Esercizi e Complementi di Geometria e Algebra

Prof. Armando Capasso

Università degli studi di Napoli "Federico II"
Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Corso Protopisani Nicolangelo 70, Napoli (Italy), C.A.P. 80146

E-mail: `armando.capasso@unina.it`

Nota iniziale. Gli esercizi e le definizioni segnati con # sono facoltativi o complementari.

Esercizio 1. # Siano X, Y, Z insiemi, e W un sottoinsieme di X. Dimostrare le seguenti eguaglianze:

a) $X \cup X = X$ (*idempotenza dell'unione*);

b) $X \cup Y = Y \cup X$ (*proprietà commutativa dell'unione*);

c) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$ (*proprietà associativa dell'unione*);

d) $X \cup W = X$, in particolare $X \cup \emptyset = X$;

e) $X \cap X = X$ (*idempotenza dell'intersezione*);

f) $X \cap Y = Y \cap X$ (*proprietà commutativa dell'intersezione*);

g) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$ (*proprietà associativa dell'intersezione*);

h) $X \cap W = W$, in particolare $X \cap \emptyset = \emptyset$;

i) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$ (*proprietà distributiva dell'unione sull'intersezione*);

j) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$ (*proprietà distributiva dell'intersezione sull'unione*);

k) $X \setminus \emptyset = X$;

l) $W \setminus X = \emptyset$, in particolare $\emptyset \setminus X = \emptyset$;

m) $X \setminus X = \emptyset$;

n) $(X \cup Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$ (*proprietà distributiva della differenza sull'unione*);

o) $(X \cap Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cap (Y \setminus Z)$ (*proprietà distributiva della differenza sull'intersezione*);

p) $Z \setminus (X \cup Y) = (Z \setminus X) \cap (Z \setminus Y)$ (*prima regola di De Morgan*);

q) $Z \setminus (X \cap Y) = (Z \setminus X) \cup (Z \setminus Y)$ (*seconda regola di De Morgan*).

Definizione 2. # Siano S e T insiemi. Si definisce *unione disgiunta* $S \Delta T$ l'insieme $(S \cup T) \setminus (S \cap T)$.

Esercizio 3. # Siano S, T, U insiemi. Dimostrare le seguenti eguaglianze:

a) $S \Delta T = (S \setminus T) \cup (T \setminus S)$, da cui il nome di *differenza simmetrica*;

b) utilizzando i *diagrammi di Eulero-Venn*[1], interpretare visivamente l'unione disgiunta di due insiemi;

c) $S \Delta T = T \Delta S$ (*proprietà commutativa dell'unione disgiunta*);

d) $(S \Delta T) \Delta U = S \Delta (T \Delta U)$ (*proprietà associativa dell'unione disgiunta*);

e) $S \Delta \emptyset = S$;

f) $S \Delta S = \emptyset$ (*nilpotenza dell'unione disgiunta*).

Esercizio 4. Calcolare il dominio delle seguenti corrispondenze.

a) $\mathrm{Id} : n \in \mathbb{N}_{\geq 0} \to n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$[2];

b) $d : n \in \mathbb{N}_{\geq 0} \to \dfrac{n}{2} \in \mathbb{N}_{\geq 0}$;

c) $o : m \in \mathbb{Z} \to -m \in \mathbb{Z}$;

d) $i : q \in \mathbb{Q} \to \dfrac{1}{q} \in \mathbb{Q}$;

e) $\widetilde{r} : x \in \mathbb{R} \to +\sqrt{x}, -\sqrt{x} \in \mathbb{R}$;

f) descrivere a parole proprie le precedenti corrispondenze.

Esercizio 5. Quali delle seguenti corrispondenze sono funzioni?

a) $\mathrm{Id} : n \in \mathbb{N}_{\geq 0} \to n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$;

---

[1] Denominati scherzosamente a lezione come "sacchi".

[2] Con il simbolo $\mathbb{N}_{\geq 0}$ si intende l'*insieme dei numeri naturali, zero* (0) *incluso*.

b) $d : n \in 2\mathbb{N}_{\geq 0} \to \dfrac{n}{2} \in \mathbb{N}_{\geq 0}$[3];

c) $o : m \in \mathbb{Z} \to -m \in \mathbb{Z}$;

d) $i : q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \dfrac{1}{q} \in \mathbb{Q}$;

e) $\widetilde{r} : x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \to +\sqrt{x}, -\sqrt{x} \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6. Calcolare l'insieme immagine delle seguenti corrispondenze; e determinare quali di esse sono funzioni.

a) $p : n \in \mathbb{N}_{\geq 0} \to 2n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$;

b) $d : n \in \mathbb{N}_{\geq 0} \to 2n + 1 \in \mathbb{N}_{\geq 0}$;

c) $\pm : m \in \mathbb{Z} \to -m, +m \in \mathbb{Z}$;

d) $pos : x \in \mathbb{R} \to x^2 \in \mathbb{R}$;

e) $pos+ : x \in \mathbb{R} \to x^2 + 1 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 7. Siano S e T insiemi non vuoti, sia $t_0 \in T$. Considerate le funzioni:

$$f_1 : s \in S \to t_0 \in \{t_0\}$$
$$f_2 : s \in S \to t_0 \in T;$$

rispondere adeguatamente alle seguenti domande:

a) f_1 ed f_2 sono la stessa funzione?

b) f_1 è una funzione suriettiva?

c) f_2 è una funzione iniettiva e\o suriettiva?

