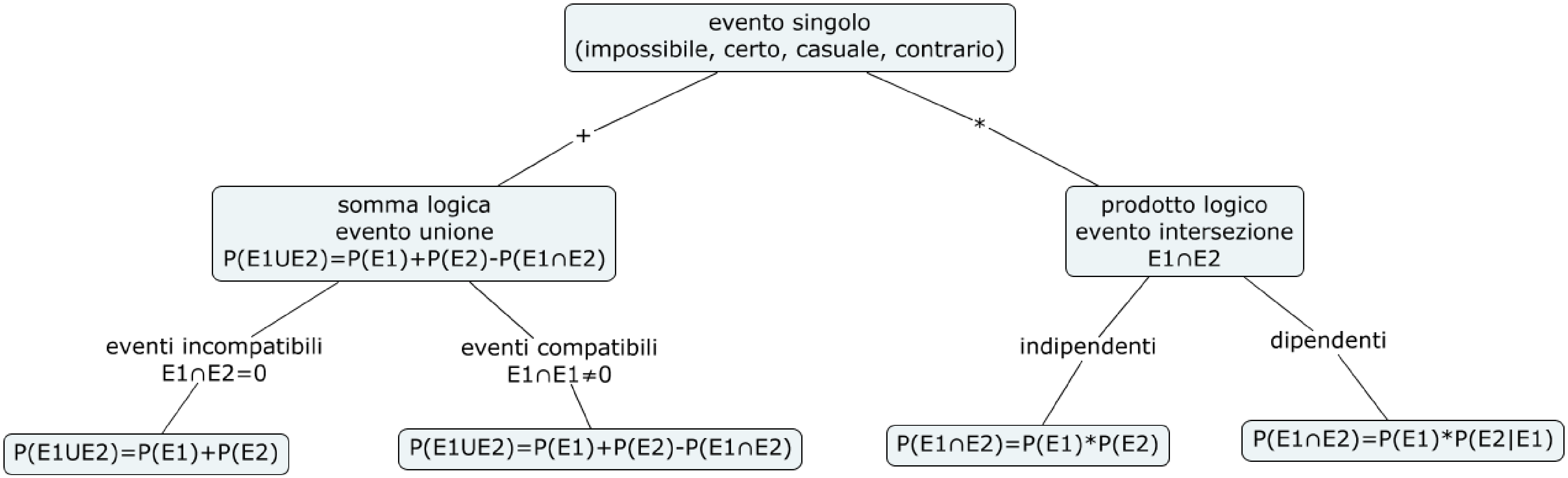
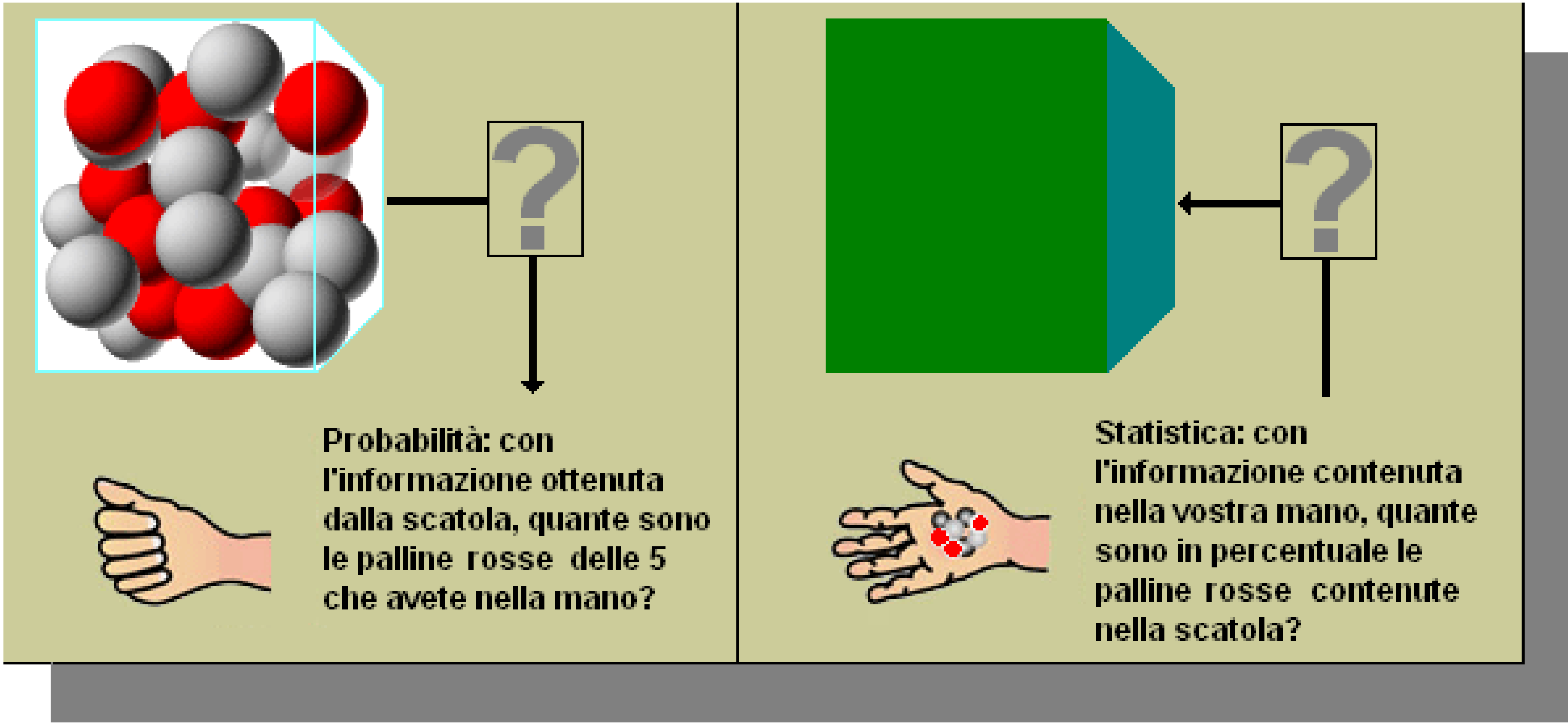
IL CALCOLO DELLE PROBABILITA’

Indice della lezione



La probabilità è «lo studio dei fenomeni casuali»



INTRODUZIONE

fenomeni casuali?

