# Una dimostrazione di consistenza relativa della teoria ZF

Raffaella Cutolo

raffaella.cutolo@unina.it

# Sommario

# È possibile dimostrare che ZF è coerente?

**Teorema di Completezza per teorie del 1° ordine**

$$\mathsf{Con(T)} \iff \exists \mathfrak{M} \,/\, \mathfrak{M} \models \mathsf{T}$$

# È possibile dimostrare che ZF è coerente?

**Teorema di Completezza per teorie del 1° ordine**

$$\mathsf{Con(T)} \iff \exists \mathfrak{M} \,/\, \mathfrak{M} \models \mathsf{T}$$

$$\mathsf{Con(ZF)} \iff \exists \mathfrak{M} \,/\, \mathfrak{M} \models \mathsf{ZF}$$

# È possibile dimostrare che ZF è coerente?

**Teorema di Completezza per teorie del 1° ordine**

$$\mathsf{Con(T)} \iff \exists \mathfrak{M} \,/\, \mathfrak{M} \models \mathsf{T}$$

$$\mathsf{Con(ZF)} \iff \exists \mathfrak{M} \,/\, \mathfrak{M} \models \mathsf{ZF}$$

**Un circolo vizioso**

ZF è coerente se ... ZF è coerente.

# È possibile dimostrare che ZF è coerente?

**2° Teorema di Incompletezza di Gödel per estensioni assiomatiche di PA**

$$\mathsf{Con(T)} \Longrightarrow \nvdash_{\mathsf{T}} \mathsf{Con(T)}$$

# È possibile dimostrare che ZF è coerente?

**2° Teorema di Incompletezza di Gödel per estensioni assiomatiche di PA**

$$\mathsf{Con(T)} \Longrightarrow \nvdash_{\mathsf{T}} \mathsf{Con(T)}$$

$$\mathsf{Con(ZF)} \Longrightarrow \nvdash_{\mathsf{ZF}} \mathsf{Con(ZF)}$$

## È possibile dimostrare che ZF è coerente?

**2° Teorema di Incompletezza di Gödel per estensioni assiomatiche di PA**

$$\mathsf{Con(T)} \Longrightarrow \nvdash_{\mathsf{T}} \mathsf{Con(T)}$$

$$\mathsf{Con(ZF)} \Longrightarrow \nvdash_{\mathsf{ZF}} \mathsf{Con(ZF)}$$

**Daremo una risposta alla seguente domanda**

Esiste una formula $\varphi$ tale che $\mathsf{ZF} \cup \{\varphi\} \vdash \mathsf{Con(ZF)}$?

# Sommario

# La classe $V$

### Definizione

Definiamo per ricorrenza una relazione funzionale $V$ di dominio la classe On degli ordinali:

- $V_0 = \emptyset$;
- $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{P}(V_\beta)\ \forall \alpha \neq 0$.

$$\alpha \leq \beta \Longrightarrow V_\alpha \subseteq V_\beta \Longrightarrow \mathcal{P}(V_\alpha) \subseteq \mathcal{P}(V_\beta)$$
$$\Downarrow$$

- $V_{\alpha^+} = \bigcup_{\beta<\alpha^+} \mathcal{P}(V_\beta) = \bigcup_{\beta\leq\alpha} \mathcal{P}(V_\beta) = \mathcal{P}(V_\alpha)$
- $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{P}(V_\alpha) = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_{\alpha^+} = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$ se $\lambda$ è limite

Poniamo:

$$V = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} V_\alpha$$

# La classe $V$

- $\alpha < \beta \Longrightarrow \alpha^+ \leq \beta \Longrightarrow V_{\alpha^+} = \mathcal{P}(V_\alpha) \subseteq V_\beta \Longrightarrow V_\alpha \in V_\beta$
- $\alpha < \beta \Longrightarrow |V_\alpha| < |\mathcal{P}(V_\alpha)| = |V_{\alpha^+}| \leq |V_\beta| \Longrightarrow V_\alpha \subset V_\beta$

# La classe $V$

- $\alpha < \beta \Longrightarrow \alpha^+ \leq \beta \Longrightarrow V_{\alpha^+} = \mathcal{P}(V_\alpha) \subseteq V_\beta \Longrightarrow V_\alpha \in V_\beta$
- $\alpha < \beta \Longrightarrow |V_\alpha| < |\mathcal{P}(V_\alpha)| = |V_{\alpha^+}| \leq |V_\beta| \Longrightarrow V_\alpha \subset V_\beta$

