44. Teorema della media.

Teorema della media

Sia $f(x)$ una funzione definita e continua in $[a,b]$.

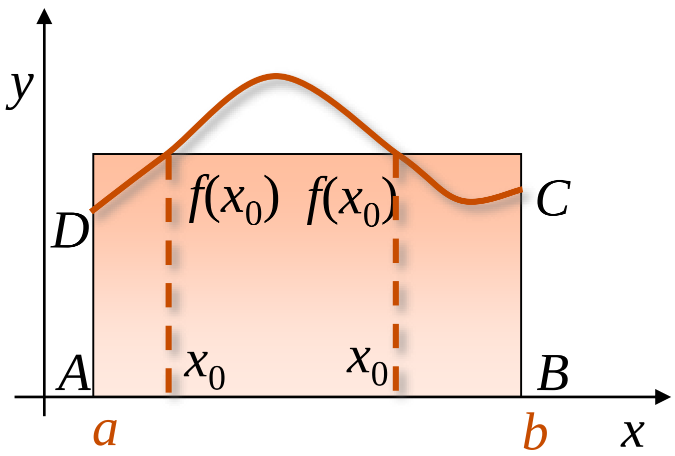
$$\Downarrow$$

$$\exists x_0 \in [a,b] : \int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a)$$

Teorema della media integrale: interpretazione geometrica

Da un punto di vista geometrico, possiamo affermare che esiste sempre un rettangolo di base pari all'ampiezza dell'intervallo $[a,b]$ e altezza uguale a $f(x_0)$ avente la stessa area del rettangoloide relativo alla funzione f.

$$\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\text{Area rettangoloide con base ab}} = \underbrace{f(x_0)(b-a)}_{\text{Area Rettangolo con base ab}}$$



Teorema della media

Sia $f(x)$ una funzione definita e continua in $[a,b]$.

$$\Downarrow$$

$$\exists x_0 \in [a,b] : \int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a)$$

<u>Dim</u>: se $f(x)$ è una funzione definita e continua in $[a,b]$ chiuso e limitato, allora per il teorema di Weierstrass f è dotata in $[a,b]$ di minimo m e di massimo M

In particolare, in tali ipotesi, per il teorema dei valori intermedi, la funzione f assume tutti i valori compresi tra il minimo m ed il massimo M

$\Updownarrow$

$$m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,b]$$

$\Downarrow$

Integrando i tre membri della disuguaglianza

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Dividendo per (b-a) i tre membri della disequazione

Valore compreso tra il minimo ed il massimo

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)} \le M$$

Ma per il teorema dei valori intermedi, la *f* assume tutti i valori compresi tra il minimo ed il massimo

$$\exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists x_0 \in [a,b] : \int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a)$$

