16 bis. Perche' funzioni logaritmo.

Indice

1. Inversa della esponenziale
2. Il Ph
3. Altre applicazioni
4. Le scale logaritmiche

Crescita esponenziale

$$N_t=N_0 x 2^t$$

Una funzione esponenziale!
Un modello di crescita esponenziale

DOMANDA: Data una Popolazione N_t, con t ore e valore iniziale $N_0=1$, a che tempo t* la popolazione diventa uguale a 256?

Definizione di logaritmo

Si chiama **logaritmo in base *a* di *b* l'unica soluzione dell 'equazione esponenziale elementare nel caso determinato**
cioè l'esponente *x* da assegnare alla base *a* per ottenere il numero *b* .

$$a^x = b$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \log_a b$$

a= base dell'esponenziale e del logaritmo

16bis. Scale log e scale log-log.

Definizione di logaritmo

$a^x = b$ $\qquad\qquad$ $2^{t^*} = N_{t^*} = 256$

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad$ $\Updownarrow$

$x = \log_a b$ $\qquad\qquad$ $t^* = \log_2 256 = 8$

Definizione di logaritmo

In matematica, il **logaritmo** di un numero in una data base è l'esponente al quale la base deve essere elevata per ottenere il numero stesso

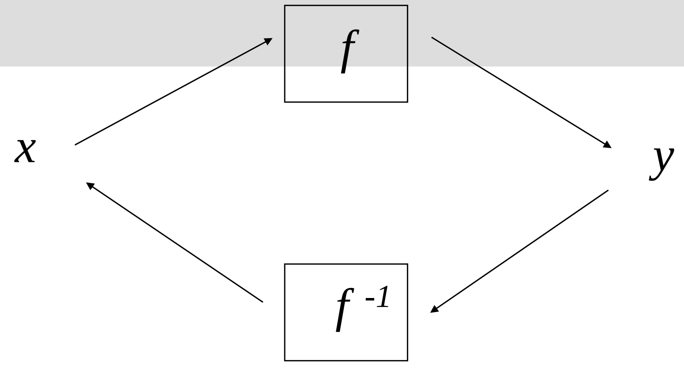
$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b,$$

$$a \in R,\ a > 0,\quad a \neq 1,\quad b > 0$$

$log_{10}(1000) = 3$

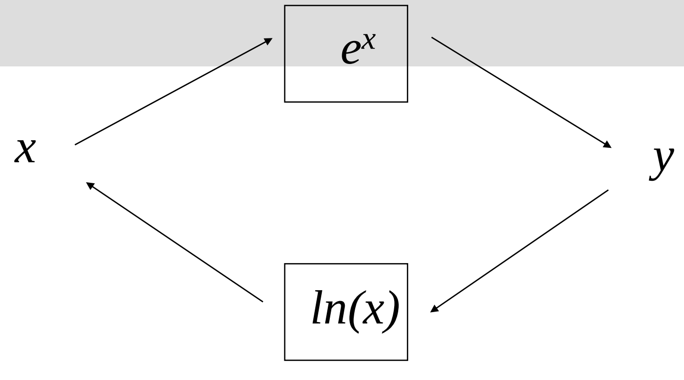
Per esempio,
il logaritmo in base 10 di 1000 è 3, poiché bisogna elevare 10 alla terza potenza per ottenere 1000, ovvero 10^3=1000.

Più in generale, se $b=a^x$, allora x è il logaritmo in base a di b, ovvero, scritto in notazione matematica $x=log_a b$.



Se si parte da x e si effettua un giro completo, passando per f e poi per f^{-1}, si torna in x. Cioè:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in A$$



Se si parte da x e si effettua un giro completo, passando per f e poi per f^{-1}, si torna in x. Cioè:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in A$$

Esponenziale vs logaritmo: funzioni inverse

Considero funzione exp e log di base *e*

$$\begin{tikzcd} x=2 \arrow[r, bend left, "e^x=e^2"] & f(x)=7.38 \arrow[l, bend left, "ln(f(x))=ln(7.38)"] \end{tikzcd}$$

Il pH

Il logaritmo più famoso che si incontra nello studio delle scienze naturali, quello di cui ha sentito parlare anche la gente comune, è senza dubbio il **pH**.

(e sicuramente dal prof. di Chimica:)

Questo è un simbolo che si usa in chimica per indicare la maggiore o minore concentrazioni di ioni di idrogeni.

Il punto riferimento è l'acqua pura che a 25° C ha 10^{-7} mol l^{-1}.

