

Alcuni Teoremi

Carlo Mantegazza*

2 novembre 2019

Teorema 1 (Disuguaglianza SuperBernoulli). Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq 0$ vale

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

Dimostrazione. Dimostriamo la disuguaglianza per induzione, il caso $n = 1$ è ovvio. Supponiamo la disuguaglianza vera per n e dimostriamo vale per $n + 1$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\ &\geq \left(1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2\right)(1+x) \\ &= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + x + nx^2 + \frac{n(n-1)}{2}x^3 \\ &= 1 + (n+1)x + \left(\frac{n(n-1)}{2} + n\right)x^2 + \frac{n(n-1)}{2}x^3 \\ &= 1 + (n+1)x + \frac{(n+1)n}{2}x^2 + \frac{n(n-1)}{2}x^3 \\ &\geq 1 + (n+1)x + \frac{(n+1)n}{2}x^2\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato l'ipotesi che $x \geq 0$, dunque il termine $\frac{n(n-1)}{2}x^3$ è maggiore o uguale a zero.

Essendo questa la disuguaglianza per $n + 1$, la tesi segue per ogni $n \in \mathbb{N}$. \square

Applicazione. Dimostriamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Ovviamente si ha $\sqrt[n]{n} \geq 1$, da cui $\sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$. Possiamo allora porre $x = \sqrt[n]{n} - 1$ nella disuguaglianza SB ottenendo,

$$n = [1 + (\sqrt[n]{n} - 1)]^n \geq 1 + n(\sqrt[n]{n} - 1) + \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2$$

*Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Napoli, Via Cintia, Monte S. Angelo 80126 Napoli, Italy, c.mantegazza@sns.it

cioè

$$n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2} (\sqrt[n]{n} - 1)^2.$$

Dividendo entrambi i membri per $n(n-1)/2$ e prendendone la radice, abbiamo

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \geq \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0,$$

di conseguenza, poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$, per il teorema dei due carabinieri, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = 0,$$

che chiaramente implica la tesi.

Proposizione 2 (Criterio della radice per successioni). *Data una successione $a_n \geq 0$ tale che esista il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$. Se $\ell < 1$ la successione a_n converge a zero, se $\ell > 1$ la successione converge a $+\infty$. Se $\ell = 1$ il criterio "fallisce" e non possiamo concludere niente su a_n .*

Dimostrazione. Supponiamo $\ell < 1$, allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale se $n \geq n_0$ si ha $\sqrt[n]{a_n} \leq \lambda < 1$. Quindi $0 \leq a_n \leq \lambda^n$ e poiché $\lambda < 1$ si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^n = 0$, da cui la tesi, per il teorema dei due carabinieri.

Se $\ell > 1$, notiamo che deve essere definitivamente $a_n > 0$ e poi consideriamo la successione $b_n = 1/a_n$, che dunque soddisfa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/\sqrt[n]{a_n} = 1/\ell < 1.$$

Applicando quanto fatto nel caso $\ell < 1$, concludiamo allora che b_n converge a zero, dunque $a_n \rightarrow +\infty$. \square

Proposizione 3. *Data una successione $a_n > 0$, se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = \ell$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$.*

Dimostrazione. Preso $\varepsilon' > 0$, esiste $n'_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\ell - \varepsilon' < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon' \quad \text{cioè} \quad (\ell - \varepsilon')a_n < a_{n+1} < (\ell + \varepsilon')a_n$$

per ogni $n \geq n'_0$. Dunque, iterando

$$(\ell - \varepsilon')^k a_{n'_0} < a_{n'_0+k} < (\ell + \varepsilon')^k a_{n'_0},$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$, da cui

$$(\ell - \varepsilon')^{\frac{k}{n'_0+k}} n'_0 + k \sqrt[n'_0+k]{a_{n'_0}} = n'_0 + k \sqrt[n'_0+k]{(\ell - \varepsilon')^k a_{n'_0}} < n'_0 + k \sqrt[n'_0+k]{a_{n'_0+k}} < n'_0 + k \sqrt[n'_0+k]{(\ell + \varepsilon')^k a_{n'_0}} = (\ell + \varepsilon')^{\frac{k}{n'_0+k}} n'_0 + k \sqrt[n'_0+k]{a_{n'_0}}. \quad (1)$$

