15. Funzione potenza con tutti i tipi di esponenti

$$f(x)=x^b$$

Leggi allometriche

Negli individui di molte specie, il rapporto tra il peso dello scheletro Ps e quello corporeo P non e' costante e diminuisce all'aumentare della dimensione dell'organismo.

In genere se x e y indicano le misure relative a due parti del corpo di un organismo, una legge allometrica è espressa come funzione potenza

$$y=f(x)=ax^b \quad (con\ b<1)$$

Indice di massa corporeo

L'indice di massa corporeo (IMC) è un indice biometrico per "misurare" se un individuo ha peso vicino a quello considerato normale.

Indichiamo con p il peso (kg) e con h la sua altezza (m)

$$IMC = p \bullet h^{-2}$$

E' un indice di tipo allometrico, ritenuto utile perché e' tanto piu grande quanto maggiore è la percentuale di massa grassa del corpo.

In particolare l'Organizzazione Mondiale della Sanità considera "obesa" gli individui con IMC>30, "sottopeso" gli individui con IMC<18.5 e "gravemente magri" quelli con IMC<16

E tu che IMC hai?

Forma, dimensione e vita

La forma e la dimensione della vita dipende da leggi allometriche!!!!

Il piu grande animale vivente sulla terra e’ l’elefante africano (7 tonnellate). L’azione della gravità e’ esercitata sulle zampe (grandi diametri e ben distanziate).

Le balenottere azzurre possono raggiungere 130 tonnellate!!! Perche? Sfruttano la spinta di Archimede.

La crescita del peso “segue” la crescita del volume -> legge di potenza!!!!!

Forma, dimensione e vita 2

La crescita del peso “segue” la crescita del volume -> legge di potenza (b=3)!!!!!

La resistenza di un osso al peso e’ una funzione quadratica, perche dipende dall’area della sezione trasversale -> legge di potenza (b=2)!!!!!

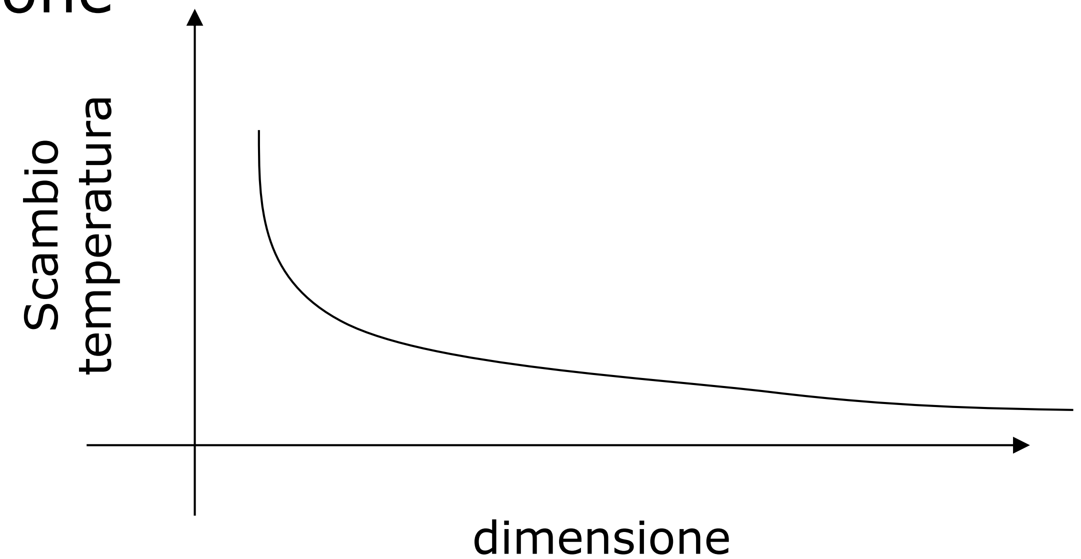
(un bambino puo portare un altro bambino, hai mai visto un elefante che porta un altro elefante? :)

L’evoluzione risolve il problema dell’eccessiva fragilità delle strutture favorendo la riproduzione di organismi le cui dimensioni siano contenute entro opportuni limiti e il cui corpo sia composto da materiali adeguati!!!

Forma, dimensione e vita 3

Bilancio energetico

1. Un organismo produce energia proporzionale al suo peso
2. La regolazione della temperatura corporea e' proporzionale alla sua superficie
3. Il rapporto tra la superficie esterna e il suo peso -> 1/dimensione



Strategie adattative: animali dotati di peli (cani), sudorazione (uomini), unirsi in branchi piu grandi (pecore)

Indice della lezione

1. Funzione potenza ad esponente naturale
   - Esponente naturale pari
   - Esponente naturale dispari
2. Funzione radice ennesima (esponente razionale)
   - Esponente razionale con base pari
   - Esponente razionale con base dispari
3. Funzione potenza x^b , ad esponente reale
   - $b > 0$
   - $b < 0$

