

Esercizi del 01/11/19

1. Calcolare i seguenti limiti di successioni:

$$(i) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + \frac{1}{n}}{-3n^2 - 2n} + \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^3 - n^2} - \sqrt{2n}}{n^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}};$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^3 - n^2} - \sqrt{2n}}{n^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

2. Calcolare il dominio e l'immagine della funzione $f(x) = e^{\frac{1}{|x-3|}}$.

3. Sia $f(x) = \log x$, $g(x) = |x - 1| - 2$. Determinare il dominio delle funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(g(x)). \quad (0.1)$$

4. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(2x + 1)}{\sin x}. \quad (0.2)$$

5. Determinare il dominio e immagine della funzione $f \circ g$ dove $f(x) = \log(\frac{x-1}{x-2})$ e $g(x) = \cos(\pi x)$.

6. Supponiamo di avere due funzioni $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che siano entrambi crescenti. Dimostrare che $g \circ f$ é crescente. Cosa potevamo concludere su $g \circ f$ se entrambe f e g fossero state decrescenti? E se f fosse stata decrescente e g crescente?

7. Sia $f(x) = \sin(-3x + 2)$. Sfruttando l'esercizio precedente far vedere che f é invertibile sull'intervallo $A = [-\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}, \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}]$ e trovare l'immagine $f(A)$. Scrivere quindi esplicitamente la funzione inversa $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$.

8. Calcolare il dominio della funzione $f(x) = \frac{x}{\sin x} + \log(\frac{3x-1}{x^2-6x-7} + \frac{1}{2})$. Una volta osservato che 0 non appartiene al dominio di f , dire se f si può estendere in $x = 0$ in modo che risulti continua in tale punto.

9. Determinare per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan(3x+6)}{x+2} & \text{per } x > -2 \\ a & \text{per } x = -2 \\ 2x + 7 & \text{per } x < -2, \end{cases} \quad (0.3)$$

risulti continua in $x = -2$.

10. Determinare per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la funzione f definita come

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \arctan\left(\frac{x+7}{2x-2}\right) & \text{per } x > 1 \\ 2 & \text{per } x = 1 \\ \frac{\sin(\beta(x-1))}{\log x} & \text{per } 0 < x < 1, \end{cases} \quad (0.4)$$

risulti continua in $x = 1$.

11. Calcolare il limite per $n \rightarrow \infty$ della successione

$$a_n = \frac{\log n \sin^3 n}{\sqrt{n}}.$$

12. Calcolare il limite per $n \rightarrow \infty$ della successione

$$a_n = \frac{n^{\cos n}}{n^2}.$$

13. Calcolare il limite della successione

$$a_n = \frac{n^{\log n}}{n},$$

e della successione

$$b_n = \frac{n^{\log n}}{n!}.$$

14. Sia a_n una successione che soddisfa le seguenti due proprietà:

- (a) $a_n \geq 0$ per ogni n .
- (b) Nessuna sottosuccessione di a_n è convergente. In altre parole, per ogni sottosuccessione a_{n_k} e ogni numero reale l si ha che a_{n_k} NON tende a l .

Dimostrare che la successione a_n diverge a $+\infty$. *Suggerimento: cosa dice il teorema di Bolzano-Weierstrass? Usarlo per dimostrare che a_n , e anche ogni sua sottosuccessione, non è limitata.*

Cosa si può concludere sulla successione a_n se la proprietà (a) non vale più e rimane valida solo la proprietà (b)? *Suggerimento: trovare un esempio di successione a_n che soddisfa (b) ma non diverge a $+\infty$.*

15. Dimostrare che per ogni numero reale $s > 1$ la successione $a_n = (n+1)^s - n^s$ tende a $+\infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

16. Calcolare lo stesso limite dell'esercizio precedente quando $s \leq 1$.