Notiamo ora che $\lim_{k \rightarrow \infty} n'_0 + k \sqrt[k]{a_{n'_0}} = 1$ e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\ell - \varepsilon')^{\frac{k}{n'_0 + k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\ell - \varepsilon')^{\left(\frac{n'_0 + k}{k}\right)^{-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\ell - \varepsilon')^{\left(1 + \frac{n'_0}{k}\right)^{-1}} = (\ell - \varepsilon'),$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\ell + \varepsilon')^{\frac{k}{n'_0 + k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\ell + \varepsilon')^{\left(\frac{n'_0 + k}{k}\right)^{-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\ell + \varepsilon')^{\left(1 + \frac{n'_0}{k}\right)^{-1}} = (\ell + \varepsilon'),$$

se $k \rightarrow \infty$.

Dunque,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\ell - \varepsilon')^{\frac{k}{n'_0 + k}} n'_0 + k \sqrt[k]{a_{n'_0}} = (\ell - \varepsilon')$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\ell + \varepsilon')^{\frac{k}{n'_0 + k}} n'_0 + k \sqrt[k]{a_{n'_0}} = (\ell + \varepsilon').$$

Sia ora $\varepsilon > 0$ e sia $\varepsilon' = \varepsilon/2$. Per quanto appena discusso, per ogni $\delta > 0$ esistono $n'_0 \in \mathbb{N}$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tali che se $k \geq k_0$, si ha

$$\ell - \varepsilon' - \delta < (\ell - \varepsilon')^{\frac{k}{n'_0 + k}} n'_0 + k \sqrt[k]{a_{n'_0}} < \ell - \varepsilon' + \delta$$

e

$$\ell + \varepsilon' - \delta < (\ell + \varepsilon')^{\frac{k}{n'_0 + k}} n'_0 + k \sqrt[k]{a_{n'_0}} < \ell + \varepsilon' + \delta$$

quindi, per la disuguaglianza (1), otteniamo

$$\ell - \varepsilon' - \delta < (\ell - \varepsilon')^{\frac{k}{n'_0 + k}} n'_0 + k \sqrt[k]{a_{n'_0}} < n'_0 + k \sqrt[k]{a_{n'_0 + k}} < (\ell + \varepsilon')^{\frac{k}{n'_0 + k}} n'_0 + k \sqrt[k]{a_{n'_0}} < \ell + \varepsilon' + \delta.$$

Scegliendo allora $\delta = \varepsilon/2$, poiché $\varepsilon' = \varepsilon/2$, concludiamo che

$$\ell - \varepsilon < n'_0 + k \sqrt[k]{a_{n'_0 + k}} < \ell + \varepsilon,$$

per ogni $k \geq k_0$, il che è equivalente a dire, ponendo $n_0 = n'_0 + k_0$

$$\ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon,$$

per ogni $n \geq n_0$. Quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$. □

Il seguente corollario è allora immediato.

Corollario 4. *Data una successione $a_n > 0$, se il criterio del rapporto “fallisce” ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = 1$) anche il criterio della radice “fallisce” ($\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$).*

Applicazione. Dimostriamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = 1/e.$$

Sia $a_n = \frac{n!}{n^n}$, la tesi è allora equivalente a mostrare che $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/e$.
Calcoliamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{-1} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1}.$$

Segue dunque che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} = 1/e.$$

Per la Proposizione 3, si ha allora che $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/e$, che è quanto volevamo.

Lemma 5. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \ell$ e a_k è una successione tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = +\infty$, si ha $\lim_{k \rightarrow \infty} f([a_k]) = \ell$.