Funzione potenza ad esponente naturale

$$f(x) = x^n, \quad n \in N \;\; fissato$$

$$f : x \in R \to x^n \in Codominio\ che\ varia\ a\ secondo\ di\ n$$

x è la base della funzione potenza e varia nel dominio

n è l'esponente della funzione potenza e viene fissato

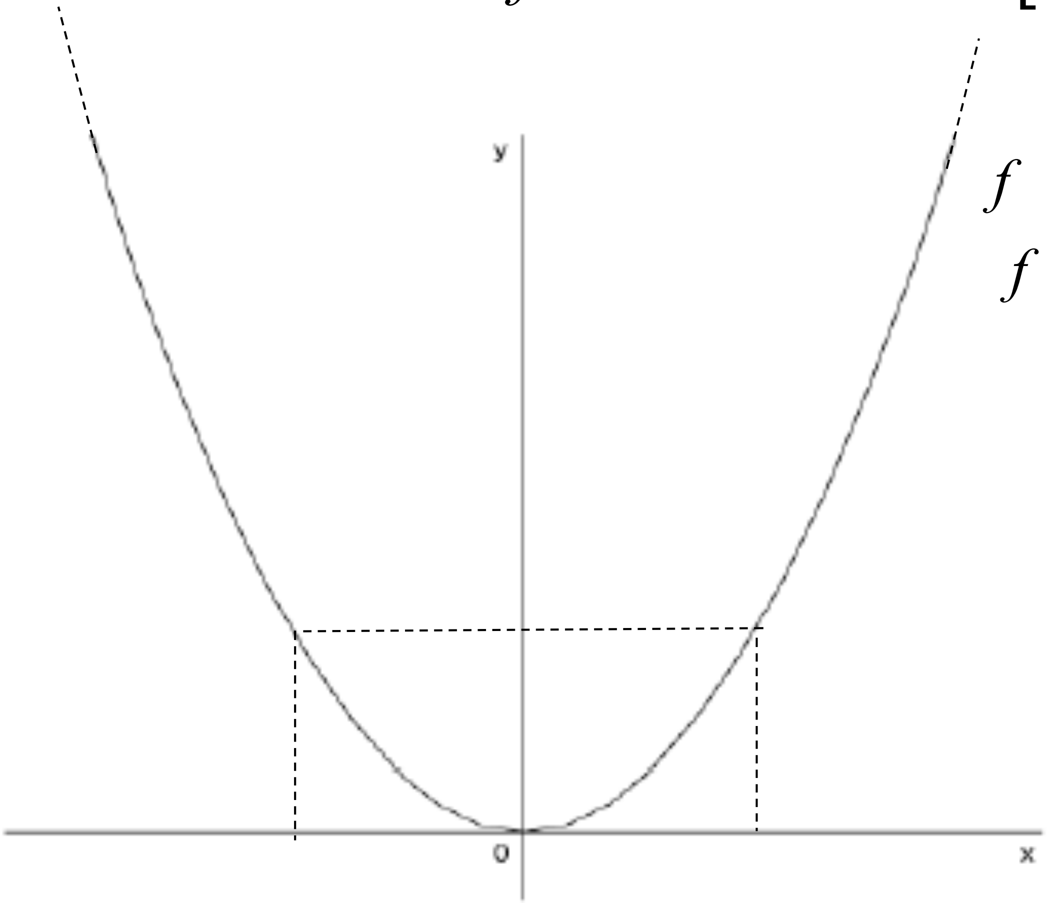
Funzione potenza ad esponente intero (positivo)

Funzione potenza ad esponente naturale pari

$$f(x) = x^n, \quad n \in N \text{ fissato}$$

$$n \text{ pari}$$

$$f : x \in R \to x^n \in [0,+\infty)$$



$$f \;\; \textit{strettamente decrescente in } (-\infty,0)$$

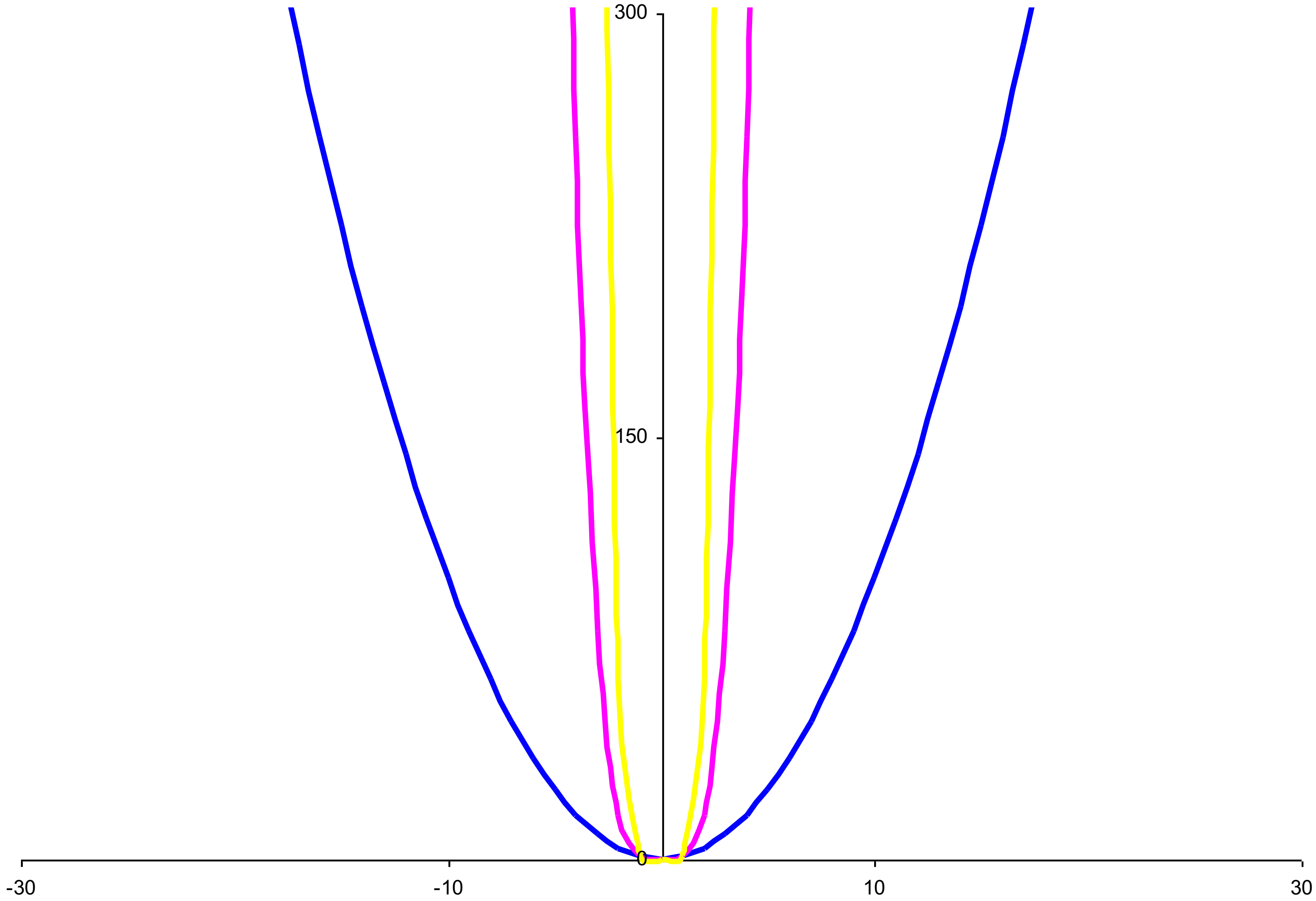
$$f \;\; \textit{strettamente crescente in } (0,+\infty)$$

