

Covessità

Definizione 0.1. Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^2$ si dice convesso se per ogni coppia di punti A e B nell'insieme E , risulta che il segmento che unisce A e B appartiene ancora ad E . In simboli,

$$E \text{ convesso} \Leftrightarrow \forall A, B \in E \text{ risulta } \overline{AB} \subset E. \quad (0.1)$$

Una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se il sopragrafico é un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^2$. Il sopragrafico, denotato con G_f^+ , é l'insieme dei punti sovrastanti il grafico di f , ovvero i punti di coordinate (x, y) tali che $y \geq f(x)$. In simboli

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ convessa} \Leftrightarrow G_f^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\} \text{ é convesso.} \quad (0.2)$$

In termini matematici, é possibile far vedere che una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é convessa se e solo se la seguente proprietà é soddisfatta:

(C) per ogni $x_1, x_2, x \in [a, b]$ con $x_1 \leq x \leq x_2$ si ha

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Al membro di destra della disuguaglianza é stata scritta la funzione che rappresenta la retta passante per i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$. Quindi l'interpretazione di questa formula é che nell'intervallo (x_1, x_2) il grafico di f sta sotto la retta congiungente i due punti del grafico sopra x_1 e x_2 .

Esempio 0.2. La funzione $f(x) = |x|$ é convessa. Per dimostrarlo verifichiamo che la condizione (C) é soddisfatta. Prendiamo $x_1 < x_2$, vogliamo verificare che per ogni $x \in (x_1, x_2)$ si ha

$$|x| \leq |x_1| + \frac{|x_2| - |x_1|}{x_2 - x_1}(x - x_1). \quad (0.3)$$

La verifica é semplice nel caso in cui $0 \leq x_1 < x_2$, perché anche x risulterebbe positivo e la condizione sopra sarebbe equivalente a

$$x \leq x_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) = x,$$

che é vera. Nel caso in cui $x_1 < x_2 \leq 0$ la verifica si fa in modo molto simile sapendo che $|z| = -z$ per z negativo (farla per esercizio). Verifichiamo ora la formula (0.3) nel caso in cui $x_1 < 0 < x_2$. Facendo il minimo comun denominatore troviamo che (0.3) é equivalente a

$$|x| \leq |x_2| \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} + |x_1| \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}. \quad (0.4)$$

Dimostriamo (0.4): se $x > 0$ avremmo

$$\begin{aligned} |x_2| \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} + |x_1| \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} &\geq |x_2| \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - |x_1| \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \\ &= x_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} + x_1 \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{x(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = x = |x|, \end{aligned} \quad (0.5)$$

e (0.4) é dimostrata (notare che abbiamo usato che $|x_1| = -x_1$ perché $x_1 < 0$ e $|x_2| = x_2$ perché $x_2 > 0$). Nel caso invece in cui $x < 0$ scriviamo

$$\begin{aligned} |x_2| \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} + |x_1| \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} &\geq -|x_2| \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} + |x_1| \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \\ &= -x_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - x_1 \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \\ &= -\frac{x(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = -x = |x|, \end{aligned} \quad (0.6)$$

e anche in questo caso (0.4) é verificata.

A lezione abbiamo dimostrato il seguente Teorema:

Teorema 0.3. *Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in (a, b) . Allora sono equivalenti le due seguenti condizioni:*

- (a) *per ogni $x, x_0 \in (a, b)$ risulta $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$;*
- (b) *f' é una funzione crescente su (a, b) .*

Adesso dimostreremo che per funzioni differenziabili le due condizioni sopra sono equivalenti alla convessità:

Teorema 0.4. *Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in (a, b) . Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- (i) *per ogni $x, x_0 \in (a, b)$ risulta $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.*
- (ii) *f é convessa su (a, b) .*

Dimostrazione. Per dimostrare l'enunciato ci appelliamo al Teorema 0.3 e dimostriamo che la condizione (ii) é equivalente alla condizione

- (b) *f' é una funzione crescente in (a, b) .*

Mostriamo che (ii) $\Rightarrow$ (b). Scegliamo $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 < x_2$, vogliamo provare che

$$f'(x_1) \leq f'(x_2).$$

Scriviamo la condizione di convessità della funzione f nell'intervallo (x_1, x_2) : per ogni $x \in (x_1, x_2)$ abbiamo

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1). \quad (0.7)$$

Da questa condizione ricaviamo

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

quindi passando al limite per $x \rightarrow x_1^+$ a sinistra otteniamo la derivata di f , ovvero

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (0.8)$$

D'altro canto, partendo sempre da (0.7) e sottraendo $f(x_2)$ ad ambo i membri, si ottiene

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_2) &\leq f(x_1) - f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \\ &= \frac{(f(x_1) - f(x_2))(x_2 - x_1) + (f(x_2) - f(x_1))(x - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2). \end{aligned} \quad (0.9)$$

Ricordandosi che $x - x_2 < 0$, dividiamo ambo i membri per $(x - x_2)$, passiamo al limite per $x \rightarrow x_2^-$, e otteniamo

$$f'(x_2) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Questa disuguaglianza, insieme a (0.8), implica $f'(x_1) \leq f'(x_2)$ che é quanto volevamo dimostrare.

Mostriamo ora che $(b) \Rightarrow (ii)$. Questa parte della dimostrazione si può fare per assurdo: supponiamo che (ii) non sia soddisfatta, il che implica l'esistenza di un intervallo $(x_1, x_2) \subset (a, b)$ e di un punto $x \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1). \quad (0.10)$$

Da questa disuguaglianza portando $f(x_1)$ a sinistra e dividendo per $x - x_1$ otteniamo

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (0.11)$$

D'altro canto, sempre dalla (0.10), si ricava (facendo i conti come in (0.9))

$$f(x) - f(x_2) > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2),$$

e dividendo per $x - x_2$ (che é negativo) si ha

$$\frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Mettendo insieme questa disuguaglianza con (0.11) troviamo

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} < \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}.$$

Adesso per il teorema di Lagrange troviamo due punti $y_1 \in (x_1, x)$ e $y_2 \in (x, x_2)$ tali che $f'(y_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$ e $f'(y_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ in modo che risulti

$$f'(y_2) < f'(y_1).$$

Questo però contraddice l'ipotesi (b) che f' fosse crescente. La dimostrazione é conclusa.