Massimi e minimi di una funzione di 2 variabili

Chiamiamo MASSIMO relativo libero per una funzione $z = f(x,y)$ un punto $P_0(x_0,y_0)$ tale $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ per tutti i punti di un intorno di P_0 contenuto nel dominio della funzione; chiamiamo invece MINIMO relativo libero un punto P_0 tale $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ per tutti i punti di un intorno di P_0 contenuto nel dominio della funzione. Se le relazioni valgono non solo in un intorno di P_0, ma su tutto il dominio, allora si parla di estremanti (massimi e minimi) assoluti.

Un MASSIMO o MINIMO vincolato per una funzione di due variabili è un massimo o minimo da ricercarsi non su tutto il dominio ma all'interno del sottoinsieme del dominio che soddisfa l'equazione del vincolo, quindi graficamente è il massimo o il minimo relativo della curva ottenuta dall'intersezione del dominio con la curva del vincolo di equazione $g(x, y) = 0$.

<table>
<tr>
<td>

MASSIMI E MINIMI LIBERI DI UNA FUNZIONE DI 2 VARIABILI (ottimizzazione non vincolata)

Illustriamo, nelle linee generale, due metodi:

a) Il metodo dell'hessiano.
Per il calcolo degli estremanti liberi relativi bisogna trovare le condizioni necessarie e sufficienti qui sotto elencate.

☐ Si risolve il sistema: (condizione necessaria)

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases}$$

e si trovano le coordinate dei punti critici o stazionari tra cui gli eventuali punti di MINIMO e MASSIMO

☐ Si calcola l'Hessiano (determinante della matrice Hessiana, calcolata nel punto critico): (condizione sufficiente)

$$\text{Det}(H(x_0, y_0)) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

☐ Si sostituiscono le coordinate dei punti trovati nel risultato trovato.
☐ Se $\det(H(x_0, y_0)) > 0$ e $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ si ha un massimo relativo.
☐ Se $\det(H(x_0, y_0)) > 0$ e $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ si ha un minimo relativo.

</td>
<td>

Esempio:

$$z = x^2 + y^2 - 2x$$

a) $\begin{cases} z'_x = 2x - 2 = 0 \\ z'_y = 2y = 0 \end{cases}$ → P(1, 0) punto critico

$z''_{xx} = 2$ $\quad z''_{yy} = 2$ $\quad z''_{xy} = z''_{yx} = 0$

H = $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ = 4>0 e poiché $z''_{xx} > 0$ → P è punto di minimo