$$f \;\; \textit{pari} : x^n = (-x)^n$$

$$\sup x^n = +\infty; \inf x^n = 0$$

Funzione potenza ad esponente naturale pari

$f(x) = x^6$ $f(x) = x^4$ $f(x) = x^2$



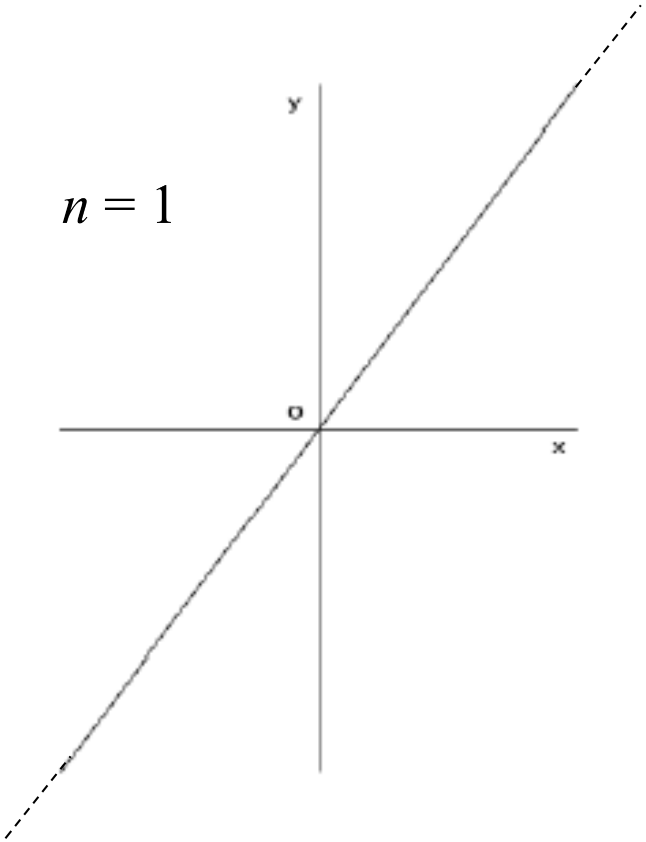
Funzione potenza ad esponente naturale dispari

$$f(x) = x^n, \quad n \in N \text{ fissato}$$

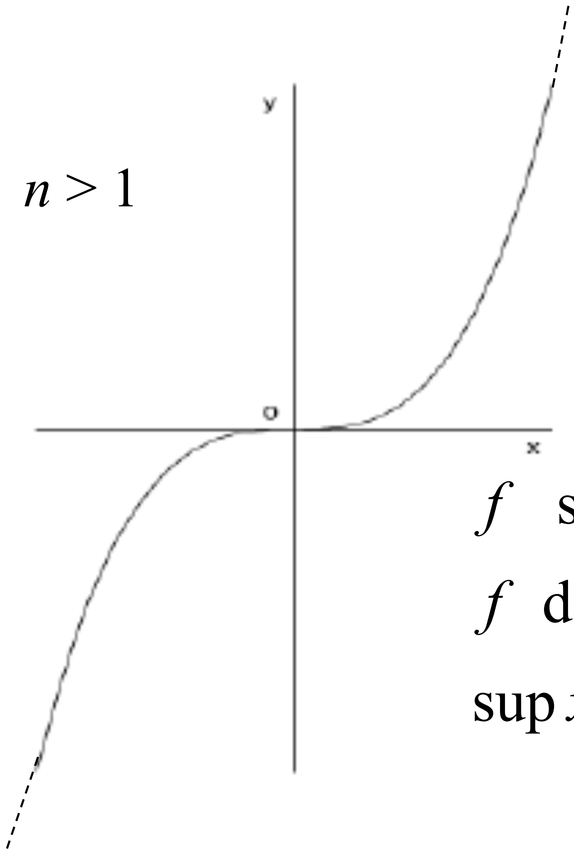
$$n \text{ dispari}$$

$$f : x \in R \to x^n \in R$$

$n = 1$



$n > 1$



f strettamente crescente in R

f dispari : $-x^n = (-x)^n$

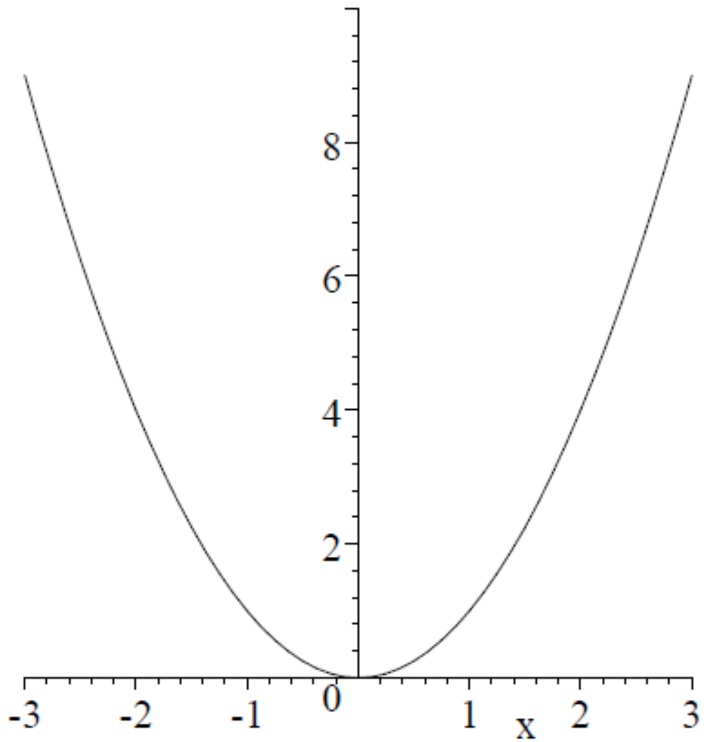
$\sup x^n = +\infty; \inf x^n = -\infty$

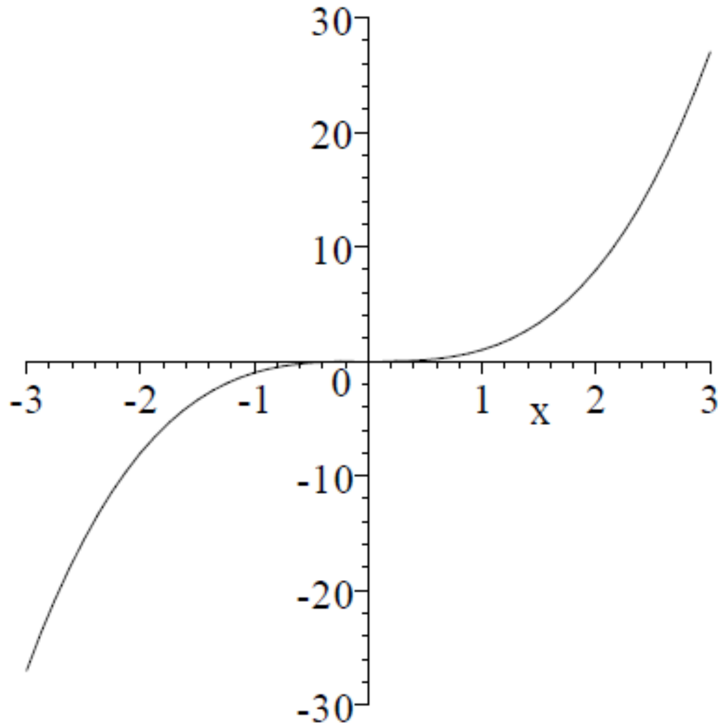
Funzione potenza ad esponente naturale dispari