Sørensen si rese immediatamente conto che i calcoli si sarebbero di molto semplificati facendo riferimento al solo esponente del valore della concentrazione, anziché a tutto il numero. Propose quindi di chiamare questo esponente pH: dove p sta per potenza (cioè esponente del 10) e H sta per idrogeno (o meglio, per ione idrogeno)

$$pH = -\,Log_{10}\,[H^+]$$

Il pH: esercizio

Calcolare il pH di una soluzione di HCl 0.05 M?

pH = - Log [0.05]= - (-1.301) = 1.301

Il pH: esercizio esame

OB_7: Trovare il pH dalla concentrazione 23 molare ricavando x della seguente formula, dove x è la concentrazione di H+ (trascurando la x al denominatore)

$$0.01 \cdot 10^{-5} = \frac{x^2}{23 - x}$$

$$0.01 \cdot 10^{-5} = \frac{x^2}{23 - x} \quad \Rightarrow 0.01 \cdot 10^{-5} = \frac{x^2}{23}$$

$$\Rightarrow 23 \cdot 0.01 \cdot 10^{-5} = x^2 \quad \Rightarrow \sqrt{23 \cdot 0.01 \cdot 10^{-5}} = x$$

$$\Rightarrow 0.0000023 = x$$

pH = - Log_{10} [0.0000023]= - (-5.63) = +5.63

Altra applicazioni: Sismologia

La scala Richter:

Per descrivere gli effetti di un terremoto si usa spesso la scala Richter, in base alla quale si calcola la magnitudo M di un terremoto valendosi della seguente formula:

$M = 2/3 \log (E/E0)$

dove

E, in Joule, è l'energia totale sviluppata dal terremoto

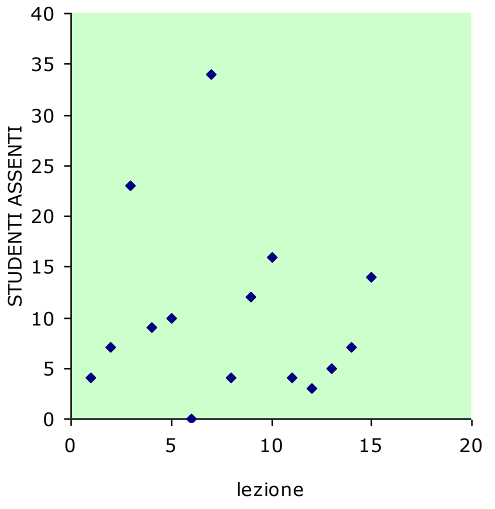
E0 è la minima energia rilevata in un terremoto.

2. Le scale logaritmiche

L'uso dei logaritmi, infine, è di fondamentale importanza nelle rappresentazione di dati sperimentali mediante l'utilizzo di scale logaritmiche, che consentono di rappresentare in maniera efficace su uno stesso grafico dati i cui ordini di grandezza siano estremamente differenti

2. Le scale logaritmiche: scala lineare

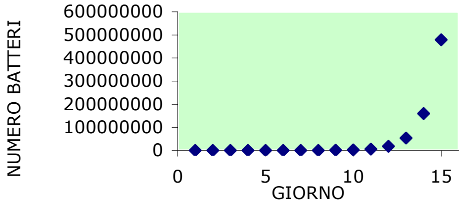
LEZIONE NUMERO	Numero studenti assenti
1	4
2	7
3	23
4	9
5	10
6	0
7	34
8	4
9	12
10	16
11	4
12	3
13	5
14	7
15	14



2. Le scale logaritmiche: scala lineare

GIORNO	NUMERO BATTERI
1	100
2	300
3	900
4	2700
5	8100
6	24300
7	72900
8	218700
9	656100
10	1968300
11	5904900
12	17714700
13	53144100
14	159432300
15	478296900

