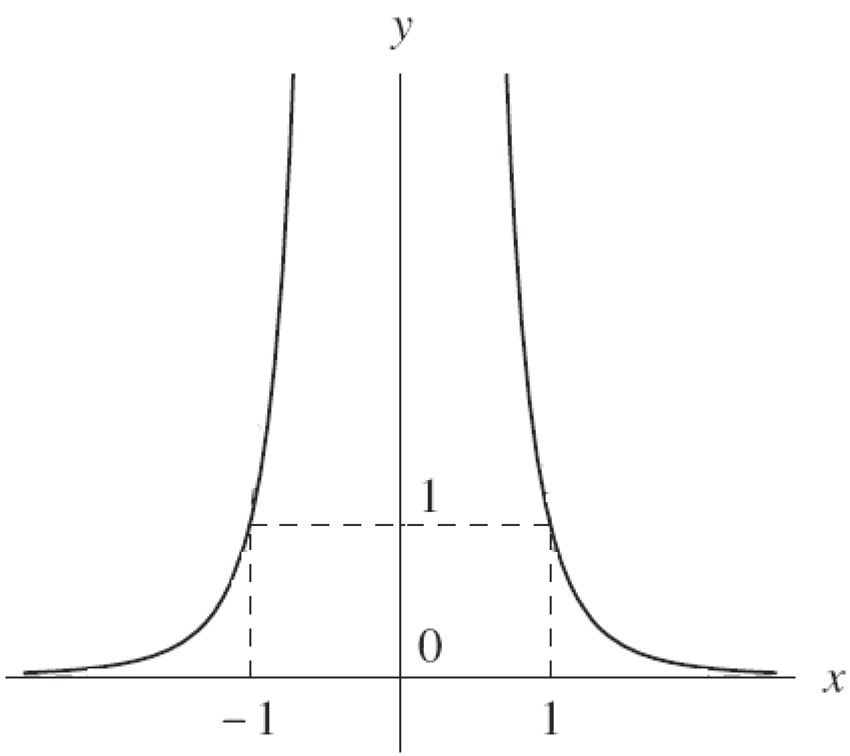
$$f(x) = x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}$$

Funzione potenza ad esponente intero (negativo)

$$f(x) = x^n, \quad n \in Z \quad fissato$$

$$n \text{ pari} \, (n < 0)$$

$$f : x \in R - \{0\} \to x^n \in (0, +\infty)$$



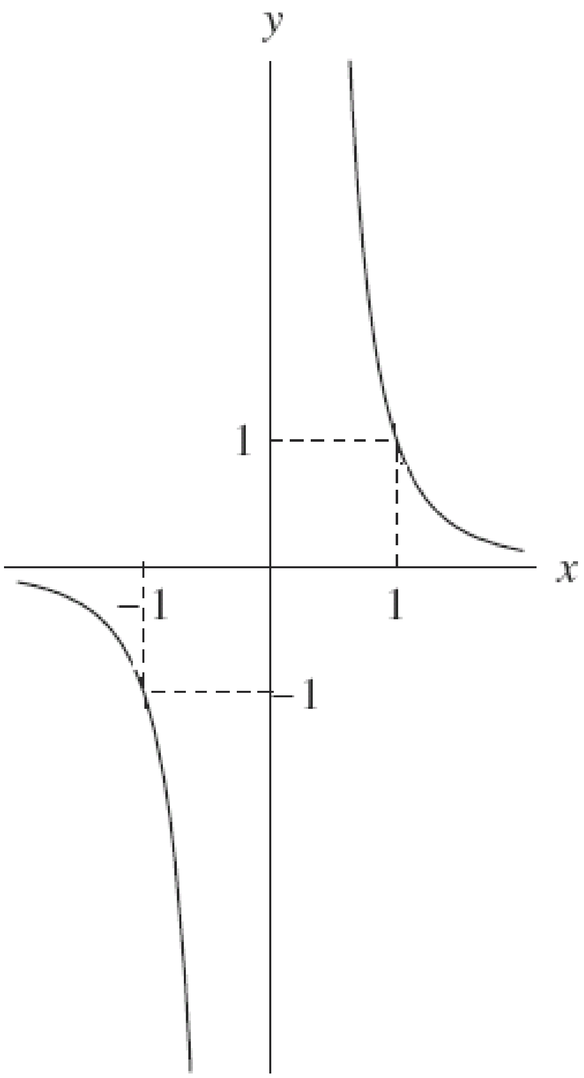
$$f \quad strettamente\ crescente\ in\ (-\infty, 0)$$