- Il lancio di un dado
- L’estrazione di una pallina numerata da un’urna
- Il lancio di una moneta
- Il diffondersi di un’epidemia

Un modello si dice deterministico

- Se tutte le informazioni relative alla situazione che si sta esaminando in un istante permettono di determinare con certezza, con leggi semplici, quale sarà la situazione dopo qualsiasi intervallo di tempo;

CIOE’

- le grandezze in ingresso x permettono di calcolare le grandezze in uscita $y=f(x)$

La funzione associata ad un modello deterministico è

$$y = f(x)$$

$$x_0 \xrightarrow{f} y_0$$

Un modello si dice non deterministico

- se non è possibile determinare **a priori** con certezza il valore della variabile in uscita y_i, ma si sa che essa assumerà uno dei valori di un insieme di eventi, chiamati

eventi casuali

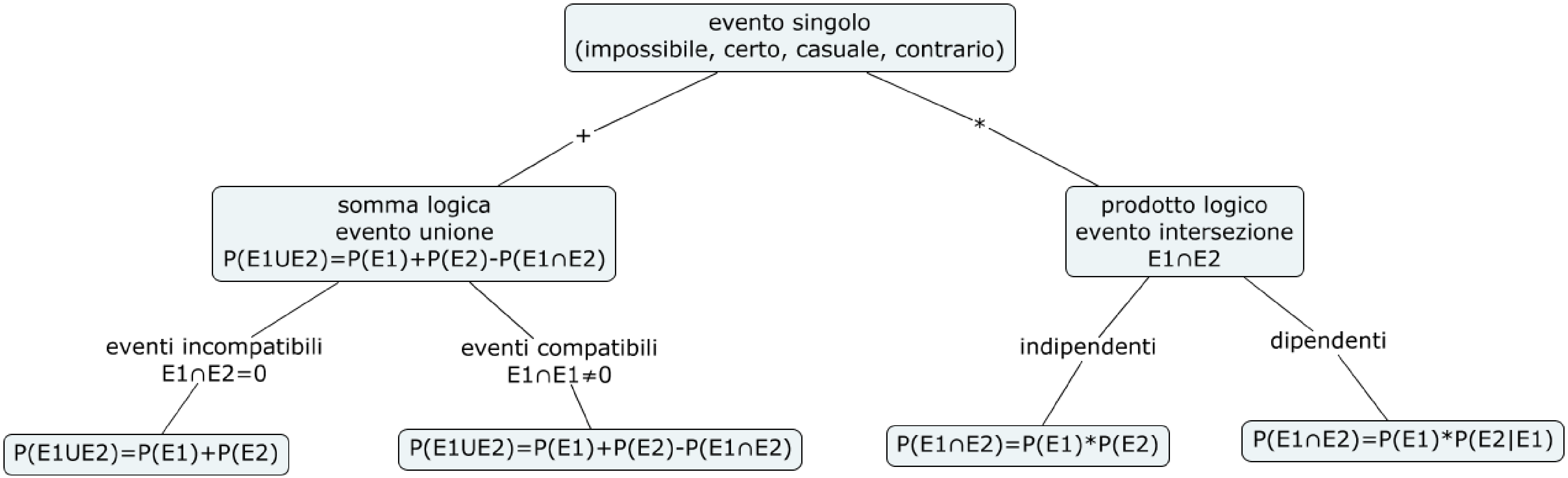
INTRODUZIONE

- Già 3000 anni fa gli Egizi praticavano un antenato del gioco dei dadi, che si svolgeva lanciando una pietra. Il gioco dei dadi era diffuso anche nell'antica Roma, tanto che sono stati ritrovati alcuni studi su tale gioco risalenti all'età di Cicerone.

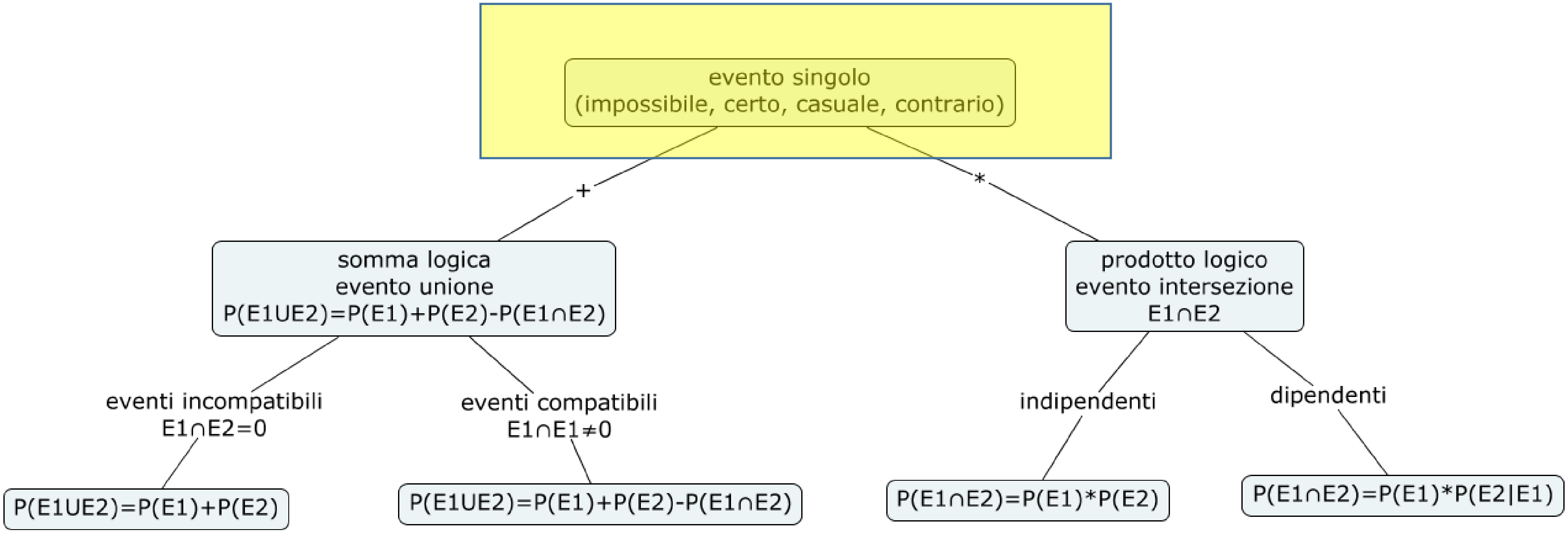
INTRODUZIONE

- Ma la nascita dello studio sistematico del **calcolo delle probabilità** si fa risalire al 1654, quando il matematico e filosofo *Blaise Pascal*, per soddisfare una richiesta del cavaliere *De Meré*, accanito giocatore di dadi, cominciò a dedicarsi allo studio dei meccanismi che regolano i giochi d’azzardo, intrattenendo a tale scopo anche un’interessante corrispondenza con il matematico *Pierre de Fermat*.