La media di una funzione

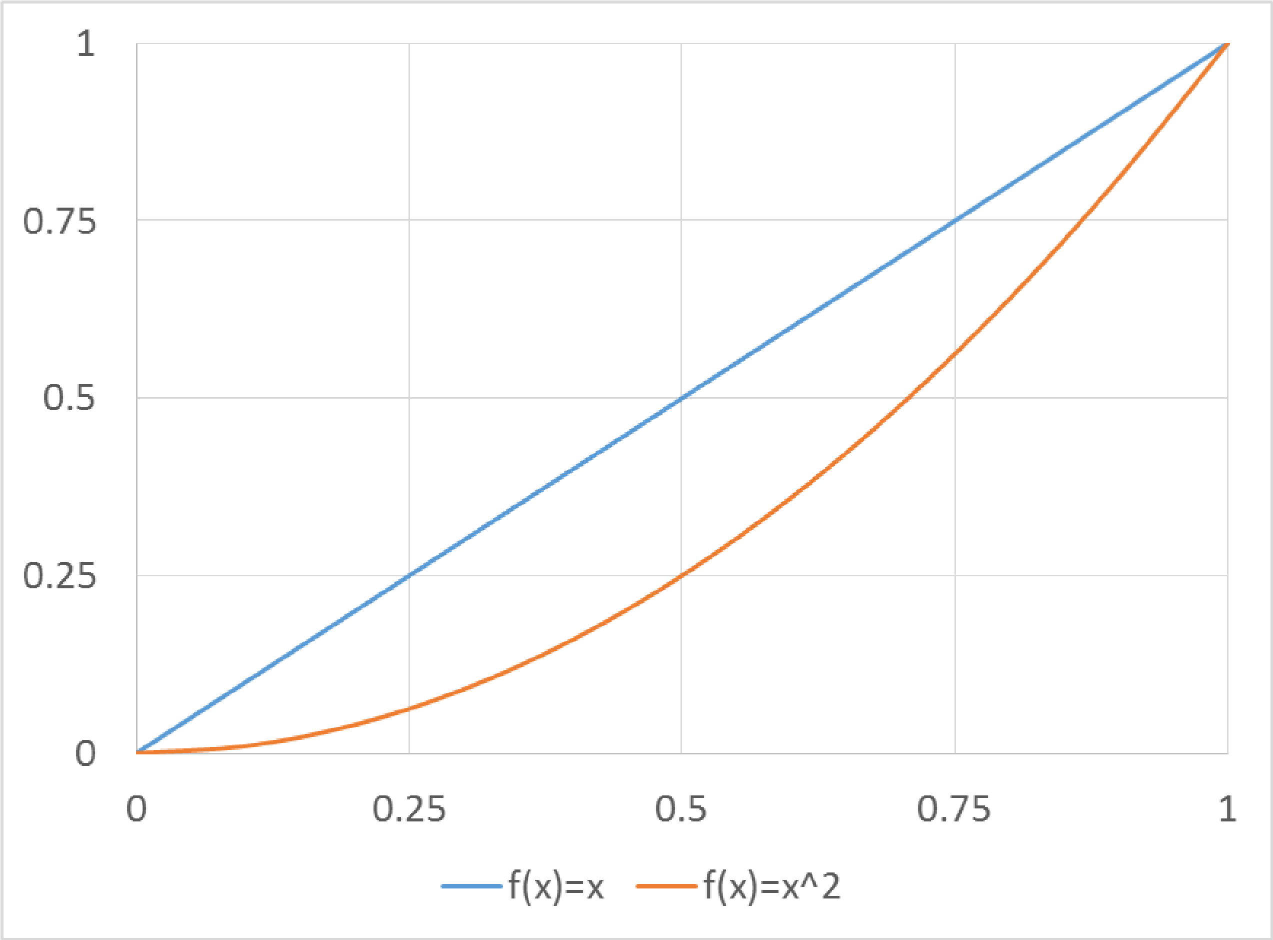
Sia $f(x)$ una funzione definita e continua in $[a,b]$.

La media di f nell'intervallo [a,b] è il valore

$$\overline{f} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx$$

La media di una funzione: applicazione

Siano date due funzioni $f(x)=x$ e $g(x)=x^2$, nell'intervallo $[0,1]$ chi ha la media integrale maggiore?