- $|V_0| = |\emptyset| = 0$; $|V_1| = |\mathcal{P}(V_0)| = |\{\emptyset\}| = 1$
- $|V_2| = |\mathcal{P}(V_1)| = |\{\emptyset, \{\emptyset\}\}| = 2$
- $|V_3| = |\mathcal{P}(V_2)| = |\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}| = 4$
- $|V_4| = |\mathcal{P}(V_3)| = 2^{|V_3|} = 16$; $|V_5| = 2^{16}$; $|V_{n^+}| = 2^{|V_n|}\ \forall n \in \omega$

# La classe $V$

- $\alpha < \beta \Longrightarrow \alpha^+ \leq \beta \Longrightarrow V_{\alpha^+} = \mathcal{P}(V_\alpha) \subseteq V_\beta \Longrightarrow V_\alpha \in V_\beta$
- $\alpha < \beta \Longrightarrow |V_\alpha| < |\mathcal{P}(V_\alpha)| = |V_{\alpha^+}| \leq |V_\beta| \Longrightarrow V_\alpha \subset V_\beta$

- $|V_0| = |\emptyset| = 0$; $|V_1| = |\mathcal{P}(V_0)| = |\{\emptyset\}| = 1$
- $|V_2| = |\mathcal{P}(V_1)| = |\{\emptyset, \{\emptyset\}\}| = 2$
- $|V_3| = |\mathcal{P}(V_2)| = |\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}| = 4$
- $|V_4| = |\mathcal{P}(V_3)| = 2^{|V_3|} = 16$; $|V_5| = 2^{16}$; $|V_{n^+}| = 2^{|V_n|}\ \forall n \in \omega$

**Per ogni ordinale $\alpha$, $V_\alpha$ è un insieme transitivo**

$$V_\alpha \subseteq V_{\alpha^+} = \mathcal{P}(V_\alpha) \Longrightarrow \forall x \in V_\alpha,\ x \subseteq V_\alpha$$

$$\Downarrow$$

**La classe $V$ è transitiva**

$$V(x) \Longleftrightarrow \exists\alpha\,[\mathrm{On}(\alpha) \wedge x \in V_\alpha] \Longrightarrow x \subseteq V_\alpha \subseteq V$$

# La nozione di rango

**Definizione**

Sia $x$ un elemento di $V$. Si dice **rango** di $x$ (in simboli, $\rho(x)$) il minimo ordinale $\alpha$ tale che $x \subseteq V_\alpha$.

- $\forall x \in V$, risulta: $x \in V_\alpha \Longleftrightarrow \rho(x) < \alpha$
- $x \in y \in V \Longrightarrow \rho(x) < \rho(y)$
- $\forall x \in V$, $\rho(x)$ è il più piccolo maggiorante stretto dell'insieme dei ranghi degli elementi di $x$
- $x \in V_\alpha \Longrightarrow \bigcup x \in V_\alpha$ e $\rho(\bigcup x) \leq \rho(x)$
- $x \in V_\alpha \Longrightarrow \mathcal{P}(x) \in V_{\alpha^+}$ e $\rho(\mathcal{P}(x)) = \rho(x)^+$
- Se $\lambda$ è limite, si ha: $x \in V_\lambda \Longrightarrow \mathcal{P}(x) \in V_\lambda$
- $\forall x \subseteq V$, $x \in V \Longrightarrow$ se $V$ fosse un insieme, si avrebbe $\mathcal{P}(V) \subseteq V$, contro il Teorema di Cantor $\Longrightarrow$ $V$ è una classe

# Ordinali in $V$ e cardinalità dei $V_\alpha$

**Teorema**

$\forall \alpha \in \mathrm{On}$, $\alpha \in V$ e $\rho(\alpha) = \alpha$.

- $\alpha \subseteq V_\beta \ \forall \beta \geq \alpha$
- $\alpha \in V_\beta \ \forall \beta \geq \alpha^+$

# Ordinali in $V$ e cardinalità dei $V_\alpha$

**Teorema**

$\forall \alpha \in \mathrm{On}$, $\alpha \in V$ e $\rho(\alpha) = \alpha$.