Indice della lezione



Indice della lezione



EVENTI E PROBABILITA’

- Definiamo evento una qualsiasi affermazione a cui, a seguito di un esperimento o di un'osservazione, si possa assegnare univocamente un grado di verità ben definito.
- Esempio: nel lancio di un dado, consideriamo l’evento:

  E = “esce un numero pari”.
- Esempio: lancio di una moneta non truccata

  E = “esce testa”.
- Esempio: estrazione di una carta da un mazzo di 52 carte francesi

  E = “esce un K”.

Esempio: il sesso di un nascituro E = “mio figlio sarà maschio”

Meteo E=«domani piove»

EVENTI E PROBABILITA’

Un evento può essere:

- **Certo**: se accade con certezza (ad esempio, nel lancio di un dado, è un evento certo E=“esce un numero minore di 7”);
- **Impossibile**: se non può mai accadere (nell’esempio precedente, è impossibile l’evento E=“esce un numero maggiore di 6”)
- **Casuale (o aleatorio)**: se può accadere oppure no (nell’esempio precedente, è casuale l’evento E=“esce un numero minore di 3”).

LA PROBABILITA' CLASSICA

- La probabilità *p(E)* di un evento casuale E è il rapporto tra il numero *f* dei casi favorevoli e il numero *u* dei casi possibili, considerati tutti *equiprobabili*:

$$p(E) = \frac{f}{u}$$

ESEMPIO

- Lancia una moneta e considera l’evento:

  E = “esce testa”.

  I casi possibili sono *u=2*, quelli favorevoli sono *f=1*; la probabilità che si verifichi l’evento E è dunque:

$$p(E) = \frac{1}{2}$$

ESEMPIO

- Estrai una carta da un mazzo di 40 e considera l'evento:

  E = "si estrae una carta di bastoni".

  I casi possibili sono *u=40*, quelli favorevoli sono *f=10*; la probabilità che si verifichi l'evento E è dunque:

$$p(E) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

ESEMPIO

- Estrai una carta da un mazzo di 40 napoletane e considera l'evento:

  E = "si estrae una figura".

  I casi possibili sono *u=40*, quelli favorevoli sono *f=12*; la probabilità che si verifichi l'evento E è dunque:

$$p(E) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

Osservazioni

- La probabilità di un **evento impossibile** è 0;
- La probabilità di un **evento certo** è 1;
- La probabilità di un **evento casuale** (o aleatorio) è compresa tra 0 e 1:

$$0 \le p(E) \le 1$$

LA PROBABILITA' DELL'EVENTO CONTRARIO

- **Evento contrario:**

  Dato un evento casuale E, si definisce evento contrario di E, e si indica con $\bar{E}$, l'evento che si verifica quando non si verifica E.

  Ad esempio, nel lancio di un dado, consideriamo l'evento:

  E="esce un numero multiplo di 3";

  l'evento contrario sarà:

  $\bar{E}$="non esce un numero multiplo di 3", cioè la sua negazione.

LA PROBABILITA' DELL'EVENTO CONTRARIO

Ad esempio, nel lancio di un dado, consideriamo l'evento:
E="esce un numero multiplo di 3";

- Per l'evento E, i casi favorevoli sono 2, cioè se escono o il 3 o il 6;
- Per l'evento $\bar{E}$, i casi favorevoli sono 4, cioè tutti i rimanenti (1, 2, 4, 5).
- Quindi le probabilità sono:

$$p(E) = \frac{2}{6}$$

$$p(\overline{E}) = \frac{4}{6}$$

LA PROBABILITA' DELL'EVENTO CONTRARIO

- Si osserva facilmente che:

$$p(E) + p(\overline{E}) = 1$$

che equivale a:

$$p(\overline{E}) = 1 - p(E)$$

LA PROBABILITA’ DELL’EVENTO CONTRARIO: Esercizio

- Considerato un lancio di un dado non truccato, Calcolare l’evento contrario ad E= esce 4
- Per l’evento Ē, i casi favorevoli sono 5, cioè tutti i rimanenti (1, 2, 3, 5, 6).
- Quindi le probabilità sono:

$$p(E) = \frac{1}{6}$$

$$p(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

LA PROBABILITA' DELL'EVENTO CONTRARIO: Esercizio

- Considerato un estrazione di una carta da un mazzo di carte francesi E= esce una figura (J, Q, K)
- Per l'evento E i casi favorevoli sono 12/52=3/13
- Per l'evento Ē, i casi favorevoli sono 1-3/13, cioè tutti i rimanenti.
- Quindi le probabilità sono:

$$p(E) = \frac{3}{13}$$

$$p(\overline{E}) = 1 - \frac{3}{13} = \frac{10}{13}$$

Definizioni

- SPAZIO DEGLI EVENTI:

  Per ogni esperimento si può costruire un insieme U (o S) detto **universo** o **spazio degli eventi**, formato da tutti i possibili esiti. Un **evento casuale** (o **aleatorio**) E si identifica con un sottoinsieme di U.

Esempio:

Nel lancio di un dado, consideriamo l'evento E="esce un numero maggiore di 4"; in questo caso avremo che:

$$U = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$E = \{5,6\}$$

Definizioni

- EVENTO COMPLEMENTARE (O CONTRARIO):

  Dato un evento E, sottoinsieme di U, si dice evento contrario l'insieme complementare di E rispetto ad U e si indica con $\overline{E}$.