Esercizio 8. a) Quali funzioni degli esercizi 5 e 6 sono suriettive?

b) Date le seguenti funzioni:

1. $p_0 : n \in \mathbb{N}_{\geq 0} \to 2n \in 2\mathbb{N}_{\geq 0}$,
2. $pos_0 : x \in \mathbb{R} \to x^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,
3. $pos+_0 : x \in \mathbb{R} \to x^2 + 1 \in \mathbb{R}_{\geq 1}$;

perché esse sono funzioni suriettive?

---

[3]Col simbolo $2\mathbb{N}_{\geq 0}$ si indica l'insieme ottenuto moltiplicando gli elementi di $\mathbb{N}_{\geq 0}$; in breve, questi è l'insieme dei numeri naturali pari, 0 incluso.

c) Quali funzioni degli esempi 5, 6 e del punto precedente mettono in corrispondenza elementi distinti del dominio con uno stesso elemento del codominio?

Esercizio 9. # Siano S e T insiemi non vuoti, $A, B \subseteq S$ e $U, V \subseteq T$, ed $f : S \to T$ una funzione. Dimostrare che:

a) $f(\emptyset) = \emptyset$;

b) $f(S) \subseteq T$;

c) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

d) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;

e) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ se f è una funzione iniettiva;

f) $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$;

g) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$ se f è una funzione suriettiva;

h) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$;

i) $f^{-1}(T) = S$;

j) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$;

k) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$;

l) $f^{-1}(U \setminus V) = f^{-1}(U) \setminus f^{-1}(V)$;

m) $f(f^{-1}(U) \cap A) = U \cap f(A)$ (*formula di proiezione*);

n) $f(f^{-1}(U)) = U$;

o) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$.

Exercise 10. Let $(S, \leq)$ be an ordered set, let T be a subset of S and let i be the inclusion of T in S. One defines on T the following relation:

$$\forall a, b \in T,\ a\mathcal{R}b \iff i(a) \leq i(b).$$

Prove that $\mathcal{R}$ is an order relation on T, which is called *induced by* $\leq$.

Remark 11. Without change the notations, one can consider an injective function $f : U \to S$, and defines in the same way an order relation on U.

$\Diamond$

Exercise 12. Let

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

be the closed (unitary) disk centred at $(0, 0) = O$; on this set one defines the following relation:

$$P, Q \in D^2,\ P \leq Q \overset{def.}{\iff} P = Q \text{ either } d(O, P) \lneqq d(O, Q);$$

where d is the usual *Euclidean metric* on $\mathbb{R}^2$. Prove that $(D^2, \leq)$ is an ordered set, with minimum and maximal elements.

Remark 13. Without change the notations, in the ordered set $(D^2, \leq)$ there exist pairs of elements which are not in relation $\leq$. The reader is invited to give an explicit example of them.

$\Diamond$

Definizione 14. Sia S un insieme (non vuoto) ed $f : S \times S \to S$ una funzione. f si definisce *operazione binaria* od *operazione interna* di S. La coppia (S, f) si definisce *struttura algebrica.*

Considerata la struttura algebrica (S, f), si scriverà per chiarezza

$$\forall (x, y) \in S \times S,\ f((x, y)) = x * y$$

salvo indicazioni diverse.

Definizione 15. Sia $(S, *)$ una struttura algebrica.

a) Un elemento e di S si definisce *elemento neutro* se

$$\forall x \in S,\ x * e = e * x = x.$$

La terna $(S, *, e)$ si definisce *struttura algebrica unitaria.*

b) Se vale la seguente *proprietà associativa*

$$\forall x, y, z \in S,\ (x * y) * z = x * (y * z)$$

allora $*$ si definisce *operazione associativa.*

c) Se vale la seguente *proprietà commutativa*

$$\forall x, y \in S,\ x * y = y * x$$

allora $*$ si definisce *operazione commutativa.*

Se $(S, *)$ soddisfa le precedenti tre proprietà, questi si definisce *monoide commutativo*; e se non soddisfacesse esclusivamente l'ultima di esse, questi si definisce *monoide.*

Esempio 16. Ci si renda conto che: $(\mathbb{N}_{\geq 0}, +, 0)$, $(\mathbb{N}_{\geq 1}, \cdot, 1)$, $(\mathbb{Z}, +, 0)$, $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$, $(\mathbb{Q}, +, 0)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$, $(\mathbb{R}, +, 0)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ sono monoidi commutativi.

Ci si renda conto che $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, /)$[4] è una struttura algebrica che non soddisfa nessuna delle proprietà elencate nella definizione 15.

Esercizio 17. # Sia W l'insieme delle parole finite costruibili con le lettere dell'alfabeto[5], e sia $*$ la funzione di giustapposizione delle parole; ovvero, per esempio: $a*a = aa$, $ab*c = abc$ e così via.

Dimostrare che $(W, *)$ è una struttura algebrica, la cui operazione interna è associativa ma non è commutativa.