$f(x) = x^9$ $f(x) = x^3$

Funzione potenza e funzione inversa

n pari	*n* dispari
$f(x) = x^n$	$f(x) = x^n$
$f : x \in R \to x^n \in [0,+\infty[$	$f : x \in R \to x^n \in R$
f NON str. crescente in $]-\infty,+\infty[$	f str. crescente in $]-\infty,+\infty[$
f NON invertibile in $]-\infty,+\infty[$	f invertibile in $]-\infty,+\infty[$



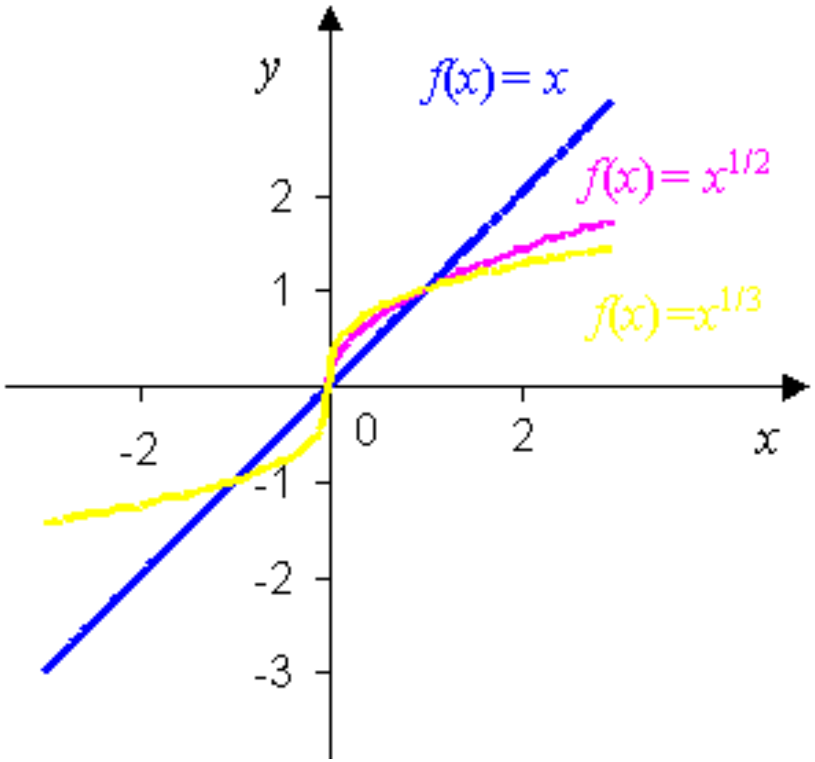


Funzione potenza ad esponente 1/n (n positivo)

Funzione radice

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, \quad n \in N \text{ fissato}, \, n \geq 2$$

Dominio e Codominio che variano a secondo di n

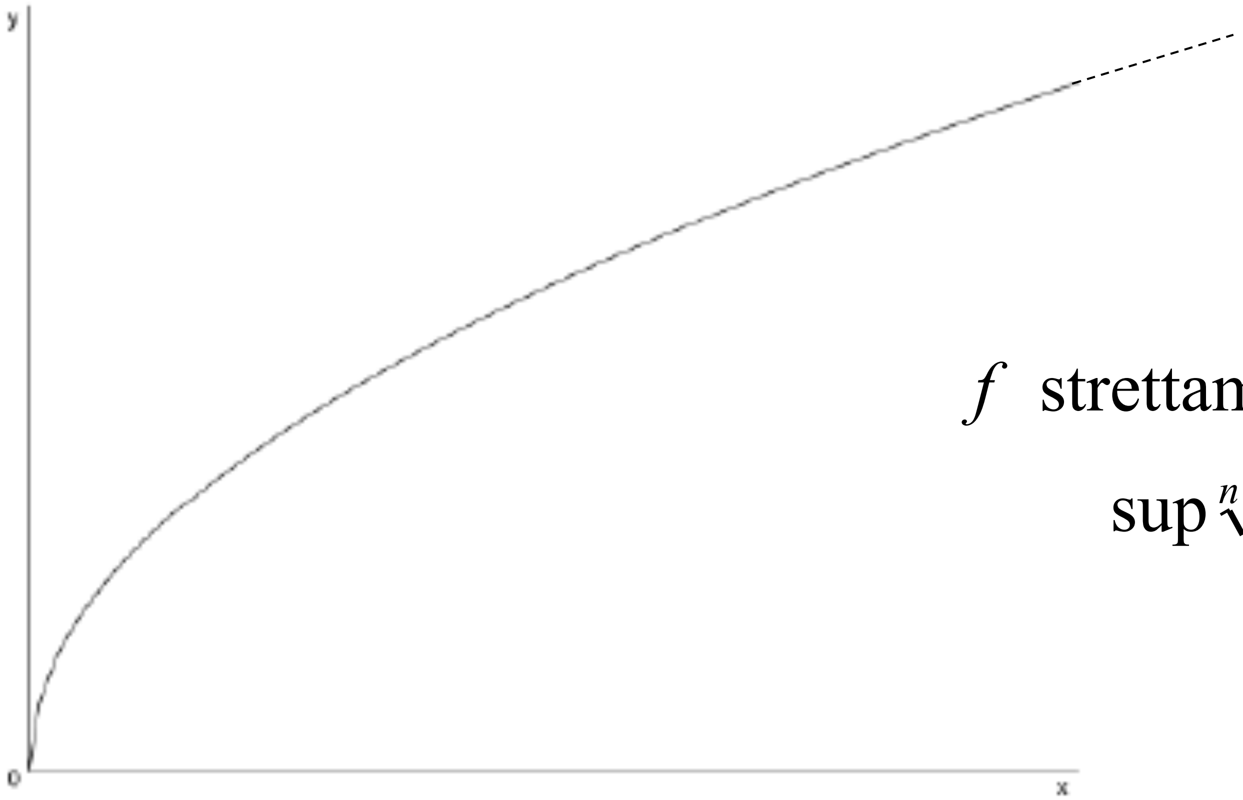


Funzione radice n pari

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, \quad n \in N \text{ fissato}, n \geq 2$$