Esempio:

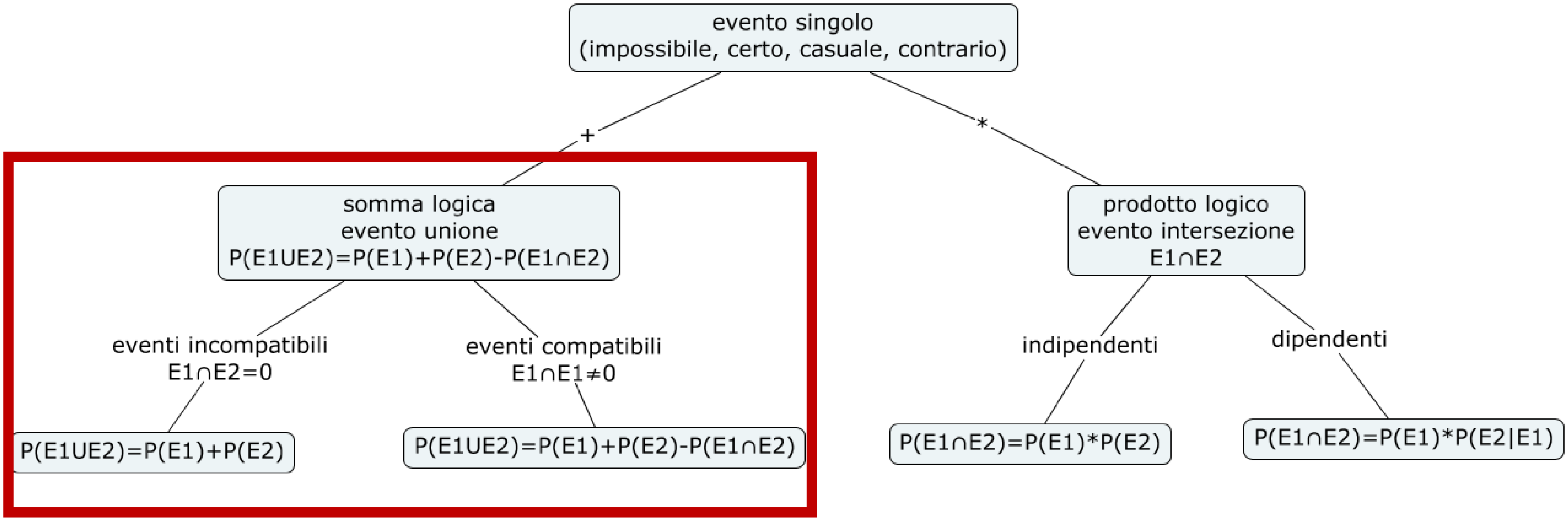
Nell'esempio precedente si avrà dunque:

$$U = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$E = \{5,6\}$$

$$\overline{E} = \{1,2,3,4\}$$

Indice della lezione



DEFINIZIONI

- SOMMA LOGICA (O EVENTO UNIONE):

  Dati due eventi elementari E_1 ed E_2, entrambi sottoinsiemi di U, si dice somma logica l'insieme unione $E_1 U E_2$.

<u>Esempio</u>:

Nel lancio di un dado, si considerino gli eventi elementari E_1="esce un numero pari" = {2,4,6}

ed E_2="esce un multiplo di 3" = {3,6}

La somma logica sarà l'evento:

$E_1 U E_2$="esce un numero pari **o** un multiplo di 3"= ={2,3,4,6}.

Riconosciamo la somma logica quando nella descrizione dell'evento compare il connettivo "o".

DEFINIZIONI

- PRODOTTO LOGICO (O EVENTO INTERSEZIONE):

  Dati due eventi elementari E_1 ed E_2, entrambi sottoinsiemi di U, si dice prodotto logico l'insieme intersezione $E_1 \cap E_{2.}$

Esempio:

Nel lancio di un dado, si considerino gli eventi elementari E_1="esce un numero pari" = {2,4,6}

ed E_2="esce un multiplo di 3" = {3,6}

Il prodotto logico sarà l'evento:

$E_1 \cap E_2$="esce un numero pari **e** multiplo di 3"= {6}.

Riconosciamo la somma logica quando nella descrizione dell'evento compare il connettivo "e".

DEFINIZIONI

- EVENTI INCOMPATIBILI E EVENTI COMPATIBILI:

  Due eventi E_1 ed E_2 si dicono **incompatibili** se non possono verificarsi contemporaneamente, cioè se $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Viceversa, se $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ allora sono **compatibili**.

Esempio:

Nell'estrazione di una carta da un mazzo di 40, sono **incompatibili** gli eventi:

E_1="esce una figura"

E_2="esce un 7"

Esempio:

Nell'estrazione di una carta da un mazzo di 40, sono **compatibili** gli eventi:

E_1="esce una figura"; E_2="esce una carta di spade"

DEFINIZIONE DI PROBABILITA’

- Definiamo probabilità p(E) di un evento E una **funzione** che ad ogni evento dell’universo U associa un numero[1] in modo che siano verificati i seguenti 3 **assiomi**:

1. Per ogni evento si ha $p(E) \geq 0$
2. L’universo U rappresenta l’evento certo: $p(U)=1$
3. Dati *n* eventi E_1, E_2, …, E_n a due a due <u>incompatibili</u>, si ha: $p(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n)=p(E_1)+p(E_2)+\ldots+p(E_n)$.

Nota 1: Tale numero, come conseguenza degli assiomi 1 e 2, sarà necessariamente compreso tra 0 e 1.

DEFINIZIONE DI PROBABILITA’

- Se gli eventi di uno spazio U hanno tutti la stessa probabilità di realizzarsi allora questi eventi sono detti **equiprobabili** (lancio di dadi non truccati, estrazione carte)
- Se lo spazio S degli eventi è costituito da n eventi equiprobabili $p(E_1)=p(E_2)=\ldots=p(E_n)$ e la $p(E_i)=1/n$

TEOREMI SULLA PROBABILITA’

- TEOREMA DELL’EVENTO COMPLEMENTARE:

  Dato un evento E, la probabilità dell’evento complementare è: $p(\overline{E}) = 1 - p(E)$

- PROBABILITA’ DELL’EVENTO IMPOSSIBILE:

  L’evento impossibile ha probabilità 0.

