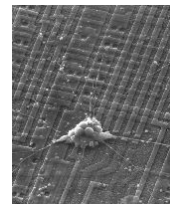


Introduzione all'algebra lineare

Marco Casarotti
(Università di Padova)

Paolo Bouquet
(Università di Trento)



Modificate ed integrate da Giovanni Stea (Università' di Pisa), Settembre 2008

Algebra lineare

Definizione di Matrice:

Tabella di numeri – detti
coefficienti – disposti in
righe e colonne:

indici

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

The diagram shows a 3x3 matrix with elements a_{ij} . The element a_{11} is circled in red, and the element a_{23} is also circled in red. Two arrows originate from the word "indici" above the matrix: one points to the first column (containing a_{11} , a_{21} , a_{31}) and the other points to the third row (containing a_{13} , a_{23} , a_{33}).

Esempi:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & \pi \\ -\pi & 13 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 14 & 1 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 74 & 3 \\ 67 & 32 & 1 & 3 & 99 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 76 \\ 55 & 32 \\ 4 & 3 \\ 56 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad m \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrici quadrate

Matrici quadrate:

Il numero di righe è uguale al numero di colonne: $A \ m \times \ m$

m è chiamato *ordine* della matrice

Esempio di matrice
avente ordine 4

$$\begin{pmatrix} 23 & 9 & 79 & 5 \\ 2 & 10 & 1 & 66 \\ 54 & 1 & 43 & 32 \\ 6 & 121 & 1000 & 5 \end{pmatrix}$$

Definizioni

Diagonale principale:

Insieme dei coefficienti
con indice (i, i) con
 $1 \leq i \leq m$

$$\begin{pmatrix} 23 & 9 & 79 & 5 \\ 2 & 10 & 1 & 66 \\ 54 & 1 & 43 & 32 \\ 6 & 121 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Definizioni

Matrici diagonali:

Sono matrici **quadrate** i cui coefficienti **NON**
diagonali sono uguali a 0.

Esempi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 43 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Definizioni

Matrici **scalari**: matrici diagonali in cui tutti i coefficienti diagonali sono tra loro uguali

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrice **identita'**: matrice scalare i cui coefficienti diagonali sono tutti uguali ad 1
Si indica con il simbolo I

Definizioni

- Matrice **trasposta**: una matrice in cui le righe e le colonne sono scambiate:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Vettori

Matrice $1 \times n$: vettore riga (v^T)

$$v^T = (12 \quad 3 \quad \pi \quad -121)$$

Matrice $m \times 1$: vettore colonna (u)

$$u = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ \pi \\ -121 \end{pmatrix}$$

Prodotto di matrice per uno scalare

Prodotto di una matrice per uno scalare: data una matrice A ed uno scalare α , si definisce prodotto scalare la matrice αA tale che:

$$\alpha A = (\alpha a_{mn})$$

$$\alpha = 3 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & -6 & 5 \\ 8 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \alpha A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 & 4 \cdot 3 & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 3 & -6 \cdot 3 & 5 \cdot 3 \\ 8 \cdot 3 & 4 \cdot 3 & 8 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

Definizioni

Si definisce $-A$, la matrice OPPOSTA di A :

$$-A = (-a_{mn})$$

Proprietà del prodotto per uno scalare:

- $1A=A$
 - $0A=0$
 - $(xy)A=x(yA)$
-

Somma di matrici (per componenti)

Date due matrici A e B delle medesime dimensioni, si definisce come loro **somma** la matrice $A+B$ tale che:

$$(a + b)_{mn} = (a_{mn} + b_{mn})$$

La somma di matrici aventi diverse dimensioni NON è definita.

La somma di matrici è commutativa e associativa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 9 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A + B = B + A = \begin{pmatrix} 1+4 & 12+1 & 4+1 \\ 2+6 & 3+3 & 3+2 \\ 9+2 & 6+4 & 9+8 \end{pmatrix}$$

Prodotto scalare di due vettori

Dati un vettore riga v^T ed un vettore colonna u con lo stesso numero di elementi, ovvero rispettivamente $1 \times n$ e $n \times 1$, si definisce **prodotto scalare** il valore (o matrice 1×1):

$$v^T u = v_1 u_1 + \dots + v_n u_n$$

Esempio di prodotto scalare

$$v^T = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)$$

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v^T u = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 1$$

Prodotto di matrici

Siano A e B due matrici tali che il numero di colonne di A sia uguale al numero di righe di B. Definiamo il prodotto di A e B righe per colonne come la matrice C ottenuta eseguendo il prodotto di vettore riga per vettore colonna tra tutte le righe di A e tutte le colonne di B. La matrice C avrà lo stesso numero di righe di A e lo stesso numero di colonne di B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 9 & 7 \\ 7 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

A red box highlights the first row of the first matrix (1, 2, 3, 4) and the first column of the second matrix (4, 5, 7, 8). A red arrow points from the element 3 in the first row to the element 7 in the second row of the second matrix.

$$(1 \ 2 \ 3 \ 4) * \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = a_{11}$$

A red arrow points from the result a_{11} to the element a_{11} in the first row, first column of the 3x3 matrix.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 9 & 7 \\ 7 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

A red box highlights the second row of the first matrix (5, 6, 7, 8) and the first column of the second matrix (4, 5, 7, 8). A red arrow points from the element 7 in the second row to the element 7 in the second row of the second matrix.

$$(5 \ 6 \ 7 \ 8) * \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = a_{21}$$

A red arrow points from the result a_{21} to the element a_{21} in the second row, first column of the 3x3 matrix.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 9 & 7 \\ 7 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$
$$(9 \ 10 \ 11 \ 12) * \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = a_{21} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 9 & 7 \\ 7 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$
$$(1 \ 2 \ 3 \ 4) * \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = a_{12} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 9 & 7 \\ 7 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$(5 \ 6 \ 7 \ 8) * \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = a_{22}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 9 & 7 \\ 7 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$(9 \ 10 \ 11 \ 12) * \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = a_{32}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Prodotto di matrici

- Il prodotto di matrici, in generale, **non e' commutativo**

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

- Il prodotto per una matrice scalare e' commutativo, ed equivale alla moltiplicazione per uno scalare

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 33 \end{pmatrix}$$

Matrice inversa

- Data una matrice **quadrata** A , la sua **matrice inversa**, se esiste, e' la matrice:

$$A^{-1} : \quad A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

- Es:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinante

- Data una matrice quadrata, la sua inversa esiste
se e soltanto se
 - Il **determinante della matrice e' non nullo**
 - L'algoritmo per il calcolo del determinante e' complesso, e non verra' affrontato
-

Matrici e sistemi lineari

- La notazione matriciale e' comoda per rappresentare i sistemi di equazioni **lineari**

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = -5 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A \cdot X = B$$
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Risoluzione di sistemi lineari

- Se la matrice A e' invertibile (devo controllarne il determinante), posso scrivere:

$$A \cdot X = B$$

Se il determinante di A non e' nullo

$$\rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Risoluzione di sistemi lineari

- Dato l'esempio precedente:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = -5 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A \cdot X = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 10$, $x_2 = -15$ e' la soluzione del sistema lineare. Infatti:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$