</td>
</tr>
</table>

☐ Se $\det(H(x_0, y_0)) < 0$ si ha un punto di sella. ☐ Se $\det(H(x_0, y_0)) = 0$ risulta un caso ambiguo e si esamina il comportamento della funzione nell'intorno di P_0 o direttamente o mediante le linee di livello. **b) Il metodo grafico mediante le linee di livello.** Analizzando quest'ultimo metodo si tratta di vedere, dall'andamento delle linee di livello se queste si concentrano in un punto e se, avvicinandosi al punto in cui convergono, i valori del parametro k aumentano o diminuiscono; nel primo caso si tratta di un massimo relativo, nel secondo caso si tratta di un minimo.	**b)** Le linee di livello della funzione, $\begin{cases} z = x^2 + y^2 - 2x \\ z = k \end{cases}$, sono una famiglia di circonferenze di centro C(1,0) e raggio $r = \sqrt{1+k}$, $k \geq -1$. All'aumentare di k si ottengono circonferenze il cui raggio aumenta cioè si allontanano dal punto C quindi il centro sarà punto di minimo.
MASSIMI E MINIMI DI UNA FUNZIONE DI 2 VARIABILI <u>CON VINCOLO</u> ESPRESSO DA UNA EQUAZIONE Sia data la funzione $z = f(x, y)$ con il vincolo v(x,y)=b, espresso come $g(x,y) = 0$, con g=b-v(x,y); I metodi per la determinazione dei massimi e minimi vincolati sono tre: **1) Riduzione a una funzione di una variabile.** Se la funzione che esprime il vincolo $g(x,y)=0$ è esplicitabile in modo semplice rispetto a x o a y conviene esplicitarla e sostituire la variabile nella funzione $f(x,y)$ riconducendosi così ad un problema di massimo o minimo in una sola variabile. In pratica si esplicita il vincolo rispetto ad una variabile e si sostituisce nella funzione ottenendo, così, una funzione in una sola variabile. Se la funzione è una curva nota (ad esempio una parabola) si individuano gli estremi per via elementare (vertice), altrimenti si procede coi metodi dell'analisi eseguendo la derivata prima e studiandone il segno. **2) Metodo delle linee di livello.** Graficamente si osserva che i punti di massimo o di minimo vincolato si hanno in corrispondenza dei punti (x,y) in cui le linee di livello risultano tangenti alla curva che esprime il vincolo. Il metodo grafico per determinare i massimi e minimi vincolati consiste nell' analizzare	**Esempio:** $z = x^2 + y^2$ con vincolo g(x,y)=0: $x + 2y - 4 = 0$ **1)** Esplicitiamo il vincolo rispetto a x → $x = 4 - 2y$ Sostituiamo la x nella funzione obiettivo si ottiene, così, una funzione in una sola variabile. $z = (4 - 2y)^2 + y^2$ cioè $z = 5y^2 - 16y + 16$ Si tratta di una parabola con la concavità rivolta verso l'alto quindi ha min in corrispondenza del vertice: $y_V = -b/a = 8/5$. Sostituendo $z = 16/5$ e $x = 4/5$ Per altra via la condizione necessaria per la presenza di estremanti prevede che $z' = 0$, quindi: $z' = 10y - 16 = 0$ → $y = 8/5$, $z' > 0$ per $y > 8/5$ perciò min . **2)** Le linee di livello della funzione, $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = k \end{cases}$, cioè $x^2 + y^2 = k$ sono circonferenze di raggio $\sqrt{k}$ e di centro $P(0, 0)$. Individuiamo la posizione di tangenza al vincolo $x + 2y - 4 = 0$ imponendo che la distanza della retta dal centro delle circonferenze sia uguale al raggio perciò $\left\lvert \frac{-4}{\sqrt{5}} \right\rvert = \sqrt{k}$, da cui k = 16/5.

l'andamento delle linee di livello ed in particolare *se vi sono punti di tangenza tre le linee di livello e l'equazione del vincolo*. Se si individuano più valori di k al valore max corrisponde il max, al valore min corrisponde il min. Nel caso si ottenga un solo valore occorre stabilire se, avvicinandosi al punto di tangenza, il valore del parametro k aumenta o diminuisce: se aumenta si tratta di un massimo vincolato, se diminuisce si tratta di un minimo vincolato.

3) Metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
(Teorema di Lagrange: se un punto è di minimo o massimo locale per la funzione Lagrangiana non non vincolata, allora è un punto critico per il problema originale)

Se la funzione $g(x,y)$ non è esplicitabile in modo semplice conviene utilizzare il metodo della funzione Lagrangiana:
si introduce la funzione Lagrangiana $L = f(x,y) + \lambda[c - v(x,y)]$,
funzione di tre variabili x, y e λ che risulta uguale alla funzione data nei punti del vincolo (in quanto soddisfano la condizione $g(x;y)=0$) ed i cui punti di massimo o minimo relativo appartengono al vincolo; alla funzione lagrangiana si applica lo studio (ottimizzazione non vincolata) della ricerca dei massimi e minimi relativi per funzioni di tre variabili ed in questo caso l'Hessiano è di ordine 3 e si chiama hessiano orlato, in quanto contiene le derivate parziali seconde della funzione L rispetto a ciascuna delle sue variabili.