$$n \text{ pari}$$

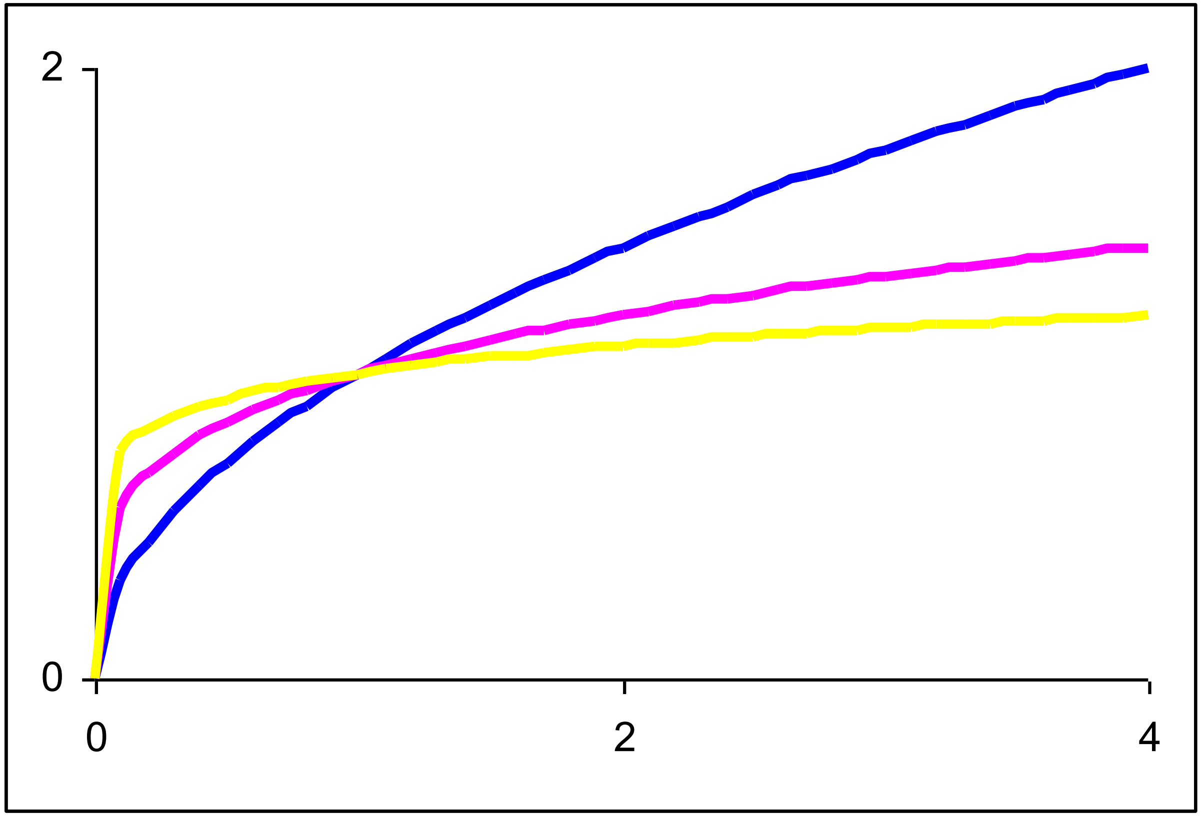
$$f : x \in [0,+\infty) \to \sqrt[n]{x} \in [0,+\infty)$$