Ammessa l'esistenza della "parola vuota" in W e la si indichi con " "; $(W, *, \text{" "})$ è una struttura algebrica unitaria?

Esercizio 18. Considerato l'insieme delle n-ple di numeri reali $\mathbb{R}^n$, definita

$$\forall (a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n,\ (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n);$$

dimostrare che $(\mathbb{R}^n, +)$ è un monoide commutativo. Qual è l'elemento neutro?

Nota 19. Si noti che per $n = 1$ si (ri-)trova la struttura algebrica $(\mathbb{R}, +, 0)$.

Esercizio 20. Considerato l'insieme dei polinomi a coefficienti reali $\mathbb{R}[x]$; ricordato che la somma di polinomi è definita alla seguente maniera:

$$p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m + \ldots, q = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots \in \mathbb{R}[x],$$
$$p + q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots,$$

dimostrare che $(\mathbb{R}[x], +)$ è un monoide commutativo. Qual è l'elemento neutro?

Esercizio 21. Sia $d \geq 1$ un numero naturale; considerato l'insieme dei polinomi a coefficienti reali $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$ di grado al più d, e si consideri su di esso l'usuale somma di polinomi.

Dimostrare che $(\mathbb{R}[x]_{\leq d}, +)$ è un monoide commutativo unitario.

Esercizio 22. Senza cambiare i nomi dal precedente esercizio, se si fosse scelto $d = 0$, cosa sarebbe accaduto?

Definizione 23. Siano S e T insiemi (non vuoti), $f : S \times T \to S$ e $g : T \times S \to S$ funzioni. f si definisce *operazione esterna destra* di S di *dominio operazionale* T. g si definisce *operazione esterna sinistra* di S di *dominio operazionale* T.

Si scriverà $(S; T, f)$ e $(S; T, g)$.

[4] Col simbolo / si indica la divisione tra numeri reali (non nulli).
[5] Ad esempio: sono parole alba, abc, dadwarerw, e così via.

Esempio 24. Considerata la funzione

$$/ : (x, y) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \frac{x}{y} \in \mathbb{R},$$

questa è un'operazione esterna destra di $\mathbb{R}$ di dominio operazionale $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

△

Nota 25. Ci si renda conto che $(\mathbb{R}; \mathbb{R} \setminus \{0\}, /)$ e $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, /)$ non sono la stessa struttura algebrica.

◊

Esercizio 26. a) Si consideri la seguente funzione:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n);$$

dimostrare che $\cdot$ è un'operazione esterna ad $\mathbb{R}^n$ di dominio operazionale $\mathbb{R}$.

b) Si consideri la seguente funzione:

$$\begin{gathered} \forall \lambda \in \mathbb{R}, p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m + \ldots \in \mathbb{R}[x], \\ \lambda \cdot p = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \ldots + \lambda a_m x^m + \ldots; \end{gathered}$$

dimostrare che $\cdot$ è un'operazione esterna ad $\mathbb{R}[x]$ di dominio operazionale $\mathbb{R}$.

c) Costruire un'operazione esterna analoga alla precedente su $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$, ove $d \geq 0$.

Definizione 27. Sia $(S, *, e)$ una struttura algebrica unitaria, con elemento neutro e. Un elemento $x \in S$ si definisce *invertibile* se:

$$\exists y \in S \mid x * y = y * x = e,$$

e y si denomina *elemento inverso di x*. Per semplicità l'elemento inverso di x si denoterà $-x$ o x^{-1}.

Nota 28. Essendo $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, /)$ una struttura algebrica non unitaria, nessun suo elemento è invertibile.

◊

Esercizio 29. a) Quali sono gli elementi invertibili delle strutture algebriche (unitarie) dell'esempio 16?

b) # Dimostrare che nessun elemento del monoide $(W, *, \text{“ ”})$ dell'esempio 17 è invertibile, eccetto la parola vuota.

c) Dimostrare che ogni elemento dei monoidi commutativi degli esercizi 18, 20 e 21 è invertibile.

Definizione 30. Sia $(G, *, e)$ un monoide (commutativo) con elemento neutro e. Se ogni suo elemento è invertibile, G si definisce *gruppo* (*abeliano*).

Esempio 31. Dagli esercizi 29.a e 29.c si ha che $(\mathbb{Z}, +, 0)$, $(\mathbb{Q}, +, 0)$, $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \cdot, 1)$, $(\mathbb{R}, +, 0)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$, $(\mathbb{R}[x], +, 0)$, $(\mathbb{R}[x]_{\leq d}, +, 0)$, $(\mathbb{R}^n, +, \underline{0}^n)$ sono gruppi abeliani.

$\triangle$

Definizione 32. Sia Ω un insieme non vuoto. Una funzione $f : \Omega \to \Omega$ biettiva si definisce *permutazione dell'insieme* Ω.

Esercizio 33. Sia $\mathrm{Sym}(\Omega)$ l'insieme delle permutazioni di un insieme (non vuoto) Ω. Dimostrare che $(\mathrm{Sym}(\Omega), \circ, \mathrm{Id}_\Omega)$ è un gruppo; ove $\circ$ è l'usuale composizione di permutazioni.