Schematicamente:

- ☐ Si considera la funzione Lagrangiana $L = f(x,y) + \lambda g(x,y)$
- ☐ Si imposta il sistema imponendo le derivate parziali uguali a zero: (condizione necessaria)

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases}$$

(questa condizione implica la ricerca di sole soluzioni ammissibili, ovvero che soddisfino i vincoli)

Il sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{16}{5} \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$ ha soluzione $P(4/5, 8/5)$ che risulta essere un punto di minimo vincolato perché possiamo facilmente verificare che il valore di k aumenta dal centro verso la "periferia".

3) $L = x^2 + y^2 - \lambda(x + 2y - 4)$

$$\begin{cases} L'_x = 2x - \lambda = 0 \\ L'_y = 2y - 2\lambda = 0 \\ L'_\lambda = x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = +\lambda/2 \\ y = +\lambda \\ \lambda/2 + 2\lambda - 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4/5 \\ y = 8/5 \\ \lambda = 8/5 \end{cases}$$

$g'_x = 1$, $g'_y = 2$,

$L''_{xx} = L''_{yy} = 2$, $L''_{xy} = L''_{yx} = 0$

$$\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8 - 2 = -10$$ → il punto è di minimo vincolato

Esso e' ottenuto derivando la funzione Lagrangiana rispetto la variabili x,y e λ. Risolto tale sistema si trovano i punti critici della funzione Lagrangiana, tra cui ci saranno gli eventuali punti di minimo e massimo vincolati del problema originale. ☐ Si calcola il determinante hessiano orlato: (condizione sufficiente) $$\det \overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix}$$ valutato nei punti critici del tipo (x_0 ,y_0, λ_0). Calcolato tale determinante e sostituite le coordinate dei punti critici trovati possono avvenire i seguenti casi: ☐ det $\overline{H}(x_0,y_0,\lambda_0)$ >0 : il punto risulta di MASSIMO ☐ det $\overline{H}(x_0,y_0,\lambda_0)$ <0 : il punto risulta di MINIMO ☐ det $\overline{H}(x_0,y_0,\lambda_0)$ =0 : caso ambiguo → linee di livello	
MASSIMI E MINIMI DI UNA FUNZIONE DI 2 VARIABILI CON VINCOLI DATI DA DISEQUAZIONI E SISTEMI DI DISEQUAZIONI Si procede eseguendo i seguenti punti: **a)** Si determina, attraverso il metodo grafico, la figura piana soluzione del sistema dei vincoli, cioè si risolve il sistema delle disequazioni individuando la regione o area ammissibile. **b)** Si calcolano i massimi e minimi liberi della funzione $z = f(x,y)$ che sono dentro la regione ammissibile. **c)** Si cercano i punti di minimo e di massimo sulla frontiera. Per far questo si associa ogni singolo vincolo, trasformato in equazione ,alla funzione $z = f(x,y)$, ottenendo altrettanti problemi di max e min vincolato.	**Esempio:** $z = -x^2 - y^2 + 4x + 6y \qquad \begin{cases} x + y \le 6 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ **a)** Si ottiene un triangolo rettangolo i cui vertici sono: O(0,0) , A(6,0) , B(0,6) . (Regione ammissibile limitata e chiusa) **b)** Col metodo delle linee di livello osserviamo che si tratta di una famiglia di circonferenze di centro C(2,3) e raggio $r = \sqrt{13-k}$, $k \le 13$. All'aumentare di k si avvicinano sempre di più al punto C(2,3, 13) che risulta quindi essere un max per la funzione. **c)** Sulla frontiera: $\begin{cases} z = -x^2 - y^2 + 4x + 6y \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} z = -x^2 + 4x \\ y = 0 \end{cases}$ D(2,0,4)

d) Si cerca la quota (cioè il valore di z) dei vertici della regione ammissibile e si confronta con quella dei punti trovati prima. **e)** Si definisce il minimo e massimo assoluto con i risultati ottenuti. **N.B.** Il teorema di **Weierstrass** ci garantisce che, se la regione ammissibile è limitata e chiusa, esistono massimo e minimo assoluto per la funzione che risulta continua.	$\begin{cases} z = -x^2 - y^2 + 4x + 6y \\ x = 0 \end{cases} \begin{cases} z = -y^2 + 6y \\ x = 0 \end{cases}$ E(0,3,9) $\begin{cases} z = -x^2 - y^2 + 4x + 6y \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \begin{cases} z = -2x^2 + 10x \\ y = -x + 6 \end{cases}$ F(5/2, 7/2,25/2) **d)** $z(\mathrm{O}) = 0$, $z(\mathrm{A}) = -12$, $z(\mathrm{B}) = 0$ **e)** Confrontando il valore di z dei punti ottenuti abbiamo che A è minimo assoluto e C è massimo assoluto.

