Matematica

(Esercitazioni)

dott. Francesco Giannino

dott. Valeria Monetti

Indice lezione

- Operazioni con i limiti e forme indeterminate
- Limiti di polinomi
- Limiti di funzioni razionali fratte

Operazioni con i limiti: schema

$\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} g(x)$	$\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$	$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$	$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)}$	$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$
l	m	$l+m$	lm	$\frac{1}{m}$	$\frac{l}{m}$
l	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	0
$\pm\infty$	m	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\frac{1}{m}$	$\pm\infty$
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	*ind*	0	0
$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	*ind*	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	*ind*
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	*ind*
$+\infty$	$-\infty$	*ind*	$-\infty$	0	*ind*

Limiti

I teoremi sui limiti e sulle funzioni continue permettono il calcolo dei limiti delle funzioni in numerosissimi casi.

Esercizio 1. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 2}\left(x^3-2x+5\right)$$

Soluzione. La somma di funzioni continue è ancora una funzione continua ed il limite della somma di funzione è uguale alla somma dei limiti. Quindi:

$$\lim_{x\to 2}\left(x^3-2x+5\right)=\lim_{x\to 2}x^3-\lim_{x\to 2}2x+\lim_{x\to 2}5=$$

$$=8-4+5=\boxed{9}$$

Esercizio 2. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 4}\left(2x+\sqrt{x}-1\right)$$

Soluzione. La somma di funzioni continue è ancora una funzione continua ed il limite della somma di funzione è uguale alla somma dei limiti. Quindi:

$$\lim_{x\to 2}\left(2x+\sqrt{x}-1\right)=\lim_{x\to 4}2x+\lim_{x\to 4}\sqrt{x}-\lim_{x\to 4}1=$$

$$=8+2-1=\boxed{9}$$

Esercizio 3. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}}{2x}$$

Soluzione. La somma di funzioni continue è ancora una funzione continua ed il limite del quoziente è uguale al quoziente dei limiti. Quindi:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}}{2x}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+7}}{\lim\limits_{x\to 2}2x}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(x+7)}}{4}=\frac{\sqrt{9}}{4}\boxed{=\frac{3}{4}}$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to\sqrt{3}}\left(\frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}\right)$$

Soluzione. La somma di funzioni continue è ancora una funzione continua ed il limite del quoziente è uguale al quoziente dei limiti.

$$\lim_{x\to\sqrt{3}}\left(\frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left(x^2-3\right)}{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left(x^4+x^2+1\right)}=\frac{3-3}{9+3+1}=\frac{0}{13}$$

$$\boxed{=0}$$

Limiti di funzioni

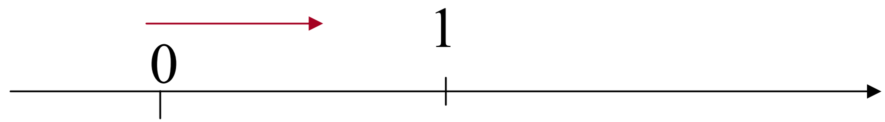
Esercizio 5. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+3}{x-1}$$

Soluzione. Nel punto x=1 la funzione al denominatore si annulla. Dobbiamo quindi calcolare due limiti: da destra e da sinistra.

da sinistra

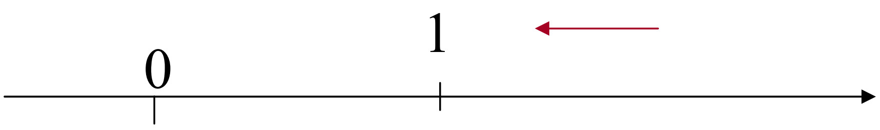
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+3}{x-1} = \frac{1+3}{0^-} = -\infty$$



Limiti di funzioni

da destra

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+3}{x-1}=\frac{1+3}{0^+}=+\infty$$



$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+3}{x-1}\neq\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+3}{x-1}$$

Nel punto x =1 non esiste il limite della funzione poiché limite destro e limite sinistro non coincidono.

Limiti di funzioni

Esercizio 6. Calcolare il seguente limite:

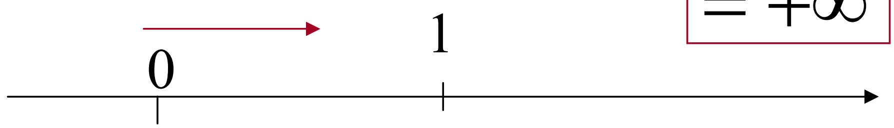
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 2}{x^2 - 1}$$

Soluzione. Nel punto x=1 la funzione al denominatore si annulla. Dobbiamo quindi calcolare due limiti: da destra e da sinistra.