TEOREMI SULLA PROBABILITA’

- PROBABILITA’ TOTALE (SOMMA LOGICA):

Dati due eventi E_1 ed E_2 (compatibili o incompatibili), vale la seguente relazione sulla probabilità totale, cioè della somma logica:

$$p(E_1 U E_2) = p(E_1) + p(E_2) – p(E_1 \cap E_2).$$

OSSERVAZIONE:

Se gli eventi sono incompatibili $E_1 \cap E_2 ,= \emptyset$, il terzo termine sarà 0 perché $p(E_1 \cap E_2)=0$

$$p(E_1 U E_2) = p(E_1) + p(E_2)$$

ESEMPI

- Lanciando un dado, qual è la probabilità che esca un 6 o un numero dispari?

Svolgimento:

Il connettivo “o” ci fa pensare alla **somma logica**, quindi all’operazione di **unione** di eventi. Inoltre i due eventi sono **incompatibili**, dato che 6 è un numero pari. Quindi la probabilità della somma logica degli eventi è data dalla somma delle probabilità dei singoli eventi elementari, cioè:

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ESEMPI

Consideriamo un lancio di dadi non truccato, calcolare la probabilità dei seguenti eventi

E1 = esce il numero 2 o 3 o 5

E2 = esce il numero 4 o 6

Quanto vale E1 U E2?

E3 = esce il numero 3 o 5 o 6

Quanto vale E1 U E3?

$P(E1) = 3/6 = 1/2$

$P(E2) = 2/6 = 1/3$

$P(E1 \cup E2) = P(E1) + P(E2) - P(E1 \cap E2) = ½ + 1/3 - 0 = 5/6$ (incompatibili)

$P(E3) = 3/6 = 1/2$

$P(E1 \cup E3) = P(E1) + P(E3) - P(E1 \cap E3) = ½ + ½ - 2/6 = 4/6$ (compatibili)

ESEMPI

- Estraendo una carta da un mazzo di 40, qual è la probabilità che sia un re o una carta di spade?

Svolgimento:

Il connettivo "o" ci fa pensare alla **somma logica**, quindi all'operazione di **unione** di eventi. Ma in questo caso i due eventi sono **compatibili**, giacché può uscire un re di spade. Quindi utilizziamo il teorema della probabilità totale:

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2) = \frac{4}{40} + \frac{10}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$$

ESEMPI

- In un sacchetto ci sono palline rosse, bianche e blu. La probabilità di estrarre una pallina rossa è 1/3 e quella di estrarre una pallina blu è 1/5. Qual è la probabilità di estrarre una pallina bianca?

Svolgimento:

La probabilità richiesta si calcola facilmente come probabilità **contraria** della probabilità di “estrarre una pallina rossa **o** blu”. Quest’ultima si calcola come probabilità totale di due eventi incompatibili, giacchè una pallina non può essere contemporaneamente rossa e blu, quindi:

$$p = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$$

- SOMMA LOGICA (O EVENTO UNIONE):

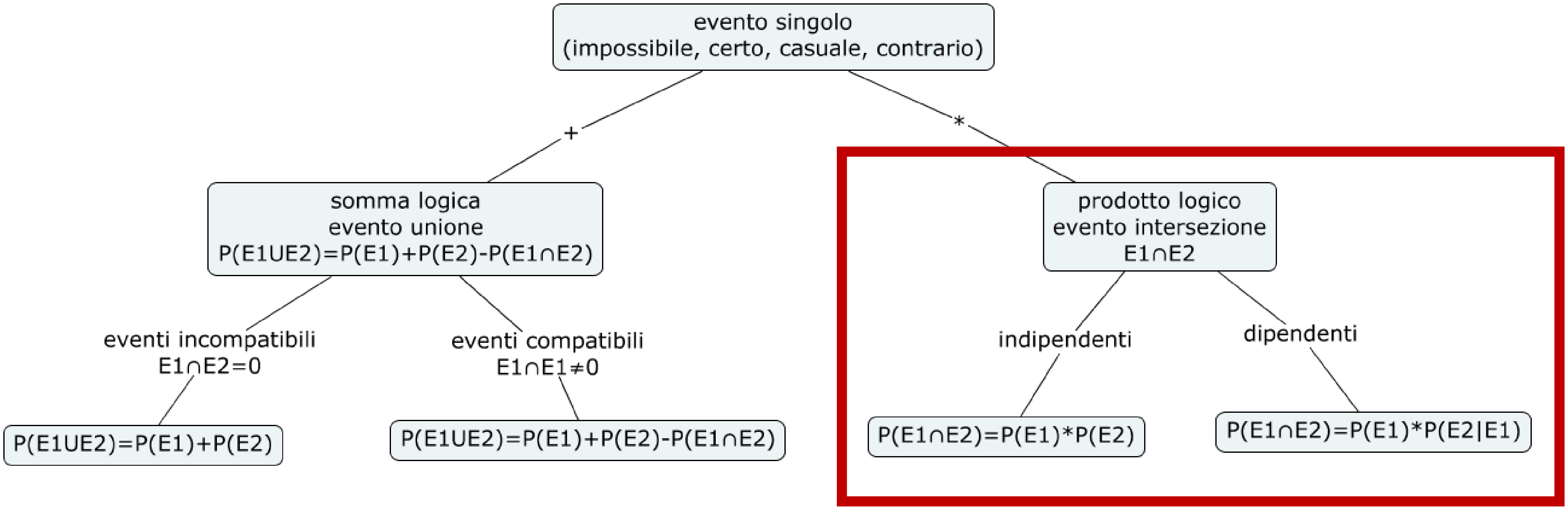
Dati due eventi E_1 ed E_2 compatibili

$$p(E_1 U E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2).$$

Dati due eventi E_1 ed E_2 incompatibili

$$p(E_1 U E_2) = p(E_1) + p(E_2)$$

Indice della lezione



- PRODOTTO LOGICO (O EVENTO INTERSEZIONE):

Dati due eventi E_1 ed E_2 indipendenti

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) * p(E_2)$$

Dati due eventi E_1 ed E_2 dipendenti

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) * p(E_2 \mid E_1)$$

TEOREMI SULLA PROBABILITA’

- PROBABILITA’ COMPOSTA (PRODOTTO LOGICO)

  Consideriamo ora due eventi E_1 ed E_2 e vogliamo calcolare la probabilità $p(E_1 \cap E_2)$ che si verifichino **entrambi**.