Dimostrazione. Scelto $\varepsilon > 0$, per le ipotesi esiste $n'_0 \in \mathbb{N}$ tale che se $n \geq n'_0$ si ha $|f(n) - \ell| < \varepsilon$. Poiché $a_k \rightarrow +\infty$, esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k \geq k_0$ si ha $n'_0 + 1 \leq a_k$, da cui, valendo sempre $[a_k] \leq a_k < [a_k] + 1$, segue $n'_0 + 1 \leq a_k < [a_k] + 1$ quindi $n'_0 \leq [a_k]$. Ciò implica che se $k \geq k_0$ si ha $|f([a_k]) - \ell| < \varepsilon$, dunque la tesi $\lim_{k \rightarrow \infty} f([a_k]) = \ell$. \square

Lemma 6. Data una successione a_n , se le due sottosuccessioni a_{n_k} e a_{m_k} sono tali che $\{n_k\} \cap \{m_k\} = \emptyset$ e $\{n_k\} \cup \{m_k\} = \mathbb{N}$ (cioè le due sottosuccessioni a_{n_k} e a_{m_k} non hanno termini comuni e la loro unione è la successione a_n tutta) e $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{m_k} = \ell$, allora $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$.

Dimostrazione. \square

Teorema 7. Data una successione $x_n \rightarrow 0$, si ha il limite notevole

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = 1.$$

Dimostrazione. Consideriamo la sottosuccessione a_n degli $x_n > 0$, che ovviamente converge anch'essa a zero. Sappiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1/n} - 1}{1/n} = 1.$$

Sia $b_n = 1/a_n$ che converge a $+\infty$, la tesi si può allora riscrivere come

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1/b_n} - 1}{1/b_n} = 1.$$

Vediamo che dalla disuguaglianza $[b_n] \leq b_n < [b_n] + 1$ si ha

$$\frac{1/([b_n] + 1) e^{1/([b_n]+1)} - 1}{1/[b_n]} = \frac{e^{1/([b_n]+1)} - 1}{1/[b_n]} \leq \frac{e^{1/b_n} - 1}{1/b_n} \leq \frac{e^{1/[b_n]} - 1}{1/([b_n] + 1)} = \frac{e^{1/[b_n]} - 1}{1/[b_n]} \frac{1/[b_n]}{1/([b_n] + 1)} \quad (2)$$

e notiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/[b_n]}{1/([b_n] + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[b_n] + 1}{[b_n]} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{[b_n]} = 1.$$

Ponendo allora $f(x) = \frac{e^{1/x} - 1}{1/x}$ e usando il Lemma 5, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1/([b_n]+1)} - 1}{1/([b_n] + 1)} = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1/[b_n]} - 1}{1/[b_n]} = 1.$$

Per il teorema di prodotto dei limiti abbiamo allora che le due successioni agli estremi della disuguaglianza (2) convergono entrambe a 1, da cui anche (per il teorema dei due carabinieri)

$$\frac{e^{1/b_n} - 1}{1/b_n} \rightarrow 1.$$

Sia ora c_n la sottosuccessione degli $x_n < 0$, che ovviamente converge anch'essa a zero. Abbiamo

$$\frac{e^{c_n} - 1}{c_n} = e^{c_n} \frac{1 - 1/e^{c_n}}{c_n} = -e^{c_n} \frac{e^{-c_n} - 1}{-c_n} = -\frac{1}{e^{d_n}} \cdot \frac{e^{d_n} - 1}{d_n},$$

dove abbiamo posto $d_n = -c_n > 0$, che converge a zero ed è una successione positiva. Per quanto dimostrato nel caso "positivo", allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{d_n} - 1}{d_n} = 1$$

e $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{d_n} = 1$, in quanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{d_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \left(\frac{e^{d_n} - 1}{d_n} \right) d_n = 1,$$

per lo stesso motivo.

Quindi, anche per la sottosuccessione c_n dei termini negativi di $x_n < 0$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{c_n} - 1}{c_n} = 1$$

e la tesi segue dal Lemma 6. □

Teorema 8. *Data una successione $x_n \rightarrow 0$, si ha il limite notevole*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + x_n)}{x_n} = 1.$$

Dimostrazione. Usiamo il fatto che se $y_n \rightarrow 0$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{y_n} - 1}{y_n} = 1$$

e definiamo la successione $y_n = \log(1 + x_n)$, sapendo che allora $y_n \rightarrow 0$. Otteniamo

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{y_n} - 1}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + x_n - 1}{\log(1 + x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\log(1 + x_n)}$$

da cui la tesi. □

Teorema 9. *Ogni successione a_n ha una sottosuccessione a_{n_k} monotona.*

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme

$$A = \{a_n : \text{per ogni } m \geq n \text{ si ha } a_m \leq a_n\}.$$

Abbiamo due casi: o A è un insieme infinito, oppure A è finito.