$(\mathrm{Sym}(\Omega), \circ, \mathrm{Id}_\Omega)$ si definisce *gruppo simmetrico* o *delle permutazioni di* Ω.

Sia $\Omega = \{a_1, \ldots, a_n\}$, in tal caso si indicherà $\mathrm{Sym}(\Omega) = \mathrm{Sym}(n)$. Si consideri la permutazione σ che scambi gli elementi a_i e a_j e lasci fissi gli altri elementi, questa la si indicherà con la scrittura $\sigma = (a_i\, a_j)$. Sia τ la permutazione che sposta a_i in a_j, a_j in a_k, a_k in a_i e fissa gli altri elementi, questa la si indicherà con la scrittura $\tau = (a_i\, a_j\, a_k)$. Per semplicità, si scriverà $\sigma\tau$ piuttosto che $\sigma \circ \tau$. Di conseguenza, sia π la permutazione che scambia a_i con a_j e scambia a_h con a_k, questa la si indicherà con la scrittura $(a_i\, a_j)(a_h\, a_k)$. E così via.

Esercizio 34. Determinare gli insiemi $\mathrm{Sym}(1)$, $\mathrm{Sym}(2)$ e $\mathrm{Sym}(3)$; e dimostrare che i primi due (rispetto alla composizione di funzioni) sono gruppi abeliani, mentre l'ultimo è un gruppo non abeliano.

Più in generale, mimando quanto svolto per $\mathrm{Sym}(3)$, dimostrare che ogni gruppo $\mathrm{Sym}(n)$ per $n \geq 3$ non è abeliano[6].

Definizione 35. Siano $(G, *, e)$ un gruppo ed H un sottoinsieme non vuoto di G. Esso si definisce *sottogruppo di* G se:

a) $e \in H$;

b) $\forall x, y \in H$, $x * y, y * x \in H$ (ovvero H è un sottoinsieme di G *stabile* o *chiuso* rispetto a $*$);

c) $\forall x \in H$, $x^{-1} \in H$.

Esempio 36. Considerato il monoide $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$, il sottoinsieme $(\{-1, 1\}, \cdot, 1)$ è un sottogruppo, mentre $(\{0\}, \cdot)$ è una sua sottostruttura algebrica[7] che non è un suo sottogruppo.

$\triangle$

[6] Non è chiesto di elencare gli elementi di $\mathrm{Sym}(n)$; in quanto si dovrebbero elencare $n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ elementi.

[7] In parole povere, soddisfa la condizione (b) della precedente definizione.

Esercizio 37. Dimostrare che per ogni $1 \leq m < n$, $\mathrm{Sym}(m)$ è un sottogruppo di $\mathrm{Sym}(n)$.

Definizione 38. Una struttura algebrica $(R, +, \cdot, 0, 1)$ con due operazioni interne si definisce *anello* (*commutativo unitario*) se:

a) $(R, +, 0)$ è un gruppo abeliano;

b) $(R, \cdot, 1)$ è un monoide commutativo;

c) $\forall a, b, c \in R$, $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Esempio 39. Dagli esercizi 16, 29.a e 29.c si ha che $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 1, 0)$ è un anello.

$\triangle$

Esercizio 40. # Senza cambiare i nomi dall'esercizio 20, si definisca il prodotto di polinomi alla seguente maniera sintetica:

$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m + \ldots, q = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + \ldots \in \mathbb{R}[x],$$
$$p \cdot q = \sum_k \sum_{i+j=k} a_ib_jx^k \in \mathbb{R}[x],$$

ove il simbolo $\displaystyle\sum_{i+j=k} a_ib_j$ indica che la somma dei pedici dei coefficienti a_i e b_j dev'essere pari a k, e tutti questi prodotti devono essere sommati. Dimostrare che $(\mathbb{R}[x], +, \cdot, 0, 1)$ è un anello.

Definizione 41. Sia $(\mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1)$ un anello tale che $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ sia un gruppo, allora esso si definisce *campo*.

Esempio 42. Dall'esercizio 29.a si ha che $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 1, 0)$ e $(\mathbb{R}, +, \cdot, 1, 0)$ sono campi.

$\triangle$

Esercizio 43. # Sull'insieme $\{0, 1\}$ si considerino le posizioni:

$$0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0,\ 1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1;$$
$$0 \odot 0 = 0 \odot 1 = 1 \odot 0 = 0,\ 1 \odot 1 = 1.$$

Dimostrare che $(\{0, 1\}, \oplus, \odot, 0, 1)$ è un campo.

Definizione 44. Sia $\mathbb{V}$ un insieme non vuoto, su cui siano date un'operazione interna $+$ e un'operazione esterna sinistra $\cdot$ con dominio operazionale $\mathbb{R}$, tale che:

a) $(\mathbb{V}, +)$ sia un gruppo abeliano;

b.1) $\forall \underline{v} \in \mathbb{V}$, $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$;

b.2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{V},\ \lambda \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \lambda \cdot \underline{v} + \lambda \cdot \underline{w}$;

b.3) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \underline{v} \in \mathbb{V},\ (\lambda + \mu) \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v} + \mu \cdot \underline{v}$;

b.4) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \underline{v} \in \mathbb{V},\ (\lambda\mu) \cdot \underline{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \underline{v})$.