Possono presentarsi due casi:

- E_1 ed E_2 sono stocasticamente **indipendenti**
- E_1 ed E_2 sono stocasticamente **dipendenti**

EVENTI DIPENDENTI E INDIPENDENTI

- Due eventi E_1 ed E_2 sono stocasticamente **indipendenti** se non si influenzano a vicenda, cioè se il verificarsi di uno dei due non modifica la probabilità che si verifichi il secondo.

- Viceversa, due eventi E_1 ed E_2 sono stocasticamente **dipendenti** se il verificarsi di uno dei due modifica la probabilità che si verifichi il secondo.

•<u>Esempio</u>: EVENTI INDIPENDENTI

Da un mazzo di 40 carte si estraggono successivamente 2 carte, calcola la probabilità di estrarre 2 carte di oro nel caso che la prima carta estratta viene reimmessa nel mazzo

<u>Svolgimento</u>:

Dobbiamo chiederci se i due eventi sono **dipendenti** o **indipendenti**.

I due eventi sono indipendenti perché reimmettiamo la carta nel mazzo.

La probabilità del primo evento è 10/40, cioè 1/4.

La probabilità del secondo evento è 10/40, cioè 1/4

Pertanto questo è un caso di eventi **indipendenti**. La probabilità composta è data dal prodotto delle probabilità dei singoli eventi:
$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) * p(E_2) = 1/4 * 1/4 = 1/16$

- La probabilità composta sarà allora 1/16.

•<u>Esempio</u>: EVENTI DIPENDENTI

Da un mazzo di 40 carte si estraggono successivamente 2 carte, calcola la probabilità di estrarre 2 carte di oro nel caso che la prima carta estratta non viene reimmessa nel mazzo.

<u>Svolgimento</u>:

Dobbiamo chiederci se i due eventi sono **dipendenti** o **indipendenti**.

I due eventi sono dipendenti perché non reimmettiamo la carta nel mazzo.

La probabilità del primo evento è 10/40, cioè 1/4.

La probabilità del secondo evento è 9/39, cioè 3/13

Pertanto questo è un caso di eventi **dipendenti**. La probabilità composta è data da:

$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1)*p(E_2|E_1)=1/4*3/13=3/52$

La probabilità composta sarà allora 3/52.

• Esempio: EVENTI DIPENDENTI

Si estrae una carta da un mazzo di 40 e, senza reinserirla nel mazzo, se ne estrae una seconda. Qual è la probabilità che siano due donne?

Svolgimento:

La probabilità del primo evento è 4/40, cioè 1/10.

Ma alla seconda estrazione le carte sono diventate 39 e, se vogliamo che la prima sia già una donna, le donne rimaste sono soltanto 3; quindi la probabilità che la seconda carta sia ancora una donna sarà diventata 3/39 cioè 1/13.

Pertanto questo è un caso di eventi **dipendenti**. La probabilità composta è data da:

$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1)*p(E_2|E_1)=1/10*1/13=1/130$

PROBABILITA’ CONDIZIONATA

- Quando la probabilità di un evento E_2 dipende dal verificarsi dell’evento E_1, si parla di probabilità condizionata e si indica con $p(E_2|E_1)$ e si legge “probabilità di E_2 condizionata ad E_1”.

  In questo caso, cioè quando i due eventi sono **stocasticamente dipendenti**, la probabilità composta è data da:

$$P(E_1 \cap E_2) = p(E_1) * p(E_2|E_1)$$

  che equivale alla seguente:

$$p(E_2 \mid E_1) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_1)}$$

DIAGRAMMI AD ALBERO

- Spesso si può usare un ***diagramma ad albero*** per rappresentare i casi possibili.
  Questo ci permette di avere un'elencazione grafica di tutti gli elementi dello spazio campione. Se poi si scrive su ciascun ramo la probabilità dell'evento rappresentato nel nodo seguente, la probabilità di uno qualsiasi degli eventi sui rami terminali è data dal **prodotto** delle probabilità scritte sull'intero percorso, in quanto si tratta di un'applicazione diretta della formula delle probabilità **composte**. In pratica:
- Lungo i rami si moltiplicano le probabilità
- Ai margini si addizionano