PROGRAMMAZIONE LINEARE

Si parla di PROGRAMMAZIONE LINEARE quando si e' in presenza di:

- una funzione lineare 2 o più variabili indipendenti che si deve massimizzare (se si tratta di funzione ricavo o profitto) oppure minimizzare (se si tratta di funzione costi);
- un insieme di vincoli (tecnici) nelle suddette variabili indipendenti date da equazioni o disequazioni lineari a 2 o più variabili;
- un insieme di vincoli di segno che esprimono la non-negatività delle variabili presenti essendo esse grandezze economiche. I vincoli di segno limitano la ricerca delle soluzioni al primo quadrante del corrispondente piano cartesiano.

Si tratta ancora di ottimizzare una funzione sottoposta a dei vincoli che sono una disequazione o un sistema di disequazioni. Tuttavia, se la funzione obiettivo è lineare, non si e seguono le fasi b) e c) relativi al precedente paragrafo poiché una funzione lineare non ha max e min assoluti all'interno della regione ammissibile, né sulla frontiera. Quindi il massimo ed il minimo di una funzione lineare soggetta a vincoli espressi da equazioni e/o da disequazioni lineari, se esistono, si trovano sui vertici della regione ammissibile, e non al suo interno.

Metodo grafico
Per cercare i MASSIMI o MINIMI di una FUNZIONE lineare in 2 variabili conviene eseguire attentamente i seguenti passaggi:

- Dopo aver tracciato tutte le rette associate alle disequazioni ed equazioni del sistema dei vincoli, se l'intersezione derivante non è un insieme vuoto, si otterrà un poligono (o una regione illimitata) detto regione ammissibile, perché contiene tutte le coppie (x, y) che soddisfano le disequazioni e/o le equazioni del sistema.
- se il dominio dei vincoli e' un poligono si calcolano i valori della funzione data nei vertici del poligono e tra essi il valore massimo se la funzione

Esempio:

Sia data una funzione ricavo di equazione:

$$z = 16000\, x_1 + 10000\, x_2$$

Vogliamo cercare il massimo valore della funzione sottoposta ai vincoli:

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 \le 40 \\ 3\,x_1 + 2\,x_2 \le 60 \\ x_1 \le 18 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Da una semplice rappresentazione scaturisce che il dominio dei vincoli e' un poligono di vertici: O(0,0);A(18,0);B(18,3);C(10,15);D(0,20).
Il calcolo del valore di questi vertici nella funzione data porta ai seguenti risultati:
z(O)=0; z(A)=288000; z(B)=318000;
z(C)=310000; z(D)=200000
Da tali risultati si deduce che la funzione ricavo data si ottimizza nel vertice B ovvero producendo 18 pezzi di x_1 e 3 pezzi di x_2.

data si deve massimizzare, oppure il valore minimo se la funzione data si deve minimizzare. Nel caso particolare in cui, in corrispondenza di due vertici consecutivi, si ottienga lo stesso valore della funzione obiettivo, la teoria della programmazione lineare dimostra che lo stesso valore si ottiene in corrispondenza di un qualsiasi punto compreso tra i due vertici suddetti. ☐ se il dominio dei vincoli e' illimitato si esaminano alcune linee di livello all'interno del dominio dei vincoli per capire se esiste un punto che ottimizza la funzione data. Infine se i valori delle variabili x e y devono essere numeri interi (esempio: numero di pezzi prodotti alla settimana), si considerano nella regione ammissibile solo i punti aventi per coordinate numeri interi.	