$$f \quad strettamente\ decrescente\ in\ (0, +\infty)$$

$$f \quad pari : x^n = (-x)^n$$

$$\sup x^n = +\infty; \inf x^n = 0$$

Funzione potenza ad esponente intero (negativo)



$$f(x) = x^n, \quad n \in Z \quad fissato$$

$$n \;\; dispari \;(n < 0)$$

$$f : x \in R - \{0\} \rightarrow x^n \in R - \{0\}$$

$$f \quad strettamente\; decrescente\; in \;\; R$$

$$f \;\; dispari: \; -x^n = (-x)^n$$

$$\sup x^n = +\infty; \inf \; x^n = -\infty$$

PROPRIETÀ DELLE POTENZE

1) $x^0 = 1, \ \forall x \in (0, +\infty) \ e \ 1^a = 1, \ \forall a \in R$

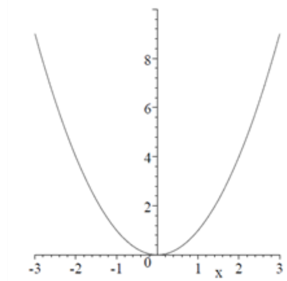
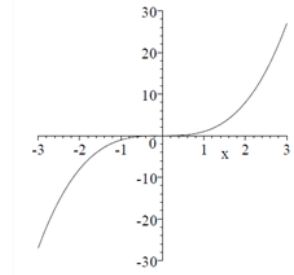
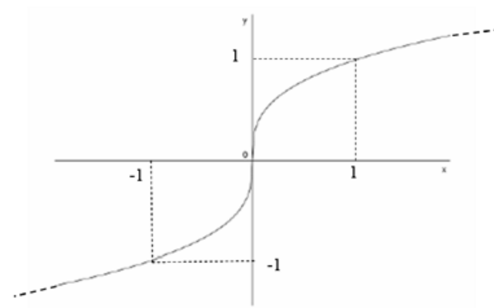
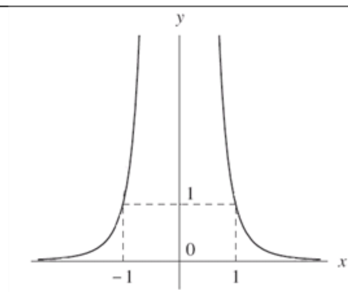
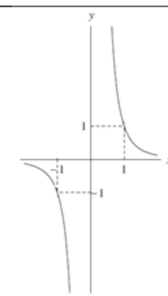
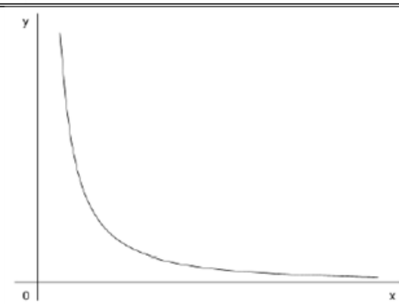
2) $x^a \cdot x^b = x^{a+b}, \ \forall x \in (0, +\infty), \ \forall a, b \in R$

3) $(x^a)^b = x^{a \cdot b}, \ \forall x \in (0, +\infty), \ \forall a, b \in R$

4) $x^b > 0, \ \forall x \in (0, +\infty), \ \forall b \in R$

5) $se \ x > 1 \ e \ a < b \Rightarrow x^a < x^b, \ \forall a, b \in R$

6) $se \ x < 1 \ e \ a < b \Rightarrow x^a > x^b, \ \forall a, b \in R$

	n pari	n dispari
x^n		
$X^{(1/n)}$		
x^n, $n<0$		
x^b, b reale	 b<0