Crescita di batteri che triplicano il loro numero ogni giorno

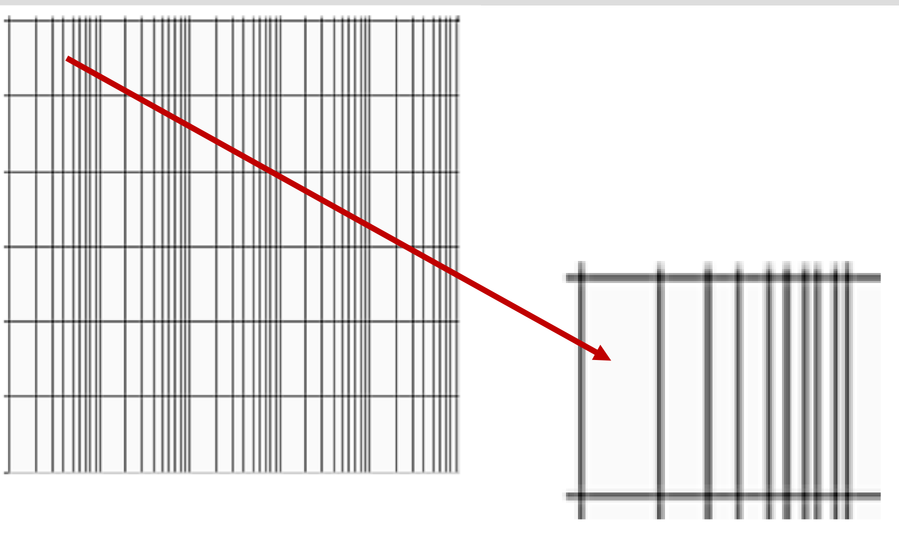


La notevole differenza fra gli ordini di grandezza sull’asse delle ordinate rende il grafico poco rappresentativo del fenomeno in esame

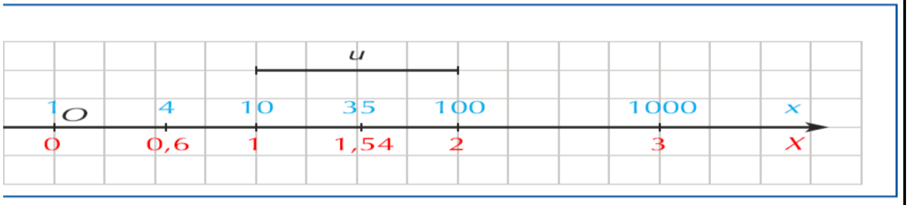
2. Le scale logaritmiche: scala logaritmica

Conviene utilizzare una
scala logaritmica.
I dati vengono sostituiti dai loro logaritmi (il grafico fornisce un'idea dell'ordine di grandezza dei dati)
L'utilizzo di una scala logaritmica può essere estremamente utile, anche se la lettura dei dati espressi in una scala logaritmica richiede una certe attenzione!

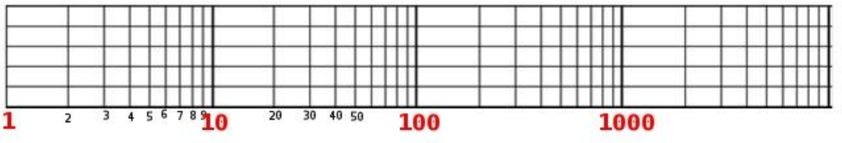
2. Le scale logaritmiche: scala logaritmica