ESEMPIO

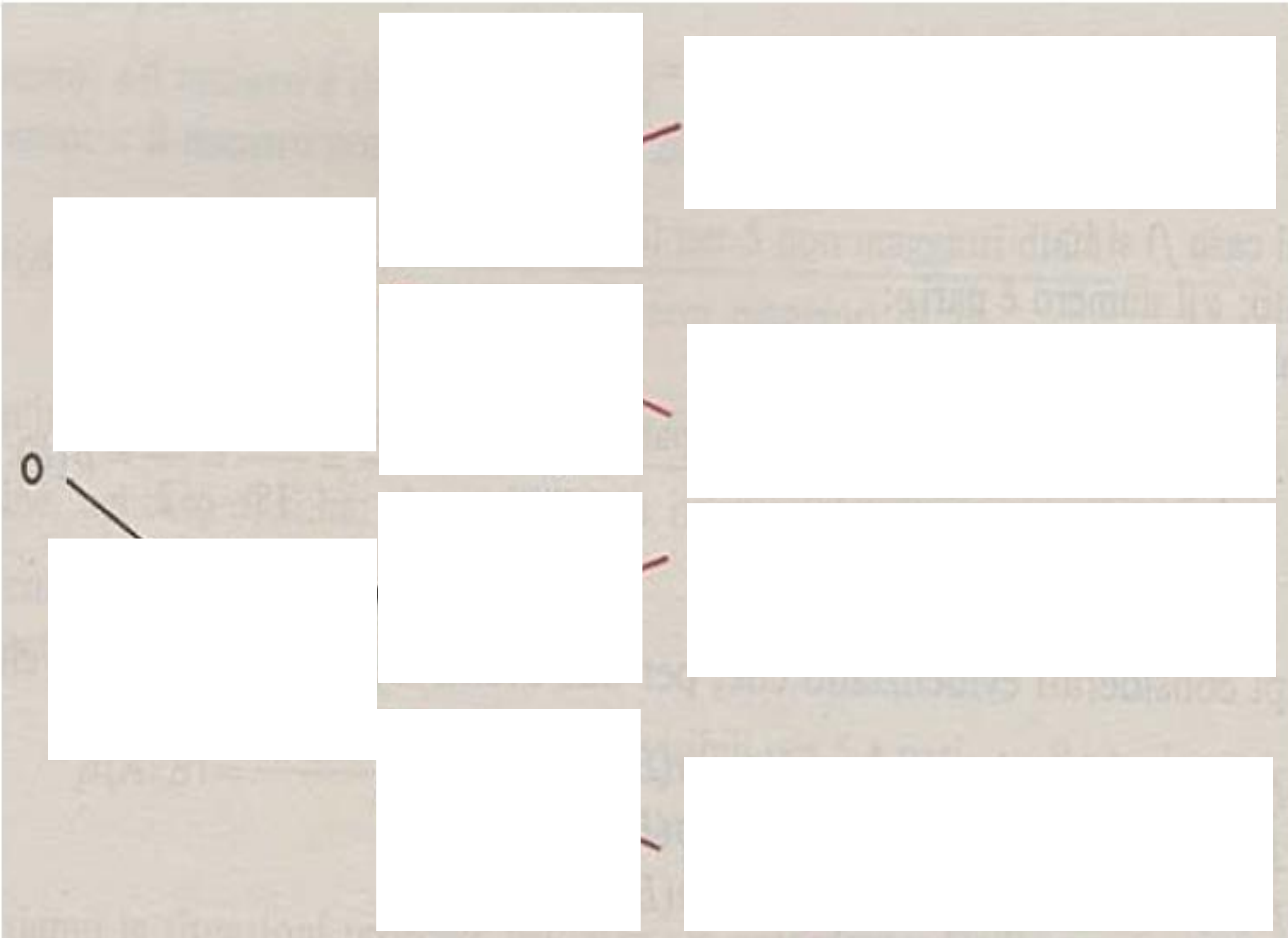
Da un'urna contenente 6 palline bianche (B) e 4 nere (N) se ne estraggono due a caso, una di seguito all'altra senza reimbussolamento.

Si vuole determinare qual è la probabilità:

- $p(B_1 \cap B_2) =$ che la prima pallina sia bianca e la seconda bianca
- $p(B_1 \cap N_2) =$ che la prima pallina sia bianca e la seconda nera
- $p(N_1 \cap B_2) =$ che la prima pallina sia nera e la seconda bianca
- $p(N_1 \cap N_2) =$ che la prima pallina sia nera e la seconda nera

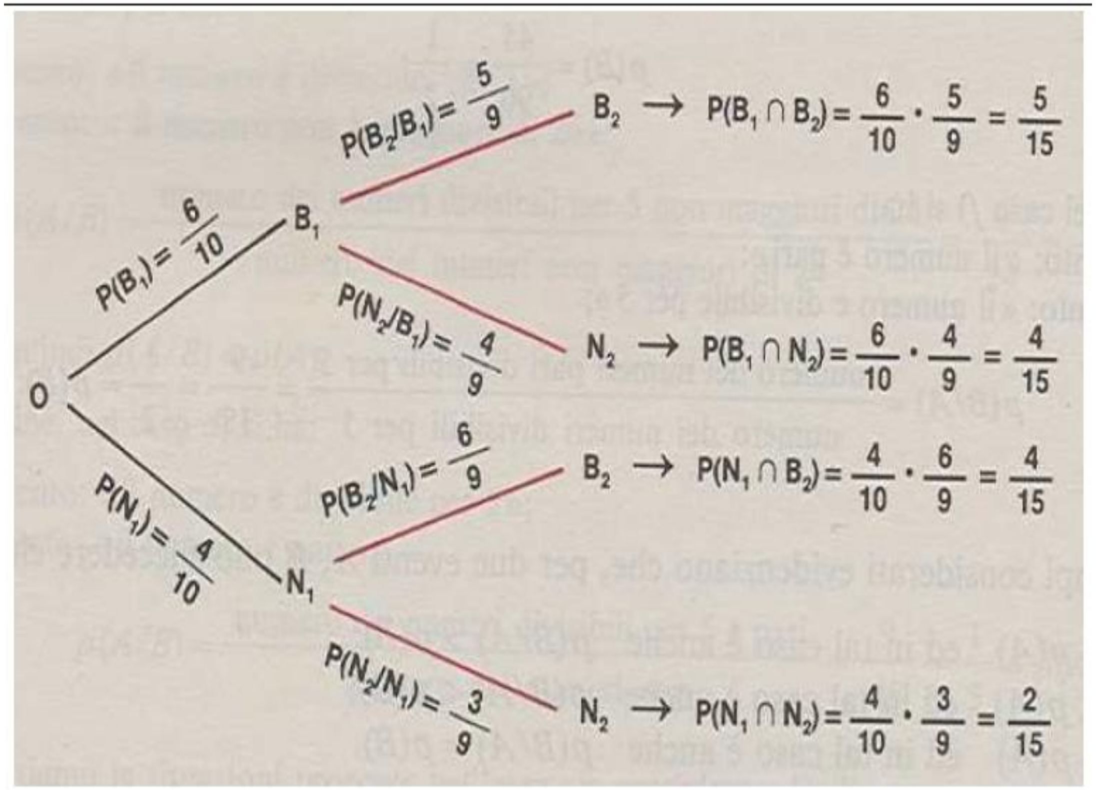
Questo esempio di probabilità composta di eventi non indipendenti può venir visualizzata mediante il seguente diagramma ad albero:

DIAGRAMMI AD ALBERO



DIAGRAMMI AD ALBERO

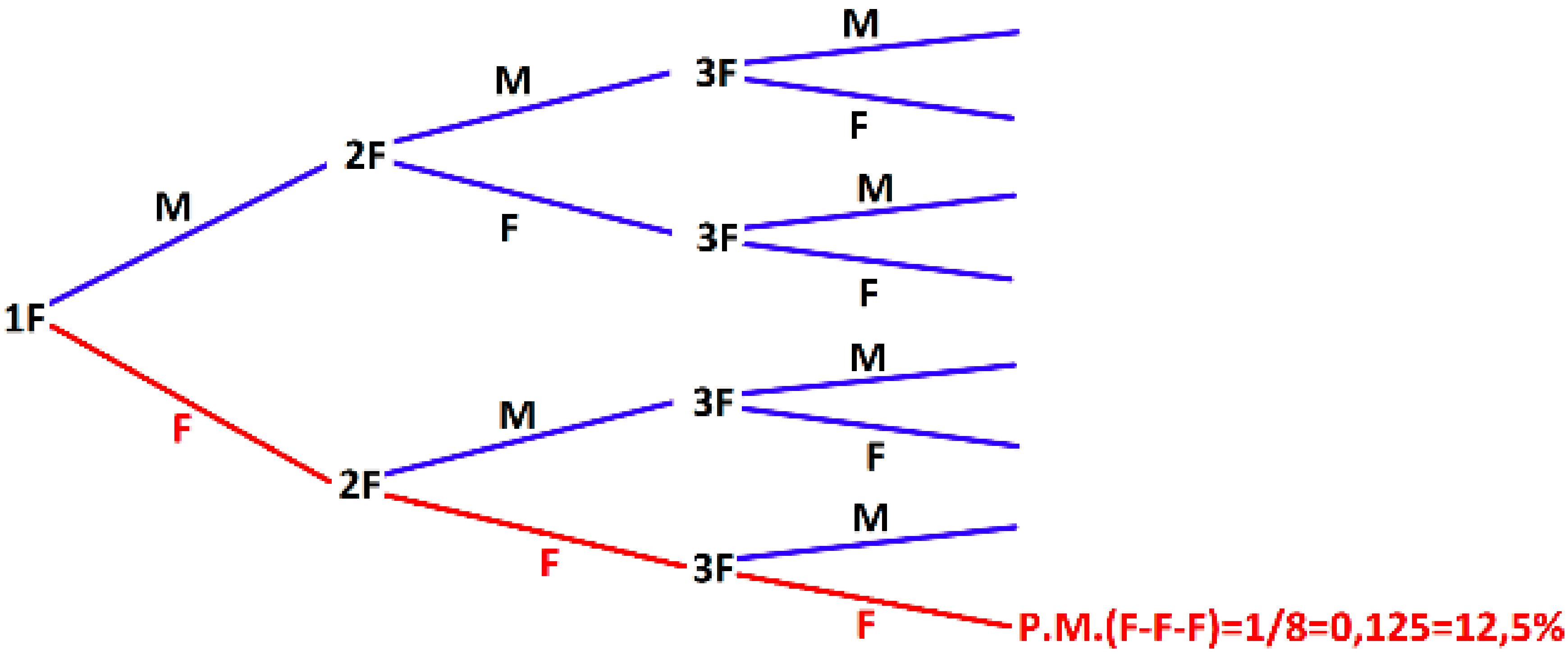
- Ci chiediamo ora qual è la probabilità che la seconda pallina sia bianca, indipendentemente dal colore della prima pallina.



- Per rispondere, ci basterà sommare i valori **marginali** relativi a B_2, cioè 5/15 + 4/15 = 9/15 = 3/5 = 0.6 = 60%

DIAGRAMMI AD ALBERO

Determinare, utilizzando un diagramma ad albero, la probabilità matematica che i tre figli di una coppia siano femmine. (1F= primo figlio, 2F=secondo figlio, 3F=terzo figlio)



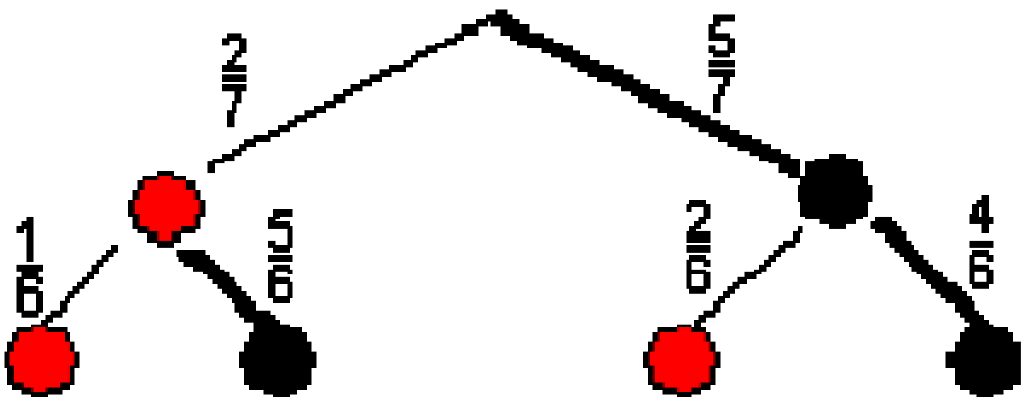
DIAGRAMMI AD ALBERO

Un sacchetto contiene 2 biglie rosse e 5 nere. Estrego 2 palline senza reimbussolamento. Determinare, utilizzando un diagramma ad albero, la probabilità:

che siano entrambe nere = 5/7 * 4/6 = 20/42 = 10/21

che siano entrambe rosse = 2/7 * 1/6 = 2/42 = 1/21

che siano dello stesso colore = 10/21 + 1/21 = 11/21



DIAGRAMMI AD ALBERO

Un sacchetto contiene 4 BIANCHE, 3 NERE,
Determinare, utilizzando un diagramma ad albero, la probabilità che in 3 estrazioni escano:

BBB
NNN
BNB
NNB

Almeno una bianca

Nessun bianca

DIAGRAMMI AD ALBERO

Un sacchetto contiene 4 ROSSE, 3 GIALLE, 7 VERDI,
Determinare, utilizzando un diagramma ad albero, la probabilità che in 3 estrazioni escano:

RGG
GRG
GGR

VGR

Almeno un verde

Nessun verde