- $\alpha \subseteq V_\beta \; \forall \beta \geq \alpha$
- $\alpha \in V_\beta \; \forall \beta \geq \alpha^+$

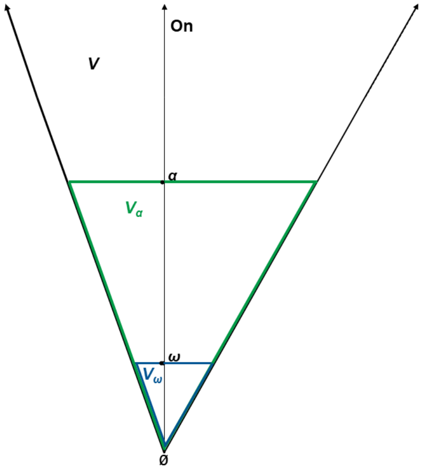
**$|V_\omega| = \aleph_0$**

$$\omega \subseteq V_\omega = \bigcup_{n\in\omega} V_n$$

- $|V_{\omega^+}| = |\mathcal{P}(V_\omega)| = 2^{\aleph_0}$

In ZFC:

- $|V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha \; \forall \alpha \in \mathrm{On}$
- $|V_\alpha| = \beth_\alpha \; \forall \alpha \geq \omega^2$



# L'Assioma di Fondazione (AF)

## Enunciato di AF

In ogni insieme non vuoto esiste almeno un elemento $\mathcal{R}_\epsilon$-minimale.

## AF

$$\forall x\,[x \neq \emptyset \Longrightarrow \exists y \in x\,(y \cap x = \emptyset)]$$

# L'Assioma di Fondazione (AF)

### Enunciato di AF

In ogni insieme non vuoto esiste almeno un elemento $\mathcal{R}_\epsilon$-minimale.

### AF

$$\forall x\,[x \neq \emptyset \Longrightarrow \exists y \in x\,(y \cap x = \emptyset)]$$

### Alcune conseguenze immediate di AF

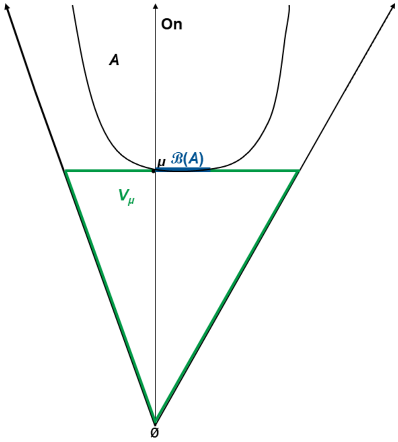
- $\forall x\,(x \notin x)$ ($x \in x \Longrightarrow \{x\}$ non ha elementi $\mathcal{R}_\epsilon$-minimali)
- Per nessuna n-pla $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ si ha $x_1 \in x_2 \in \ldots \in x_n \in x_1$ ($x_1 \in x_2 \in \ldots \in x_n \in x_1 \Longrightarrow \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ non ha elementi $\mathcal{R}_\epsilon$-minimali)
- Per nessuna successione $(x_n)_{n\in\omega}$ si ha $x_{n+1} \in x_n\ \forall n \in \omega$ ($x_{n+1} \in x_n\ \forall n \Longrightarrow \{x_n : n \in \omega\}$ non ha elementi $\mathcal{R}_\epsilon$-minimali)

# L'universo degli insiemi $V$

$$\mathsf{AF} \Longleftrightarrow \forall x\,(x \in V)$$

# L'universo degli insiemi $V$

$$\mathsf{AF} \Longleftrightarrow \forall x\,(x \in V)$$




$$\forall x\,(x \in V) \Longrightarrow \forall x\,\exists \rho(x)$$

- Sia $A$ una classe
- $\{\rho(x) : x \in A\} \neq \emptyset$
- $\exists \min \{\rho(x) : x \in A\} = \mu$
- Si dice **bottom** di $A$ l'insieme $\mathfrak{B}(A) = A \cap V_{\mu^+}$

## Def. di numero cardinale

1. $|x| = \min \{\alpha : x \cong \alpha\}$, se $x$ è ben ordinabile;
2. $|x| = \mathfrak{B}(\{y : x \cong y\})$, altrimenti.