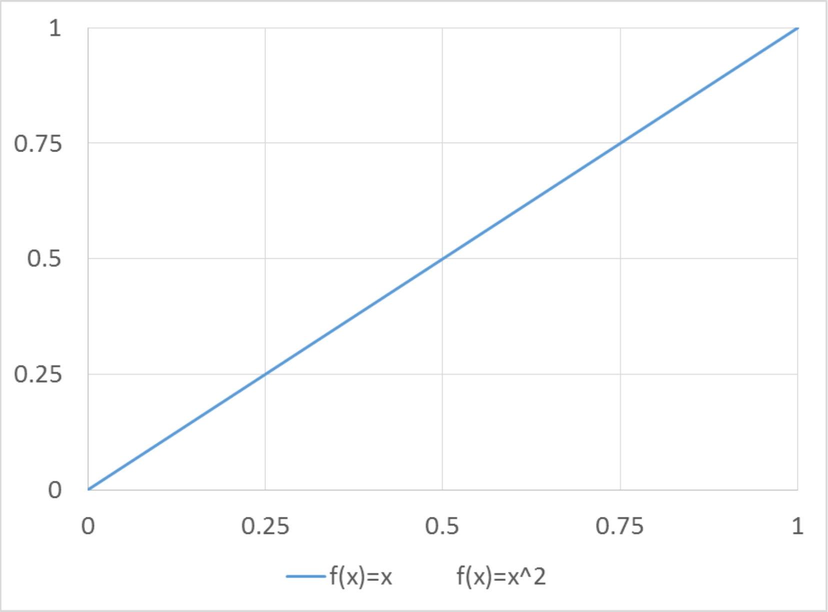
La media di una funzione: nota

Applichiamo il teorema della media a f(x)=x nell'intervallo 0,1

$$\overline{f} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx$$

$$\overline{f} = \frac{1}{(1-0)} \int_0^1 xdx$$

$$\overline{f} = 1 \cdot \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{0}{2} \right) = \frac{1}{2}$$



… è anche l'area del traingolo :)