La quaterna $(\mathbb{V}, +; \mathbb{R}, \cdot)$ si definisce *spazio vettoriale reale* o *sul campo reale*.

Gli elementi di $\mathbb{V}$ si chiamano *vettori*, il vettore neutro rispetto alla somma si chiama *vettore nullo* e lo si indicherà con $\underline{0}$; gli elementi di $\mathbb{R}$ si chiamano *scalari*.

Esempio 45. Dagli esercizi 18 e 26.a, 20 e 26.b, 21 e 26.c si hanno che, rispettivamente, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$ sono spazi vettoriali reali.

△

Esercizio 46. Dimostrare le precedenti affermazioni.

Nota 47. Si noti che si sono definiti gli spazi vettoriali sul campo reale $\mathbb{R}$, e tale assunzione sarà sottointesa nel séguito.

In generale si possono definire gli spazi vettoriali su un campo; per esempio sul campo dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ o sul campo costruito nell'esercizio 43.

◊

Esercizio 48. # Considerato l'insieme $\mathbb{R}^\infty$ delle successioni di numeri reali $(a_n \in \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}}$. Definite:

$$\forall (a_n), (b_n) \in \mathbb{R}^\infty,\ (a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) \in \mathbb{R}^\infty,$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, (a_n) \in \mathbb{R}^\infty,\ \lambda \cdot (a_n) = (\lambda a_n) \in \mathbb{R}^\infty;$$

dimostrare che $(\mathbb{R}^\infty, +; \mathbb{R}, \cdot)$ è uno spazio vettoriale.

Esercizio 49. Dimostrare che $\mathbb{R}$, con le usuali operazioni di somma e prodotto, è uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$.

Definizione 50. Sia $\mathbb{W}$ un sottoinsieme non vuoto di uno spazio vettoriale $(\mathbb{V}, +; \mathbb{R}, \cdot)$ tale che:

a) $(\mathbb{W}, +)$ sia un gruppo abeliano;

b.1) $\forall \underline{v} \in \mathbb{W},\ 1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$;

b.2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{W},\ \lambda \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \lambda \cdot \underline{v} + \lambda \cdot \underline{w}$;

b.3) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \underline{v} \in \mathbb{W},\ (\lambda + \mu) \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v} + \mu \cdot \underline{v}$;

b.4) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \underline{v} \in \mathbb{W},\ (\lambda\mu) \cdot \underline{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \underline{v})$.

La quaterna $(\mathbb{W}, +; \mathbb{R}, \cdot)$ si definisce *sottospazio vettoriale* di $\mathbb{V}$.

Esempio 51. Dalla definizione e dalle proprietà di spazio vettoriale $\mathbb{V}$[8] si che $\{\underline{0}\}$ e $\mathbb{V}$ medesimo sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{V}$; essi sono detti *sottospazi banali*, e il primo si chiama anche *sottospazio nullo*.

△

Esercizio 52. a) Dimostrare che $\mathbb{Q}$ non è un sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{R}$.

b) # Sull'insieme $]0,1[$ si consideri la funzione

$$f : t \in]0,1[\to \tan\left(\pi\left(t - \frac{1}{2}\right)\right) \in \mathbb{R},$$

dimostrare che f è una funzione biettiva.

Date le seguenti posizioni:

$$\begin{gathered}\forall s,t \in]0,1[,\ s \oplus t = f^{-1}(f(s) + f(t)),\\ \forall t \in]0,1[, \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \odot t = f^{-1}(\lambda f(t));\end{gathered}$$

dimostrare che $(]0,1[, \oplus; \mathbb{R}, \odot)$ è uno spazio vettoriale, ma non è un sottospazio vettoriale di $(\mathbb{R}, +; \mathbb{R}, \cdot)$.

c) # Ripetere il punto precedente con la funzione:

$$g : t \in]0,1[\to \ln(-\ln(t)) \in \mathbb{R}.$$

d) # Quali sono gli i vettori nulli dei precedenti spazi vettoriali?

e) # Sia $\mathbb{R}^{(\infty)}$ l'insieme delle successioni di numeri reali *definitivamente costanti a* 0, cioè:

$$(a_n) \in \mathbb{R}^{(\infty)} \iff \exists m \in \mathbb{N}_{\geq 0} \mid \forall i \geq m,\ a_i = 0.$$

Dimostrare che $\mathbb{R}^{(\infty)}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^\infty$.

Nota 53. A partire dagli esercizi 52.a, .b e .c riflettere sulla definizione 50.

◊

Esercizio 54. Sia $\mathbb{W}$ un sottoinsieme non vuoto di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$. Dimostrare che esso è un sottospazio vettoriale se e solo se:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{W},\ \lambda\underline{v} + \mu\underline{w} \in \mathbb{W}.$$

Suggerimento: utilizzare gli assiomi e le proprietà di spazio vettoriale.

[8] Si rammenta che c'è una distinzione formale tra tali concetti; e i futuri esaminandi la dovranno sapere.