# Sommario

# Cosa si intende per modello di ZF

- Un'interpretazione per la teoria ZF è una coppia ordinata costituita da un insieme $M \neq \emptyset$ e da una relazione binaria $\mathcal{R} = \in^M$ su $M$
- Se tutti gli assiomi di ZF risultano veri in tale interpretazione, si dice che $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{R} \rangle$ - o più semplicemente $M$ - è un modello di ZF
- Ci si può limitare a considerare interpretazioni *standard*, cioè quelle in cui $\mathcal{R}$ è proprio la relazione di appartenenza in $M$
- In particolare, restringeremo l'attenzione agli insiemi $V_\alpha$

# Cosa si intende per modello di ZF

- Un'interpretazione per la teoria ZF è una coppia ordinata costituita da un insieme $M \neq \emptyset$ e da una relazione binaria $\mathcal{R} = \in^M$ su $M$
- Se tutti gli assiomi di ZF risultano veri in tale interpretazione, si dice che $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{R} \rangle$ - o più semplicemente $M$ - è un modello di ZF
- Ci si può limitare a considerare interpretazioni *standard*, cioè quelle in cui $\mathcal{R}$ è proprio la relazione di appartenenza in $M$
- In particolare, restringeremo l'attenzione agli insiemi $V_\alpha$

**Lemma**

$\forall \alpha > 0$,
$V_\alpha \models$ Estensionalità, Vuoto, Unione, Separazione, Fondazione.

# Modelli della teoria Z

**Lemma**

- Se $\alpha$ è un ordinale limite, $V_\alpha \models$ Coppia, Parti.
- $V_\alpha \models$ Infinito $\iff \alpha > \omega$.
- Per ogni $\alpha > 0$, $V_\alpha$ è un modello dell'Assioma della Scelta, se vale, in assoluto, l'Assioma della Scelta.

$$\mathsf{Z} =_{\mathsf{def}} \mathsf{ZF} \setminus \{\mathsf{Rimpiazzamento}\}$$

**Teorema**

Se $\alpha$ è un ordinale limite maggiore di $\omega$, $V_\alpha \models$ Z.

## Modelli della teoria Z

### Lemma

- Se $\alpha$ è un ordinale limite, $V_\alpha \models$ Coppia, Parti.
- $V_\alpha \models$ Infinito $\iff \alpha > \omega$.
- Per ogni $\alpha > 0$, $V_\alpha$ è un modello dell'Assioma della Scelta, se vale, in assoluto, l'Assioma della Scelta.

$$\mathsf{Z} =_{\mathsf{def}} \mathsf{ZF} \setminus \{\text{Rimpiazzamento}\}$$

### Teorema

Se $\alpha$ è un ordinale limite maggiore di $\omega$, $V_\alpha \models$ Z.

- Il più piccolo modello della teoria Z è $V_{\omega+\omega}$
- $V_{\omega+\omega} \not\models$ Rimpiazzamento $\Longrightarrow$ Z $\nvdash$ Rimpiazzamento (Z $\subset$ ZF)

# $V_\omega$ modello dell'Assioma di Rimpiazzamento

$$V_\omega \models \mathsf{Z} \setminus \{\mathsf{Infinito}\}$$

# $V_\omega$ modello dell'Assioma di Rimpiazzamento

$$V_\omega \models \mathsf{Z} \setminus \{\mathsf{Infinito}\}$$

**Una condizione sufficiente per $V_\alpha \models$ Rimpiazzamento**

$$\forall x \forall f\, [x \in V_\alpha \wedge f : x \to V_\alpha \Longrightarrow f[x] = \{f(y) : y \in x\} \in V_\alpha]$$

## $V_\omega$ modello dell'Assioma di Rimpiazzamento

$$V_\omega \models \mathsf{Z} \setminus \{\text{Infinito}\}$$

**Una condizione sufficiente per $V_\alpha \models$ Rimpiazzamento**

$$\forall x \forall f\, [x \in V_\alpha \wedge f : x \to V_\alpha \Longrightarrow f[x] = \{f(y) : y \in x\} \in V_\alpha]$$