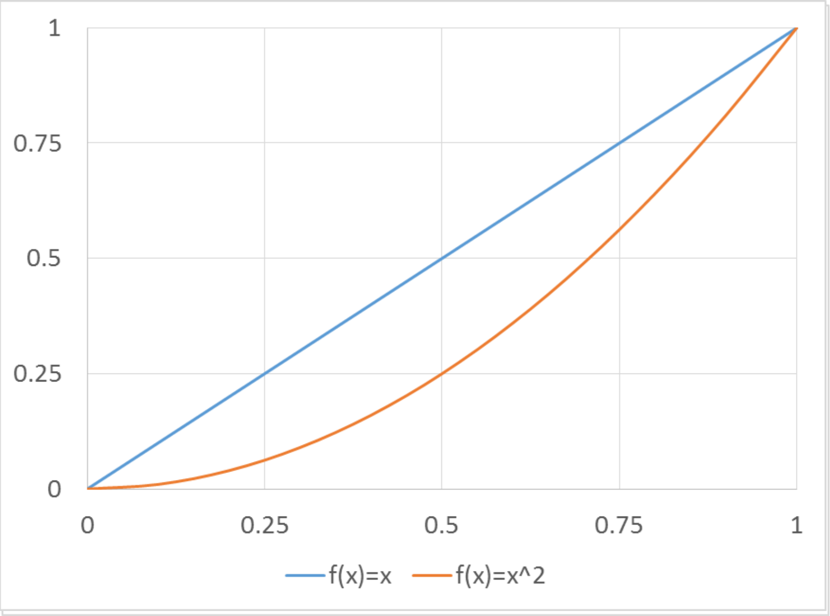
La media di una funzione: nota

Applichiamo il teorema della media a $f(x)=x^2$ nell'intervallo 0,1

$$\bar{g} = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b g(x)dx$$

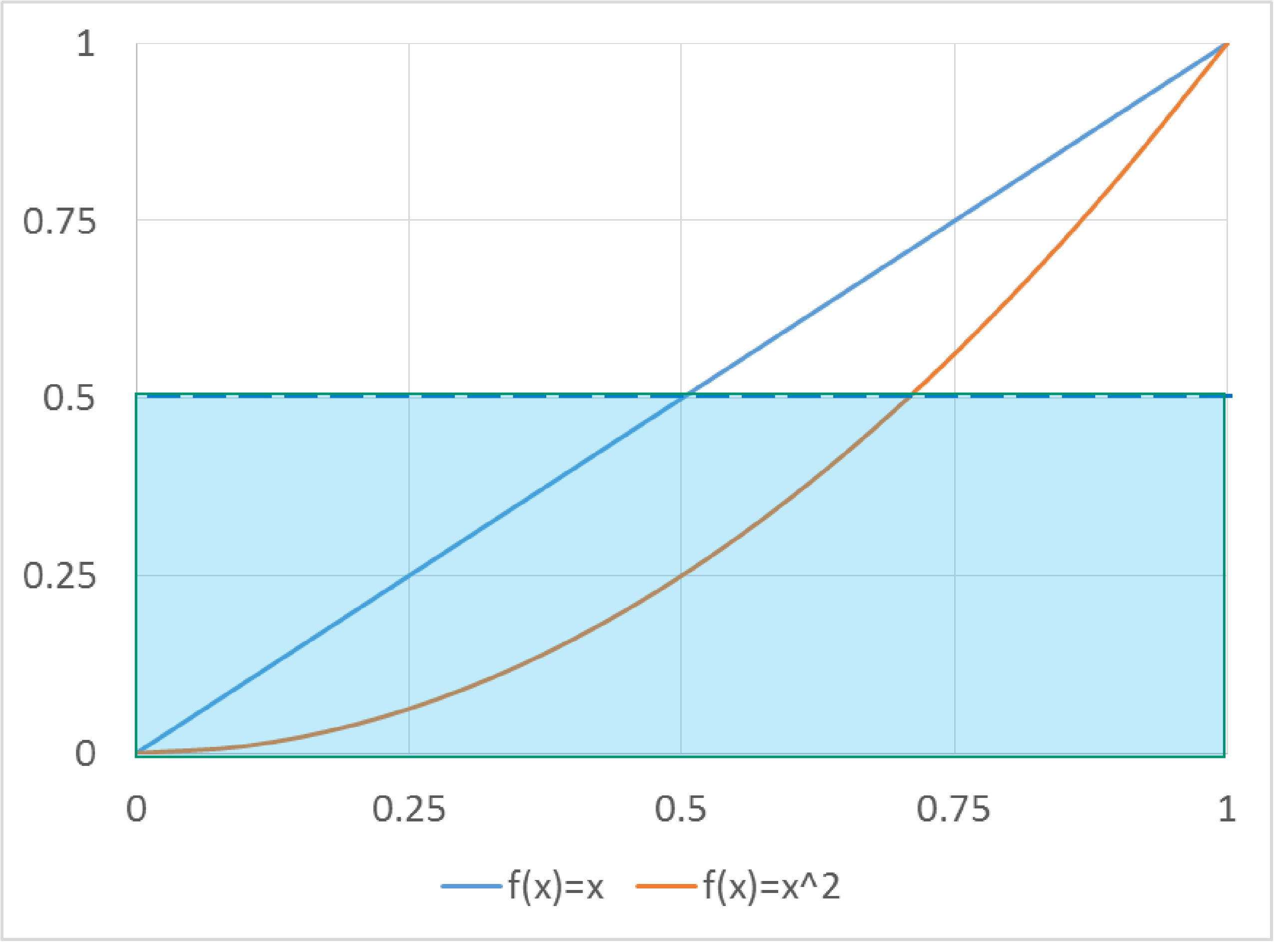
$$\bar{g} = \frac{1}{(1-0)}\int_0^1 x^2 dx$$

$$\bar{g} = 1\cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = 1\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{0}{3}\right) = \frac{1}{3}$$