f strettamente crescente in $[0,+\infty)$

$$\sup \sqrt[n]{x} = +\infty; \inf \sqrt[n]{x} = 0$$

Funzione radice n pari



$f(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = \sqrt[4]{x}$

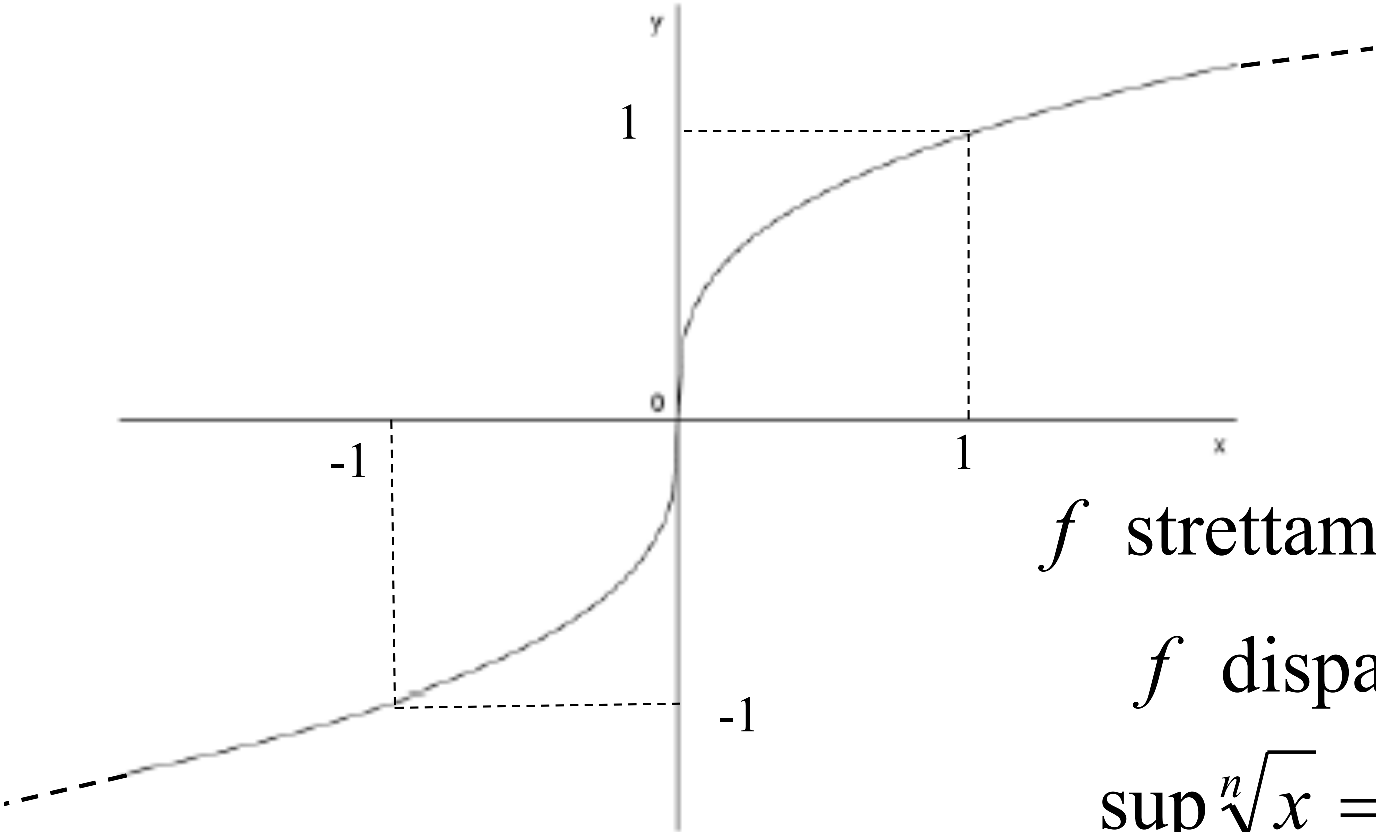
$f(x) = {}^{8}\; x$

Funzione radice n dispari

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, \quad n \in N \text{ fissato}, n \geq 2$$

$$n \text{ dispari}$$

$$f : x \in R \to \sqrt[n]{x} \in R$$



$$f \text{ strettamente crescente in } R$$

$$f \text{ dispari} : -\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{-x}$$

$$\sup \sqrt[n]{x} = +\infty; \inf \sqrt[n]{x} = -\infty$$

Funzione potenza ad esponente intero (negativo)

Osservazione

Ricordiamo che per definizione si pone

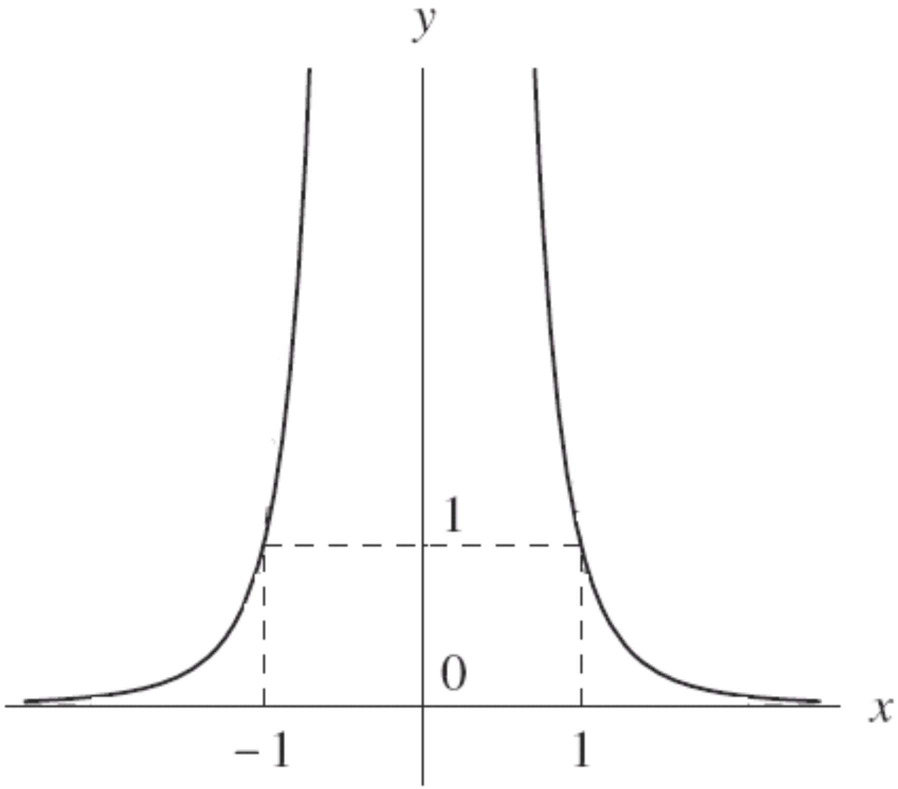
$$f(x) = x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}$$

Funzione potenza ad esponente intero (negativo)

$$f(x)=x^{n}, \quad n \in Z \quad \mathit{fissato}$$

$$n \text{ pari } (n<0)$$

$$f: x \in R-\{0\} \rightarrow x^{n} \in (0,+\infty)$$



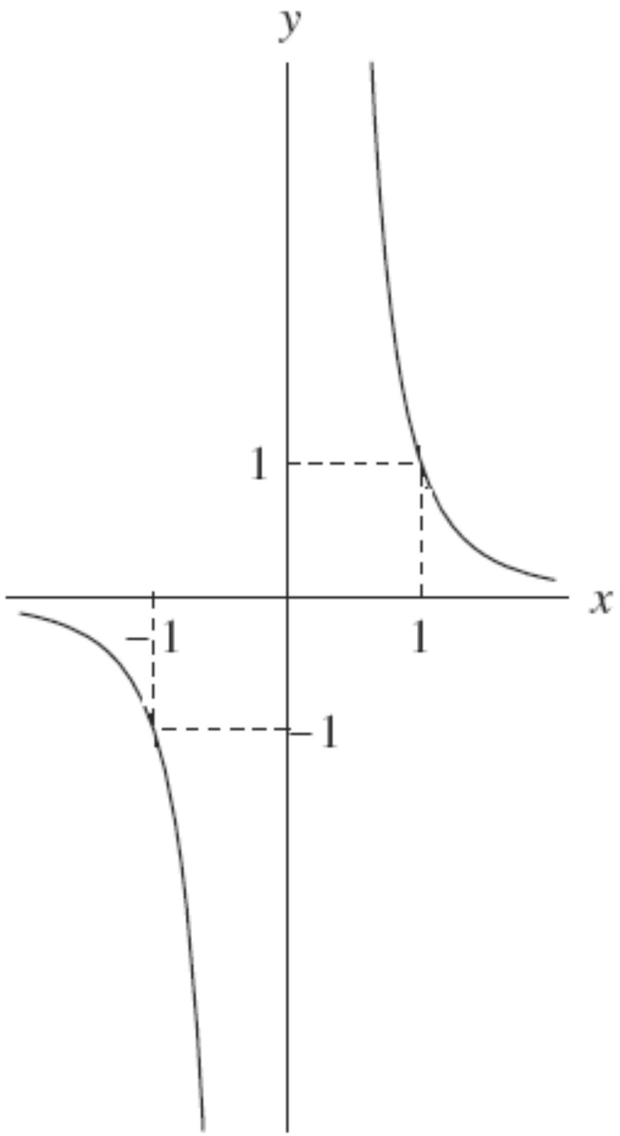
$$f \quad \textit{strettamente crescente in } (-\infty, 0)$$