**$V_\omega \models$ Rimpiazzamento**

- $x \subseteq V_\omega$, $|x| < \omega \Longrightarrow \forall y \in x$, $\rho(y) < \omega \Longrightarrow \{\rho(y) : y \in x\}$ è un insieme finito di numeri naturali, e dunque ammette un massimo $m < \omega \Longrightarrow \rho(x) = m^+ < \omega \Longrightarrow x \in V_\omega$
- $x \in V_\omega$, $f : x \to V_\omega \Longrightarrow f[x] \subseteq V_\omega$, $|f[x]| < \omega \Longrightarrow f[x] \in V_\omega$

# $V_\omega$ modello dell'Assioma di Rimpiazzamento

$$V_\omega \models \mathsf{Z} \setminus \{\mathsf{Infinito}\}$$

### Una condizione sufficiente per $V_\alpha \models$ Rimpiazzamento

$$\forall x \forall f \, [x \in V_\alpha \wedge f : x \to V_\alpha \Longrightarrow f[x] = \{f(y) : y \in x\} \in V_\alpha]$$

### $V_\omega \models$ Rimpiazzamento

- $x \subseteq V_\omega$, $|x| < \omega \Longrightarrow \forall y \in x$, $\rho(y) < \omega \Longrightarrow \{\rho(y) : y \in x\}$ è un insieme finito di numeri naturali, e dunque ammette un massimo $m < \omega \Longrightarrow \rho(x) = m^+ < \omega \Longrightarrow x \in V_\omega$
- $x \in V_\omega$, $f : x \to V_\omega \Longrightarrow f[x] \subseteq V_\omega$, $|f[x]| < \omega \Longrightarrow f[x] \in V_\omega$

### Indipendenza dell'Assioma dell'Infinito

$$V_\omega \models \mathsf{ZF} \setminus \{\mathsf{Infinito}\} \Longrightarrow \mathsf{ZF} \setminus \{\mathsf{Infinito}\} \nvdash \mathsf{Infinito}$$

# Sommario

# Un punto fisso della funzione $\aleph$

## Definizione (ZFC)

Un cardinale $\kappa > \omega$ si dice (fortemente) **inaccessibile** se e solo se:

1. Per ogni famiglia $(\kappa_i)_{i \in \mathrm{I}}$ di cardinali, risulta:
$$\kappa_i < \kappa \ \forall i \in \mathrm{I} \text{ e } |\mathrm{I}| < \kappa \Longrightarrow \sup \{\kappa_i : i \in \mathrm{I}\} < \kappa.$$
2. Per ogni cardinale $\lambda$, si ha: $\lambda < \kappa \Longrightarrow 2^\lambda < \kappa$.

# Un punto fisso della funzione $\aleph$

### Definizione (ZFC)

Un cardinale $\kappa > \omega$ si dice (fortemente) **inaccessibile** se e solo se:

1. Per ogni famiglia $(\kappa_i)_{i \in \mathrm{I}}$ di cardinali, risulta:
$$\kappa_i < \kappa \ \forall i \in \mathrm{I} \text{ e } |\mathrm{I}| < \kappa \Longrightarrow \sup \{\kappa_i : i \in \mathrm{I}\} < \kappa.$$
2. Per ogni cardinale $\lambda$, si ha: $\lambda < \kappa \Longrightarrow 2^\lambda < \kappa$.

### Se $\kappa$ è inaccessibile, $\kappa$ è un cardinale limite

$$\forall \alpha \in \mathrm{On},\ \aleph_\alpha < \aleph_{\alpha^+} \text{ ma } 2^{\aleph_\alpha} \geq \aleph_{\alpha^+}$$

### Se vale GCH, ogni cardinale limite $\kappa$ soddisfa la (2)

$$\forall \alpha \in \mathrm{On}, \text{ si ha: } \aleph_\alpha < \kappa \Longrightarrow 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha^+} < \kappa$$

### Se $\kappa$ è inaccessibile, $\aleph_\kappa = \kappa$

$$\exists \lambda \text{ limite} \,/\, \kappa = \aleph_\lambda = \sup \{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\} \Longrightarrow \aleph_\lambda = \lambda$$

# Un modello della teoria ZF

**Se $\kappa$ è inaccessibile, $\beth_\kappa = \kappa$**

$$|V_\kappa| = \kappa$$

**Lemma**

Se $\kappa$ è inaccessibile, si ha: $x \in V_\kappa \Longleftrightarrow x \subseteq V_\kappa$ e $|x| < \kappa$.