Nel primo caso i suoi elementi formano una sottosuccessione monotona decrescente, in quanto se a_s e a_t con $s < t$ stanno entrambi in A , si ha che (per definizione) $a_t \leq a_s$.

Nel secondo caso, sia

$$A = \{a_{s_1}, a_{s_2}, \dots, a_{s_\ell}\}$$

per una famiglia finita di indici $s_1 < s_2 < \dots < s_\ell$. Poniamo $a_{n_1} = a_{\ell+1}$, che non appartiene ad A , quindi esiste a_t con $t > \ell + 1 = n_1$ tale che $a_t > a_{\ell+1} = a_{n_1}$. Poniamo $a_{n_2} = a_t$, che anch'esso non appartiene ad A (in quanto $t > \ell + 1 > \ell$) e ripetiamo questo argomento per a_{n_2} , producendo $a_{n_3} > a_{n_2}$. Continuando questo procedimento otteniamo dunque a_{n_k} per ogni $k \in \mathbb{N}$.

La sottosuccessione a_{n_k} così trovata è allora (per costruzione) monotona crescente, da cui la tesi anche in questo caso. □

Teorema 10 (di Bolzano–Weierstrass). *Ogni successione limitata a_n ha una sottosuccessione a_{n_k} convergente.*

Dimostrazione. Data la successione a_n , sia a_{n_k} una sottosuccessione monotona che esiste per il teorema precedente. Essendo una sottosuccessione di a_n è anch'essa limitata ed essendo allora monotona e limitata è allora convergente. □

Teorema 11 (di Bolzano o “degli zeri”). *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua con $f(a)f(b) < 0$, allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ (l'altro caso è analogo).

Sia $A \subseteq [a, b]$ l'insieme definito da $A = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$ e sia $c = \sup A$. Notiamo che $a \in A$ e $b \notin A$, inoltre $c \in [a, b]$, essendo b ovviamente un maggiorante di A . Sappiamo che (per risultati precedenti) esiste $x_n \in A$ tale che $x_n \rightarrow \sup A = c$, quindi per il "teorema ponte" si ha $f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$, essendo f continua. Allora, per il teorema di confronto, essendo $f(x_n) < 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $f(c) \leq 0$.

Se, per assurdo, fosse $f(c) < 0$, per il teorema della permanenza del segno per le funzioni continue esisterebbe $\delta > 0$ tale che $f(x) < 0$ per ogni x nell'intervallo $(c - \delta, c + \delta)$. Quindi si avrebbe $f(c + \delta/2) < 0$, cioè $c + \delta/2 \in A$, in contraddizione col fatto che c è l'estremo superiore di A .

Concludiamo allora che può solo essere $f(c) = 0$ e la tesi è provata. \square

Esempio 12. La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$ non è uniformemente continua. Infatti, supponiamo che dato $\varepsilon > 0$ esista $\delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ allora $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, allora scegliamo $x_0 = n \in \mathbb{N}$ e $x = x_0 + \delta/2 = n + \delta/2$, si avrebbe $|x - x_0| = \delta/2 < \delta$ e

$$|x^2 - x_0^2| = |(n + \delta/2)^2 - n^2| = n\delta + \delta^2/4 < \varepsilon,$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Questo è ovviamente assurdo in quanto $n\delta \rightarrow +\infty$, se $n \rightarrow +\infty$.

Esempio 13. La funzione $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = 1/x$ non è uniformemente continua. Infatti, supponiamo che dato $\varepsilon > 0$ esista $\delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ allora $|1/x - 1/x_0| < \varepsilon$, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, allora scegliamo $x_0 = 1/n$, per $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1/\delta$ e $x = 1/2n$, si avrebbe $|x - x_0| = 1/2n < \delta/2 < \delta$ e

$$|1/x - 1/x_0| = |2n - n| = n < \varepsilon,$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, con $n > 1/\delta$, che è ovviamente assurdo.