FUNZIONE CONTINUA

DEFINIZIONE:

Una funzione si definisce continua quando è continua in ogni punto del suo dominio.

In particolare, $f{:}A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in un generico punto $p \in A$ se

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$$

FUNZIONE DERIVABILE

DEFINIZIONE

Una $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile quando è derivabile per ogni punto appartenente al dominio. In particolare, una funzione è derivabile in un punto $p \in A$ se

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = c \in \mathbb{R}$$

Nel caso di estremi finiti del domini, quindi $f: [a;b] \to \mathbb{R}$, nei punti $p=a$ avrà senso parlare solo di derivabilità da destra, e analogamente nel punto $p=b$ parleremo solo di derivabilità da sinistra

RAPPORTO TRA DERIVABILITA' E CONTINUITA

A. La funzione è derivabile

B. La funzione è continua

$$A \Rightarrow B$$

La derivabilità è una condizione sufficiente per la continuità

La continuità è una condizione necessaria alla derivabilità

TEOREMA

Se una funzione *f(x)* è derivabile in un punto *p* allora essa è anche continua

IPOTESI

f(x) è derivabile in *p*,

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = f'(p)$$

TEOREMA

Se una funzione *f(x)* è derivabile in un punto *p* allora essa è anche continua

TESI

f(x) è una funzione continua in *p,*

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$$

DIMOSTRAZIONE

-Consideriamo la seguente identità

$$f(x) = f(p) + \frac{f(x)-f(p)}{x-p}(x-p)$$

-Passiamo ai limiti

$$\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p}\left[f(p) + \frac{f(x)-f(p)}{x-p}(x-p)\right]$$

-Applicando le proprietà dei limiti

$$\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} f(p) + \lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}(x-p)$$

- $\lim_{x \to p} f(p) = f(p)$

Poiché *f(p)* è una funzione costante

- $\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}(x - p) = f'(p)0 = 0$

Poiché con $x \to p$

$\frac{f(x) - f(p)}{x - p} = f'(p)$ per le ipotesi

$(x - p)$ tende a 0

TESI

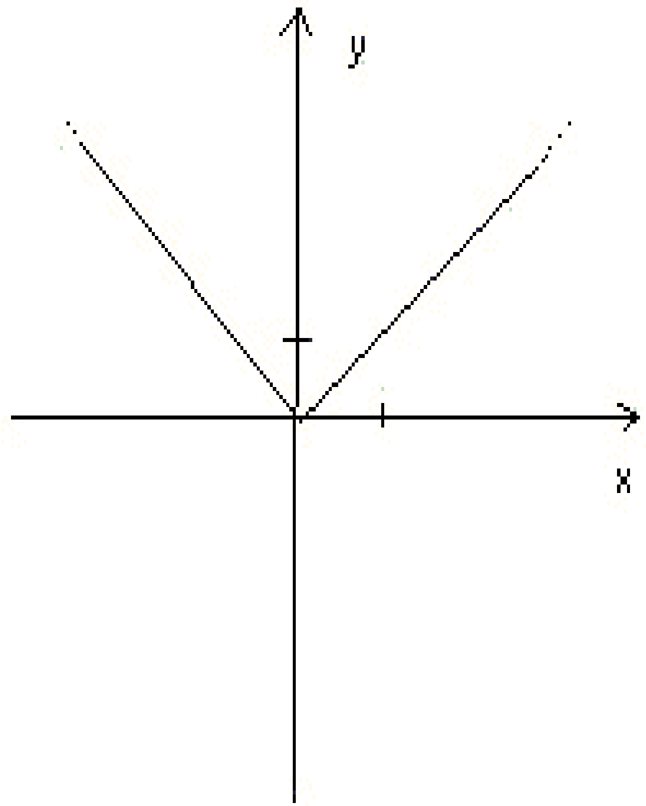
LA FUNZIONE E' CONTINUA

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$$

FUNZIONE CONTINUA$\not\Rightarrow$FUNZIONE DERIVABILE

ESEMPIO

$f(x)=|x|$ la funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$



Considero p=0

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}=+1$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}=-1$$

Svolgendo i casi a $h\to 0^{\pm}$
notiamo che

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}\neq\lim_{h\to 0^-}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$$

Trovando un controesempio
abbiamo dimostrato
come una funzione continua non
sia necessariamente derivabile