$$f \quad \textit{strettamente decrescente in } (0,+\infty)$$

$$f \quad \textit{pari} : x^{n}=(-x)^{n}$$

$$\sup x^{n}=+\infty ; \inf x^{n}=0$$

Funzione potenza ad esponente intero (negativo)



$$f(x) = x^n, \quad n \in Z \quad fissato$$

$$n \ dispari \ \ (n < 0)$$

$$f : x \in R - \{0\} \rightarrow x^n \in R - \{0\}$$

$$f \quad strettamente\ decrescente\ in \ \ R$$

$$f \ \ dispari : \ -x^n = (-x)^n$$

$$\sup x^n = +\infty; \inf x^n = -\infty$$

Funzione potenza ad esponente reale

Funzione potenza ad esponente reale

$$f(x) = x^b, \quad b \in R \text{ fissato}$$

Dominio e Codominio che variano a secondo del segno di b

x è la base della funzione potenza e varia nel dominio

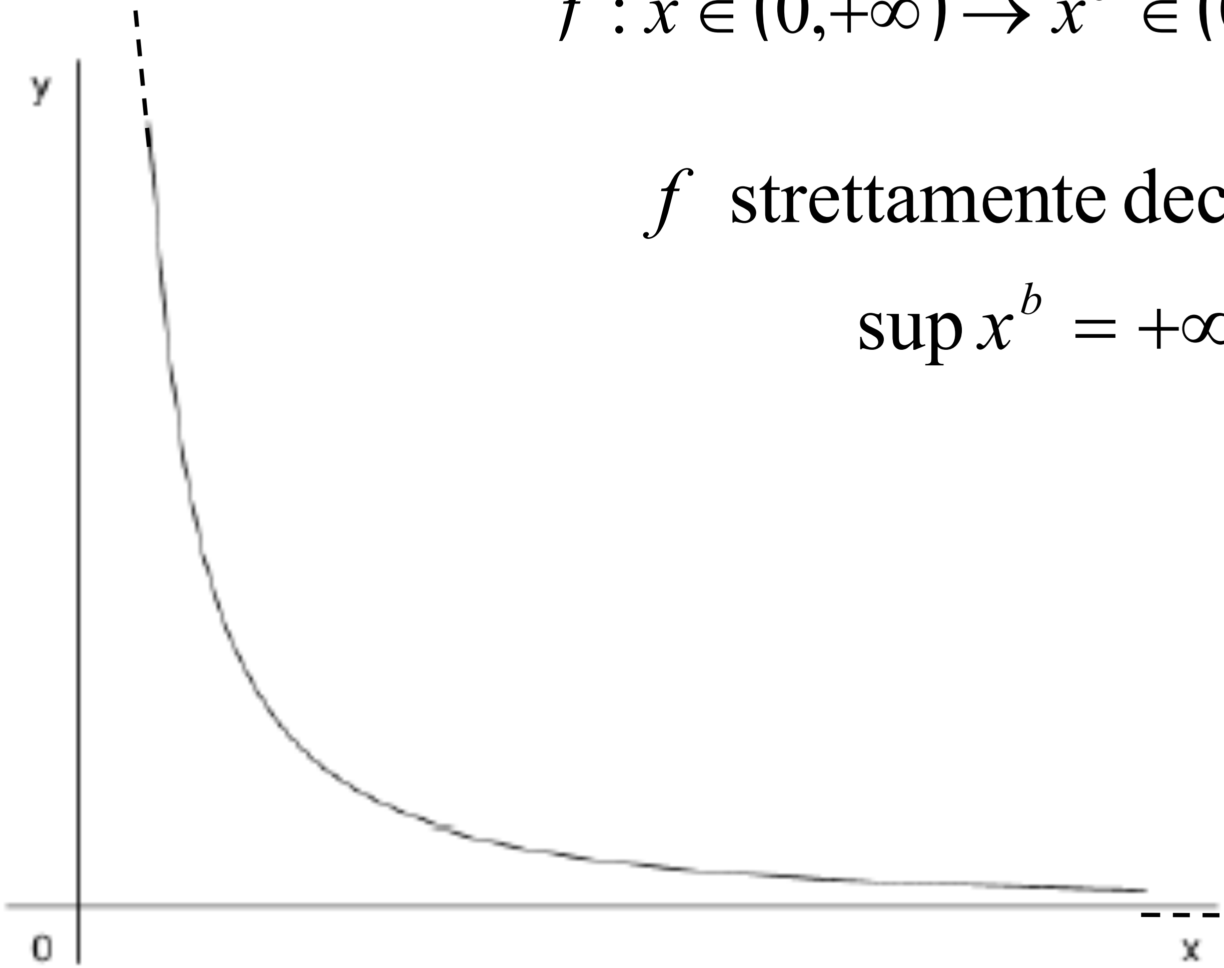
b è l'esponente della funzione potenza ed è fissato

Funzione potenza ad esponente reale (b<0)