2. Le scale logaritmiche: scala log_10

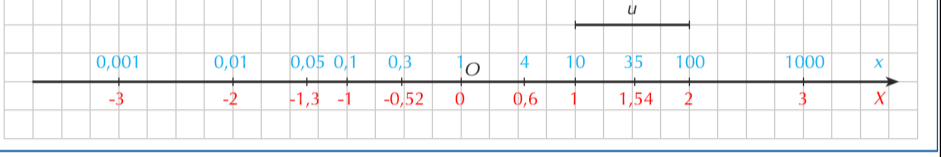


$0.6=\log_{10}(4)$ $1.54=\log_{10}(35)$ $3=\log_{10}(1000)$

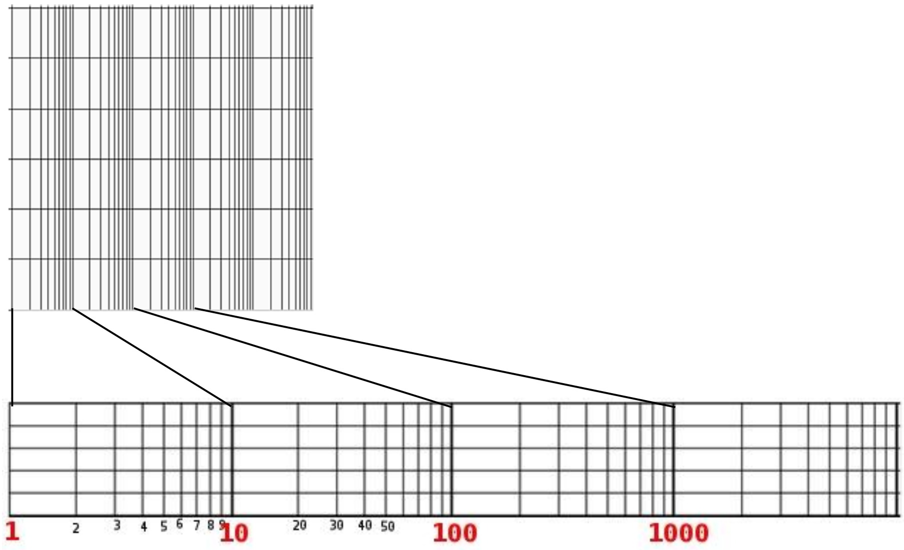


2. Le scale logaritmiche: scala log_10

Figura 1



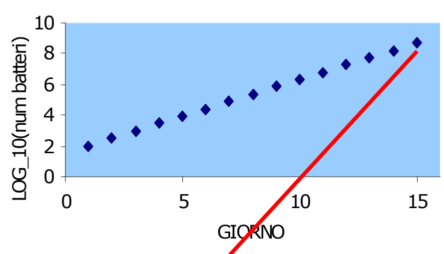
2. Le scale logaritmiche: scala log_10



2. Le scale logaritmiche: scala logaritmica

GIORNO	NUMERO BATTERI
1	100
2	300
3	900
4	2700
5	8100
6	24300
7	72900
8	218700
9	656100
10	1968300
11	5904900
12	17714700
13	53144100
14	159432300
15	478296900

Conviene utilizzare una scala logaritmica.
I dati vengono sostituiti dai loro logaritmi
(il grafico fornisce un idea dell'ordine di grandezza dei dati)



$$10^{8,679} = 4,78E+08$$

$$\boldsymbol{8,679698} = \boldsymbol{\log_{10}}(4,78E+08) \Leftrightarrow 4,78E+08 = 10^{\boldsymbol{8,679698}}$$

2. Le scale logaritmiche: scala logaritmica

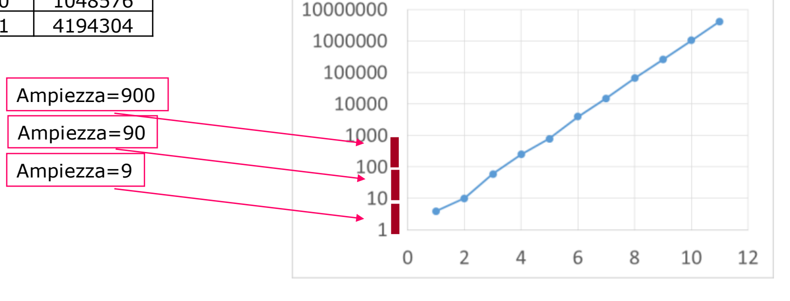
GIORNO	NUMERO BATTERI	LOG
1	100	2
2	300	2.477121
3	900	2.954243
4	2700	3.431364
5	8100	3.908485
6	24300	4.385606
7	72900	4.862728
8	218700	5.339849
9	656100	5.81697
10	1968300	6.294091
11	5904900	6.771213
12	17714700	7.248334
13	53144100	7.725455
14	159432300	8.202576
15	478296900	8.679698

$$\boldsymbol{8{,}679698} = \boldsymbol{\log_{10}}(4{,}78E+08) \Leftrightarrow 4{,}78E+08 = 10^{\boldsymbol{8{,}679698}}$$

2. Le scale logaritmiche

X	Y
1	4
2	10
3	60
4	250
5	800
6	4000
7	15000
8	66600
9	260000
10	1048576
11	4194304

Scala logaritmica (non lineare) sull'asse delle ordinate: le ordinate vengono sostituite dai rispettivi logaritmi (in base 10 ad es.) (a segmenti uguali sull'asse delle *y* corrispondono intervalli di differente ampiezza)



2. Le scale logaritmiche e notazione scientifica

tempo	batteri
1	10
2	100
3	1000
4	10000
5	100000
6	1000000
7	10000000
8	100000000
9	1000000000
10	10000000000
11	100000000000
12	1000000000000
13	10000000000000
14	100000000000000
15	1000000000000000
16	10000000000000000
17	100000000000000000
18	1000000000000000000
19	10000000000000000000
20	100000000000000000000
21	1000000000000000000000
22	10000000000000000000000
23	100000000000000000000000
24	1000000000000000000000000
25	10000000000000000000000000

$N_t=10^t$

Il logaritmo mi da informazione sull'ordine di grandezza (nella relativa base) del numero