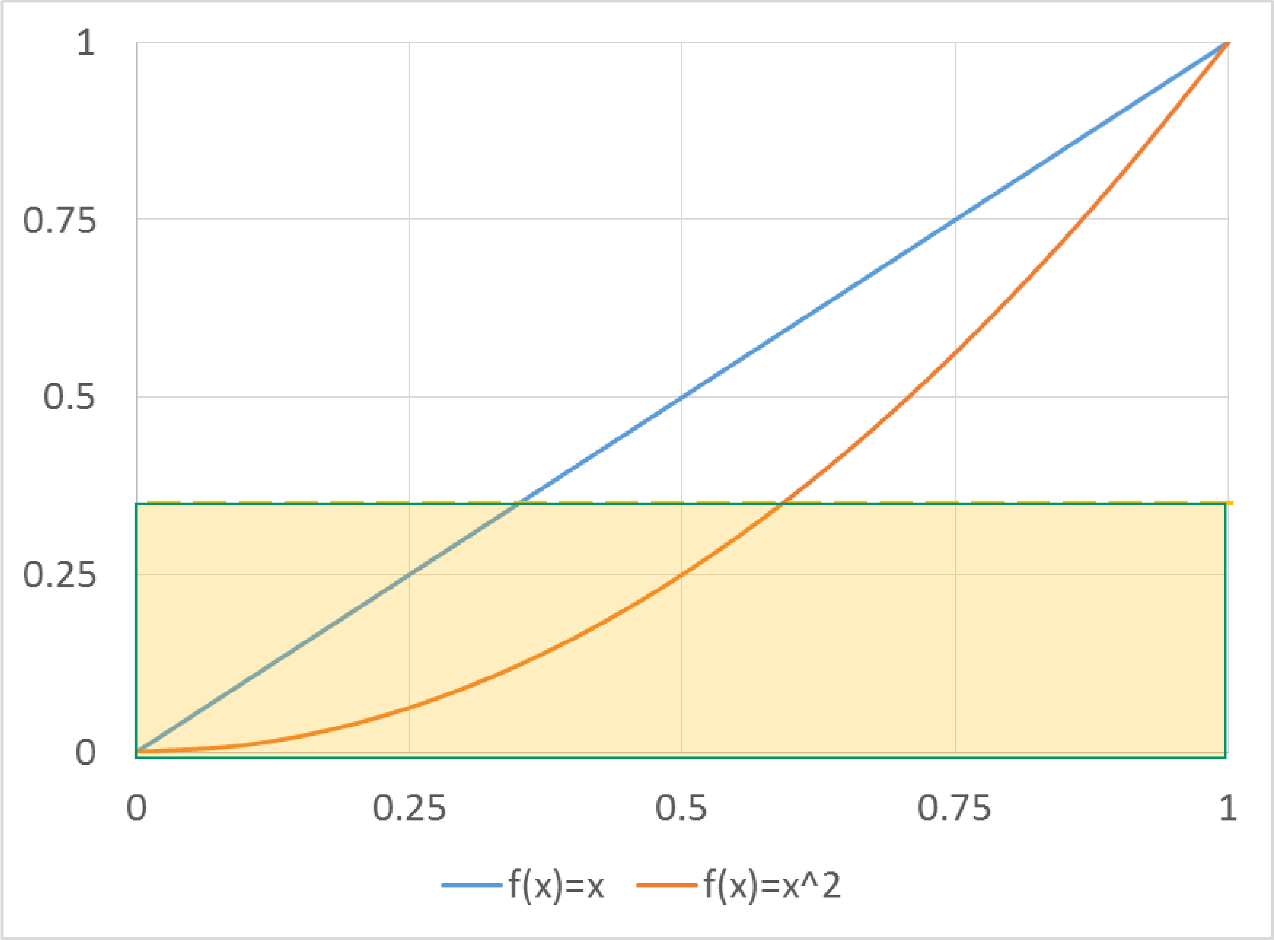
La media di una funzione: applicazione

$$\bar{f} = \frac{1}{2}$$



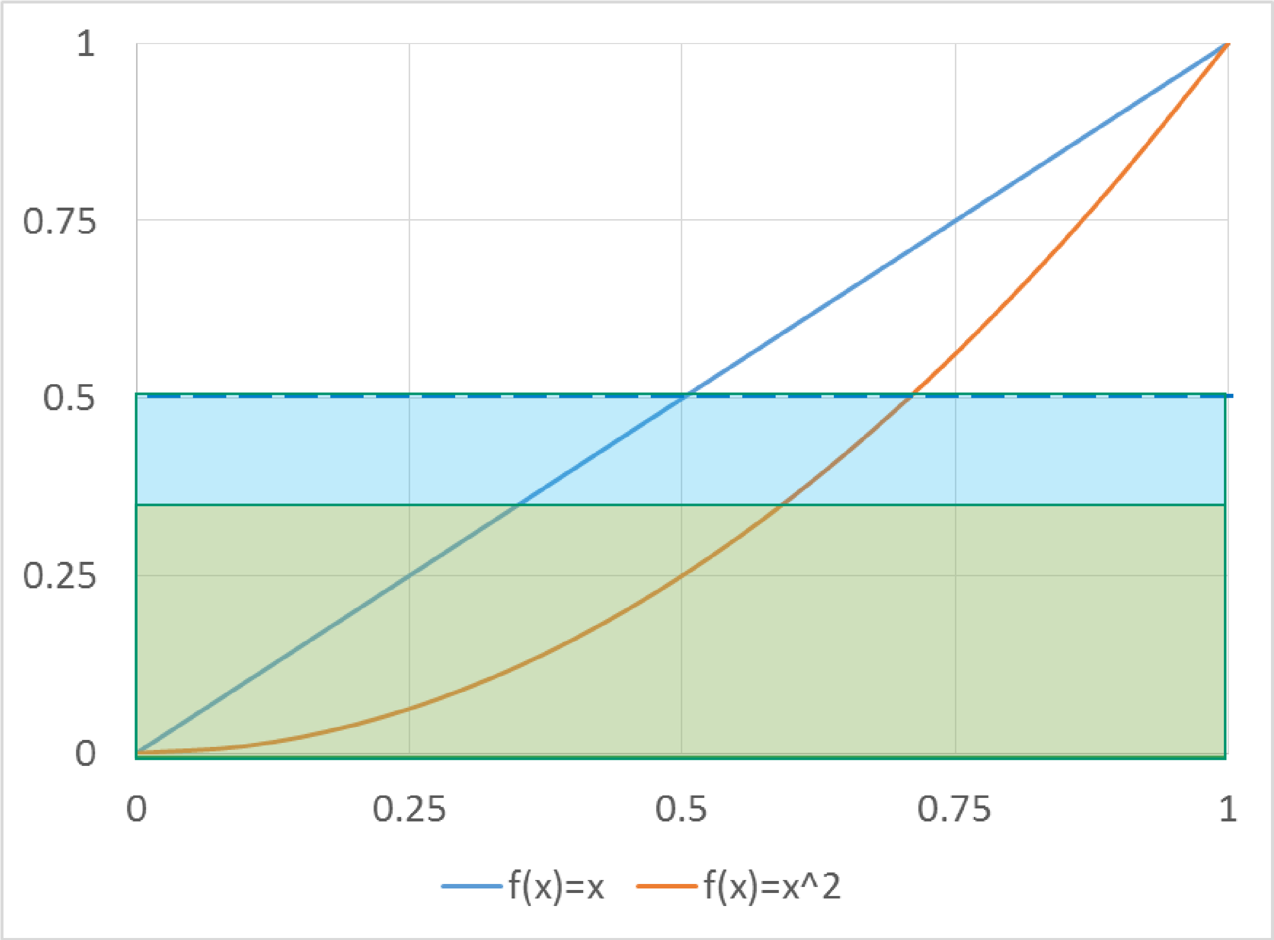
La media di una funzione: applicazione

$$\bar{g} = \frac{1}{3}$$



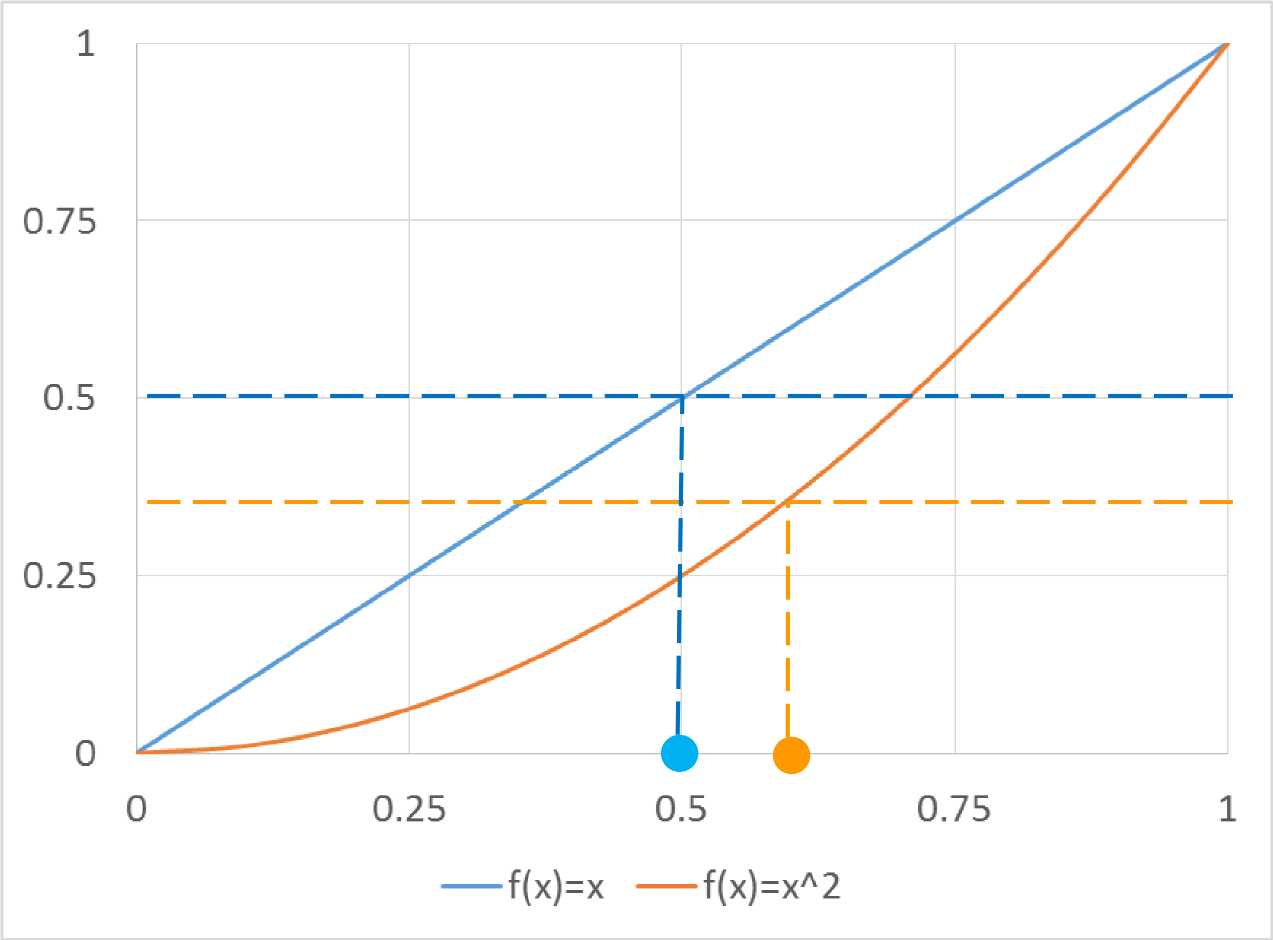
La media di una funzione: applicazione

$$\bar{f} = \frac{1}{2} \qquad > \bar{g} = \frac{1}{3}$$



La media di una funzione: applicazione

Osserva il valore sull'asse delle x la cui immagine è $\bar{f}$ e $\bar{g}$



Esercizio: Coltura di batteri

La numerosità di una coltura di batteria varia con la legge $N(t)=10^6e^t$ (con t ore)

Determinare la numerosità media nell'intervallo [0,10]

$$\overline{N} = \frac{\int_a^b N(t)dt}{(b-a)}$$

Si ha

$$\overline{N} = \frac{1}{10}\int_0^{10} 10^6 e^t dt = \frac{1}{10}10^6 e^t \Big|_0^{10} = 10^5(e^{10}-1)$$