da sinistra

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3 - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^3 - 2}{(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{0^- \cdot 2} = \frac{-1}{0^-}$$

$$\boxed{= +\infty}$$

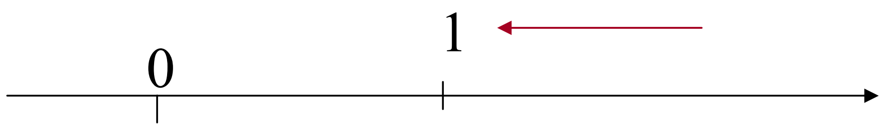


Limiti di funzioni

da destra

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{-1}{0^+\cdot 2}=\frac{-1}{0^+}$$

$$\boxed{=-\infty}$$



$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-2}{x^2-1}\neq\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-2}{x^2-1}$$

Nel punto x =1 non esiste il limite della funzione poiché limite destro e limite sinistro non coincidono.

Limiti

Abbiamo visto come i teoremi sui limiti e sulle funzioni continue permettono il calcolo dei limiti delle funzioni in numerosissimi casi.

Tuttavia, esistono funzioni cui non sono applicabili i teoremi enunciati e per le quali, quindi, non è possibile trovare immediatamente una conclusione circa l'esistenza e il valore del limite

Forme indeterminate

In questi casi si parla di

forme di indecisione o forme indeterminate.

Le forme di indecisione di cui ci occuperemo sono:

$$\boxed{+\infty - \infty} \quad \boxed{0 \cdot \infty} \quad \boxed{\frac{0}{0}} \quad \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

Forme indeterminate

Ci occupiamo ora di studiare le più comuni tecniche di calcolo dei limiti nel caso in cui si presentano in forma indeterminata

Limiti di polinomi per $x \to \pm\infty$

La generica funzione polinomio ha la seguente espressione analitica

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n,$$

$$\text{con } a_0 \neq 0 \text{ ed } n \in N$$

Si tratta di una funzione definita in tutto R per la quale ha senso studiare l'andamento per

$$x \to \pm\infty$$

Limiti di polinomi per $x \to \pm\infty$

Dunque:

Nel calcolare il limite di un polinomio per $x \to \pm\infty$

per sciogliere la forma indeterminata $[+\infty - \infty]$

basta calcolare

il limite del termine di grado massimo.

Cioè:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n\right) = \lim_{x \to \pm\infty} a_0 x^n$$

Limiti di polinomi per $x \to \pm\infty$

Esempio

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left(3x^3 - x^2 + 1\right)} = +\infty - \infty + 1 =$$

$$= [+\infty - \infty]$$

forma indeterminata

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(3x^3 - x^2 + 1\right) = \lim_{x \to +\infty} 3x^3 = +\infty$$

Limiti di funzioni razionali fratte per $x \to \pm\infty$

La generica funzione razionale fratta non è altro che una funzione espressa mediante il rapporto tra due polinomi.

Limiti di funzioni razionali fratte per $x \to \pm\infty$

Cioè, se $P_n(x)$ e $Q_m(x)$

sono due polinomi di grado rispettivamente n ed m, la generica funzione razionale fratta data dal rapporto tra $P_n(x)$ e $Q_m(x)$ è

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_m},$$

con $a_0, b_0 \neq 0$ ed $n, m \in N$

Limiti di funzioni razionali fratte per $x \to \pm\infty$

Dunque:

Nel calcolare il limite di una funzione razionale fratta per $x \to \pm\infty$

per sciogliere la forma indeterminata $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

basta calcolare

il limite del rapporto dei termini di grado massimo.

Limiti di funzioni razionali fratte per $x \to \pm\infty$

Cioè:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_m} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n < m \\ \pm\infty & \text{se} \quad n > m \\ \dfrac{a_0}{b_0} & \text{se} \quad n = m \end{cases}$$

Limiti di funzioni razionali fratte per $x \to \pm\infty$

Esempio: calcolare

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3+1}{x^2+2}} = \left[\frac{-\infty}{+\infty}\right]$$

forma indeterminata

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3+1}{x^2+2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}3x = -\infty$$

Limiti di funzioni razionali fratte per $x \to 0$

Una situazione analoga si presenta

nel calcolo del limite per $x \to 0$

di alcuni quozienti

$$\Downarrow$$

In questo caso, al limite per $x \to 0$ prevalgono i termini ad esponente più basso

Limiti di funzioni razionali fratte per $x \to 0$

Esempio: calcolare

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{x^3 + 3x^2 + x}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

forma indeterminata

$$\Downarrow$$

Limiti di funzioni razionali fratte per $x \to 0$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^3+3x^2+x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0} 2x = 0$$

Limiti di funzioni razionali fratte per $x \to 0$

Allo stesso modo, calcolare:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^2+3\sqrt[3]{x}+x}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

forma indeterminata

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{1}{3}}}= \quad =\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{3}=0$$