Esercizio 55. Evincere dal precedente esercizio che l'intersezione $\bigcap_{i\in I}\mathbb{W}_i$ di sottospazi vettoriali $\mathbb{W}_i$ di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$, è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{V}$.

Esercizio 56. a) Si consideri il seguente insieme:

$$\mathrm{Sol(Eq)} = \{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid \mathrm{Eq}\equiv a^1x_1+\ldots+a^nx_n=0\};$$

dimostrare che Sol(Eq) è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

b) Dato il seguente sistema di equazioni lineari

$$S=\begin{cases}\mathrm{Eq.1}\equiv a_1^1x_1+a_1^2x_2+\ldots+a_1^nx_n=0\\ \mathrm{Eq.2}\equiv a_2^1x_1+a_2^2x_2+\ldots+a_2^nx_n=0\\ \vdots\\ \mathrm{Eq.m}\equiv a_m^1x_1+a_m^2x_2+\ldots+a_m^nx_n=0\end{cases};$$

definito $\mathrm{Sol}(S)=\bigcap_{k=1}^{m}\mathrm{Sol(Eq.k)}$, dimostrare che Sol(S) è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 57. a) Siano $\alpha\in\mathbb{R}$ e:

$$S=\{p\in\mathbb{R}[x]\mid p(\alpha)=0\},\ T=\{p\in\mathbb{R}[x]\mid p(\alpha)\neq 0\},$$

quali di questi insiemi è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$? Lo sono entrambi, uno solo o nessuno dei due?

b) Siano $d\geq 1$, $S_{\leq d}=S\cap\mathbb{R}[x]_{\leq d}, T_{\leq d}=T\cap\mathbb{R}[x]_{\leq d}$; cosa si può affermare su questi insiemi?

c) Siano $\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\ldots,\beta_m\in\mathbb{R}$; che condizione bisogna imporre a questi numeri affinché l'insieme

$$\{p\in\mathbb{R}[x]\mid p(\alpha_1)=\beta_1,\ldots,p(\alpha_m)=\beta_m\}$$

sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$?

Exercise 58. Let $\mathbb{V}$ be a vector space and let $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ be the set of linear subspaces of $\mathbb{V}$. Prove that:

a) with respect to the inclusion of sets, $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ is an ordered set, with minimum element $\{\underline{0}\}$ and maximum element $\mathbb{V}$;

b) assuming that $\mathbb{V}$ is not the *null vector space* $\{\underline{0}\}$, $\mathcal{L}(\mathbb{V})\setminus\{\{\underline{0}\}\}$ has infinitely many minimal elements: what are they?

c) under the same hypothesis of the previous point, $\mathcal{L}(\mathbb{V})\setminus\{\mathbb{V}\}$ has infinitely many maximal elements. **Facultative:** what are they?

Exercise 59. Let S be a subset of a vector space $\mathbb{V}$. Without change the notations from the previous exercise, one defines the *linear subspace* $\langle S\rangle$ *of* $\mathbb{V}$ *generated by* S as:

$$\langle S\rangle = \bigcap_{\substack{\mathbb{W}\in\mathcal{L}(\mathbb{V})\\ S\subseteq\mathbb{W}}} \mathbb{W}.$$

Prove that:

a) $\langle S\rangle$ is effectively a linear subspace of $\mathbb{V}$;

b) $\langle S\rangle$ is the minimum element of the ordered set $(\{\mathbb{W}\in\mathcal{L}(\mathbb{V}) \mid S\subseteq\mathbb{W}\}, \subseteq)$;

c) $\langle S\rangle = \{\lambda_1\underline{v}_1 + \ldots + \lambda_n\underline{v}_n \in \mathbb{V} \mid \lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in S\}$;

d) S is a linear subspace of $\mathbb{V}$ *iff*[9] $S = \langle S\rangle$.

Remark 60. # Previous point (c) holds also for infinite sets of vectors.

$\lozenge$

Exercise 61. Let $\{\mathbb{W}_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ a finite set of linear subspace of a vector space $\mathbb{V}$.

1. One defines the *sum of* $\mathbb{W}_i$'s as the linear subspace of $\mathbb{V}$:

   $$\mathbb{W}_1 + \ldots + \mathbb{W}_n = \langle\mathbb{W}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{W}_n\rangle.$$

   Prove that:

   $$\mathbb{W}_1 + \ldots + \mathbb{W}_n = \{\underline{w}_1 + \ldots + \underline{w}_n \in \mathbb{V} \mid \forall i \in \{1,\ldots,n\}, \underline{w}_i \in \mathbb{W}_i\}.$$

2. One says that the sum of $\mathbb{W}_i$'s is *direct* if:

   $$\forall j \in \{1,\ldots,n\},\ \mathbb{W}_j \cap \langle\mathbb{W}_1 \cup \ldots \mathbb{W}_{i-1} \cup \mathbb{W}_{i+1} \cup \ldots \mathbb{W}_n\rangle = \{\underline{0}\},$$

   and one writes $\mathbb{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{W}_n$.