$$f(x) = x^b, \quad b \in R \text{ fissato}$$

$$b < 0$$

$$f : x \in (0,+\infty) \to x^b \in (0,+\infty)$$



f strettamente decrescente in $(0,+\infty)$

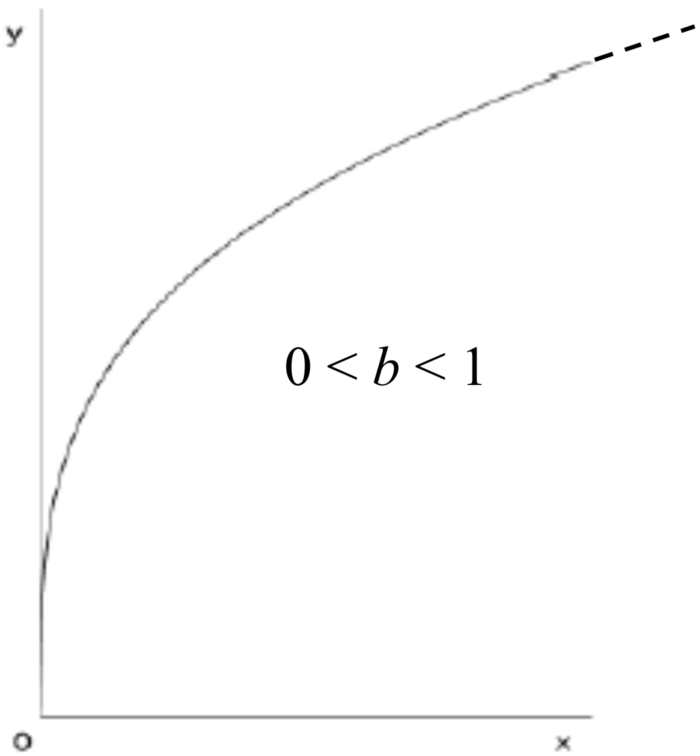
$$\sup x^b = +\infty; \inf x^b = 0$$

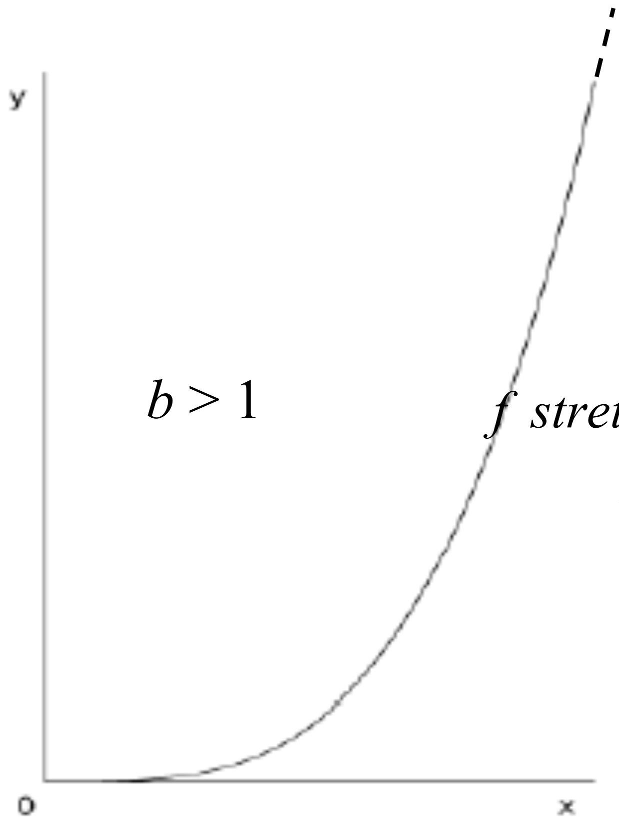
Funzione potenza ad esponente reale (b>0)

$$f(x) = x^b, \quad b \in R \ \text{fissato}$$

$$b > 0$$

$$f : x \in [0,+\infty) \rightarrow x^b \in [0,+\infty)$$





f *strettamente crescente in* $(0,+\infty)$

$$\sup x^b = +\infty; \inf x^b = 0$$

Osservazione

*In generale la funzione potenza e' ben definita per **qualunque esponente se la base e' positiva.***

*Inoltre puòessere definita anche **con base negativa se l'esponente e' intero oppure razionale (frazione) con denominatore dispari***

Esempio Calcolo di $(-2)^{2.1}=(-2)^{21/10}=((-2)^{21})^{1/10}$

Non si può calcolare la radice decima (pari) di un numero negativo!)

base positiva -> qualunque esponente

base negativa -> esponente intero o razionale (frazione) con denominatore dispari

PROPRIETÀ DELLE POTENZE

$$1)\ x^0 = 1,\ \forall x \in (0,+\infty)\ e\ 1^a = 1,\ \forall a \in R$$

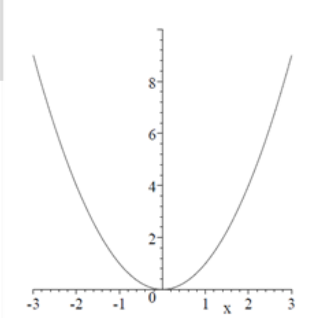
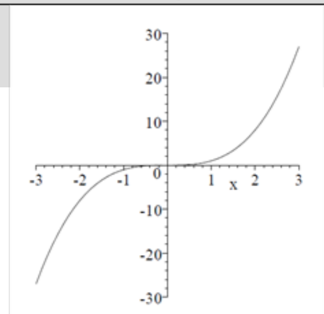
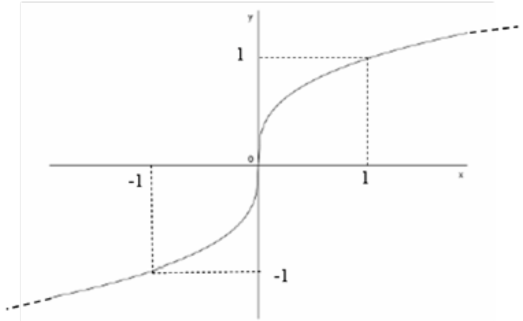
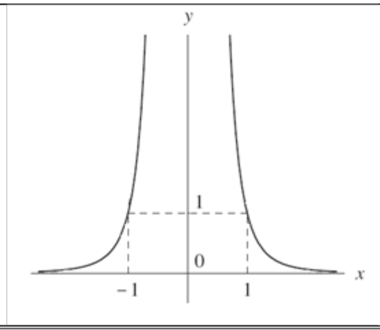
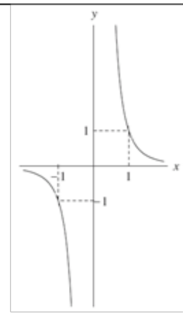
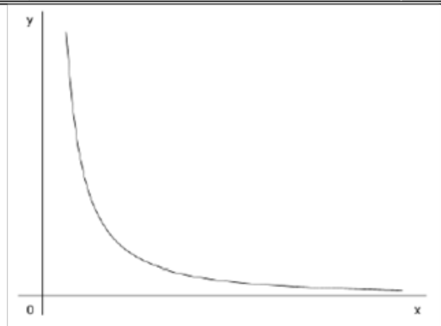
$$2)\ x^a \cdot x^b = x^{a+b},\ \forall x \in (0,+\infty),\ \forall a,b \in R$$

$$3)\ (x^a)^b = x^{a \cdot b},\ \forall x \in (0,+\infty),\ \forall a,b \in R$$

$$4)\ x^b > 0,\ \forall x \in (0,+\infty),\ \forall b \in R$$

$$5)\ se\ x > 1\ e\ a < b \Rightarrow x^a < x^b,\ \forall a,b \in R$$

$$6)\ se\ x < 1\ e\ a < b \Rightarrow x^a > x^b,\ \forall a,b \in R$$

	n pari	n dispari
x^n		
$X^{(1/n)}$		
x^n, $n<0$		
x^b, b reale	 b<0