   Prove that:

   $$\forall \underline{w} \in \mathbb{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{W}_n, \dot{\exists}\underline{w}_i \in \mathbb{W}_i \mid \underline{w} = \underline{w}_1 + \ldots + \underline{w}_n.$$

Remark 62. a) Without change the notations, one can write $\langle\mathbb{W}_1, \ldots, \mathbb{W}_n\rangle$ instead of $\langle\mathbb{W}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{W}_n\rangle$.

b) # By remark 60, one can define the (direct) sum of infinitely many linear subspaces of a vector space.

[9] *Iff* is the contraction of the phrase "if and only if".

$\diamondsuit$

Esercizio 63. Utilizzando l'exercise 61 e il remark 62.a dimostrare che $(\mathcal{L}(\mathbb{V}), +)$ è un monoide commutativo, dove:

- $\mathbb{V}$ è uno spazio vettoriale;
- $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ è l'insieme dei sottospazi vettoriali di $\mathbb{V}$;
- $+$ è la somma di sottospazi vettoriali.

Definizione 64. Sia $S = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ un sistema[10] finito di vettori di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$; questi si definisce *libero* o *linearmente indipendente* se:

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

In caso contrario, S si definisce sistema *legato* o *linearmente dipendente*.

Esercizio 65. a) Dimostrare che un sistema di vettori $S = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\} \subsetneq \mathbb{V}$ è libero se e solo se

$$\langle S \rangle = \langle \underline{v}_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle \underline{v}_n \rangle.$$

b) Dimostrare che $\{\underline{0}\}$ è un sistema legato; più in generale, un sistema S di vettori tali che $\underline{0} \in S$ è legato.

c) Fornire un esempio di sistema legato S tale che $\underline{0} \notin S$.

d) Dimostrare che $\{\underline{v}\}$ è un sistema libero sse[11] $\underline{v} \neq \underline{0}$.

Nota 66. # Dai remarks 60 e 62.b, si possono definire liberi i sistemi infiniti di vettori tali che ogni loro sottosistema finito sia libero.

$\diamondsuit$

Esercizio 67. # Ragionare sulla precedente definizione.

Definizione 68. Si definisce *matrice a valori reali di tipo* $m \times n$ *o* $[m, n]$ una funzione $A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$. L'elemento $A((i, j))$ viene indicato semplicemente a_i^j. L'insieme di tali matrici si indica con $\mathbb{R}_m^n$.

Definizione 69. Sia A una matrice, si definisce *matrice trasposta* A^T *di* A la matrice $A^t : (j, i) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\} \to A((i, j)) \in \mathbb{R}$.

[10] Per motivi storici, e non formali, un insieme di vettori sarà denominato in tale maniera.
[11] *Sse* è l'abbreviazione di "se e solo se".

Nota 70. Per comodità notazionale, le matrici saranno indicate nelle seguenti maniere equivalenti:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_m^1 & a_m^2 & \dots & a_m^n \end{pmatrix} = \left(a_i^j\right)_{i\in\{1,\dots,m\}}^{j\in\{1,\dots,n\}} = \left(a_i^j\right).$$

Inoltre, senza cambiare i nomi, si ha che:

$$A^t = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^m \\ b_2^1 & b_2^2 & \dots & b_2^m \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_n^1 & b_n^2 & \dots & b_n^m \end{pmatrix} = \left(b_j^i\right)_{j\in\{1,\dots,n\}}^{i\in\{1,\dots,m\}} \text{ ove } a_i^j = b_j^i.$$

◊

Esercizio 71. a) Sull'insieme $\mathbb{R}_m^n$ si definiscano le seguenti funzioni:

$$A = \left(a_i^j\right), B = \left(b_i^j\right) \in \mathbb{R}_m^n, \lambda \in \mathbb{R},\ A + B = \left(a_i^j + b_i^j\right), \lambda \cdot A = \left(\lambda a_i^j\right).$$

Dimostrare che $(\mathbb{R}_m^n, +; \mathbb{R}, \cdot)$ è uno spazio vettoriale (reale).

b) Definite

$$\forall i \in \{1,\dots,m\}, j \in \{1,\dots,n\},\ E_i^j = \left(e_i^j\right) \mid \begin{cases} e_h^k = 1 \iff (h,k) = (i,j) \\ e_h^k = 0 \iff (h,k) \neq (i,j) \end{cases};$$

dimostrare che le matrici E_i^j determinano una base di $\mathbb{R}_m^n$; e quindi dedurne la dimensione.

c) Dimostrare che la relazione

$$\_^T : A \in \mathbb{R}_m^n \to A^T \in \mathbb{R}_n^m$$

è una funzione.

Definizione 72. Una matrice M di tipo $n \times n$ si definisce *quadrata di ordine* n.

Una matrice quadrata M tale che $M = M^t$ si definisce *simmetrica*.

Una matrice quadrata M tale che $M = -M^t$ si definisce *anti-simmetrica*.

Esercizio 73. Siano $M_s(\mathbb{R}, n)$ ed $M_a(\mathbb{R}, n)$ gli insiemi delle matrici, rispettivamente, simmetriche anti-simmetriche.

a) Dimostrare che tali insiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}_n^n$;

b) determinarne una base e la dimensione, per ciascuno sottospazio vettoriale;

c) dimostrare che $\mathbb{R}^n_n = M_s(\mathbb{R}, n) \oplus M_a(\mathbb{R}, n)$;

d) dimostrare che:

$$\forall M \in \mathbb{R}^n_n,\ M = \frac{1}{2}(M + M^t) + \frac{1}{2}(M - M^t)$$

e $\frac{1}{2}(M + M^t) \in M_s(\mathbb{R}, n)$, $\frac{1}{2}(M - M^t) \in M_a(\mathbb{R}, n)$.

Definizione 74. Una matrice M di tipo $n \times n$ si definisce *diagonale* se $\forall 1 \leq i \neq j \leq n,\ m_i^j = 0$.

Una matrice M di tipo $n \times n$ si definisce *triangolare superiore* se $\forall 1 \leq j < i \leq n,\ m_i^j = 0$.

Una matrice M di tipo $n \times n$ si definisce *triangolare inferiore* se $\forall 1 \leq i < j \leq n,\ m_i^j = 0$.

Esercizio 75. Siano $T_s(\mathbb{R}, n)$ ed $T_i(\mathbb{R}, n)$ gli insiemi delle matrici triangolari, rispettivamente, superiori ed inferiori.

a) Dimostrare che tali insiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n_n$;

b) determinarne una base e la dimensione, per ciascuno sottospazio vettoriale;

c) calcolare dimensioni e basi dei loro spazi vettoriali intersezione e somma;

d) evincere dal punto precedente che $T_s(\mathbb{R}, n) \cap T_i(\mathbb{R}, n) = \operatorname{diag}(\mathbb{R}, n)$, l'insieme delle matrici diagonali.

Definizione 76. Sia $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una funzione tra spazi vettoriali. Questa si definisce *applicazione lineare* o *(omo)morfismo di spazi vettoriali* se

a) $\forall \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{V},\ f(\underline{v} + \underline{w}) = f(\underline{v}) + f(\underline{w})$;

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \underline{v} \in \mathbb{V},\ f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$.

Esercizio 77. Dimostrare che un'applicazione tra spazi vettoriali f:

a) è lineare se e solo se:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{V},\ f(\lambda \underline{v} + \mu \underline{w}) = \lambda f(\underline{v}) + \mu f(\underline{w}) \in \mathbb{W}.$$

b) se fosse lineare allora $f(\underline{0}_{\mathbb{V}}) = \underline{0}_{\mathbb{W}}$, e $\ker(f) = f^{-1}(\underline{0}_{\mathbb{W}})$ e $\operatorname{Im}(f)$ sono sottospazi vettoriali, rispettivamente, di $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$.

Esercizio 78. Dimostrare che le seguenti funzioni sono applicazioni lineari di spazi vettoriali, ove al solito $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ sono spazi vettoriali.

a) $f : \underline{v} \in \mathbb{V} \to \underline{0} \in \mathbb{W}$, *applicazione lineare nulla*;

b) $\operatorname{Id}_{\mathbb{V}} : \underline{v} \in \mathbb{V} \to \underline{v} \in \mathbb{V}$, *applicazione lineare identità*;

c) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f_\lambda : \underline{v} \in \mathbb{V} \to \lambda \underline{v} \in \mathbb{V}$, *omotetìa di ragione* λ;

d) $i : \mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}$, *inclusione di sottospazi vettoriali*;

e) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $v_\alpha : p \in \mathbb{R}[x] \to p(\alpha) \in \mathbb{R}$, *valutazione di un polinomio*;

f) $\_^T : A \in \mathbb{R}^n_m \to A^T \in \mathbb{R}^m_n$, *trasposizione*;

g) $D : a_0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x] \to a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} \in \mathbb{R}[x]$, *derivazione dei polinomi*;

h) $I : a_0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x] \to a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 \ldots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} \in \mathbb{R}[x]$, *integrazione dei polinomi*;

i) $\tau_l : (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty \to (a_1, a_2 \ldots, a_{n-1}, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty$, *traslazione sinistra*;

j) $\tau_r : (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty \to (0, a_0, \ldots, a_{n+1}, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty$, *traslazione destra.*

Inoltre, dimostrare che

A) $D \circ I = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[x]} \neq I \circ D$;

B) $\tau_l \circ \tau_r = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^\infty} \neq \tau_r \circ \tau_l$.

Infine, calcolare il nucleo delle precedenti applicazioni lineari.

Esercizio 79. a) Utilizzando la formula *nullità* + *rango*, ove possibile, determinare quali delle precedenti applicazioni lineari sono isomorfismi lineari.

b) Le applicazioni lineari $v_\alpha, D, I, \tau_l, \tau_r$ non sono invertibili: perché?

Esercizio 80. # Dato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{(\infty)}$ definito nell'esercizio 52.e, si consideri la relazione

$$s : ((a_n), (b_n)) \in \mathbb{R}^{(\infty)} \times \mathbb{R}^{(\infty)} \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che questa è una funzione, in particolare un prodotto scalare.

Esercizio 81. # Considerata la funzione

$$\sigma : ((x,y),(t,z)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R},$$

dimostrare che questa è una forma bilineare tale che $\sigma((x,y),(x,y)) = 0$.

σ si chiama *forma simplettica standard di* $\mathbb{R}^2$.

...