# Un modello della teoria ZF

**Se $\kappa$ è inaccessibile, $\beth_\kappa = \kappa$**

$$|V_\kappa| = \kappa$$

**Lemma**

Se $\kappa$ è inaccessibile, si ha: $x \in V_\kappa \iff x \subseteq V_\kappa$ e $|x| < \kappa$.

- $\kappa$ è inaccessibile $\Longrightarrow$ in particolare, $\kappa$ è un ordinale limite maggiore di $\omega \Longrightarrow V_\kappa \models \mathrm{Z}$
- $x \in V_\kappa$, $f : x \to V_\kappa \Longrightarrow |f[x]| \leq |x| < \kappa \Longrightarrow f[x] \in V_\kappa$

# Un modello della teoria ZF

**Se $\kappa$ è inaccessibile, $\beth_\kappa = \kappa$**

$$|V_\kappa| = \kappa$$

**Lemma**

Se $\kappa$ è inaccessibile, si ha: $x \in V_\kappa \iff x \subseteq V_\kappa$ e $|x| < \kappa$.

- $\kappa$ è inaccessibile $\Longrightarrow$ in particolare, $\kappa$ è un ordinale limite maggiore di $\omega \Longrightarrow V_\kappa \models \mathsf{Z}$
- $x \in V_\kappa$, $f : x \to V_\kappa \Longrightarrow |f[x]| \leq |x| < \kappa \Longrightarrow f[x] \in V_\kappa$

**Teorema**

Se $\kappa$ è un cardinale inaccessibile, $V_\kappa \models \mathsf{ZF}$.

# Esistono cardinali inaccessibili?

**Assioma di Inaccessibilità (AI)**

Esiste un cardinale inaccessibile.

$$\mathsf{ZF} \cup \{\mathsf{AI}\} \vdash \mathsf{Con(ZF)}$$

# Esistono cardinali inaccessibili?

**Assioma di Inaccessibilità (AI)**

Esiste un cardinale inaccessibile.

$$\mathsf{ZF} \cup \{\mathsf{AI}\} \vdash \mathsf{Con}(\mathsf{ZF})$$

**AI è indipendente da ZF**

Se fosse ZF $\vdash$ AI, si avrebbe $\vdash_{\mathsf{ZF}}$ Con(ZF),
contro il 2° Teorema di Incompletezza di Gödel

# Esistono cardinali inaccessibili?

### Assioma di Inaccessibilità (AI)

Esiste un cardinale inaccessibile.

$$\mathsf{ZF} \cup \{\mathsf{AI}\} \vdash \mathrm{Con}(\mathsf{ZF})$$

### AI è indipendente da ZF

Se fosse $\mathsf{ZF} \vdash \mathsf{AI}$, si avrebbe $\vdash_{\mathsf{ZF}} \mathrm{Con}(\mathsf{ZF})$,
contro il 2° Teorema di Incompletezza di Gödel

$$\mathsf{ZF} \nvdash \mathsf{AI} \iff \mathsf{ZF} \cup \{\neg\mathsf{AI}\} \text{ è coerente} \iff \exists\mathfrak{M} \,/\, \mathfrak{M} \models \mathsf{ZF} \cup \{\neg\mathsf{AI}\}$$

# Esistono cardinali inaccessibili?

### Assioma di Inaccessibilità (AI)

Esiste un cardinale inaccessibile.

$$\mathsf{ZF} \cup \{\mathsf{AI}\} \vdash \mathsf{Con}(\mathsf{ZF})$$

### AI è indipendente da ZF

Se fosse ZF $\vdash$ AI, si avrebbe $\vdash_{\mathsf{ZF}}$ Con(ZF),
contro il 2° Teorema di Incompletezza di Gödel

$$\mathsf{ZF} \nvdash \mathsf{AI} \iff \mathsf{ZF} \cup \{\neg\mathsf{AI}\} \text{ è coerente} \iff \exists \mathfrak{M} \,/\, \mathfrak{M} \models \mathsf{ZF} \cup \{\neg\mathsf{AI}\}$$

### Un modello di ZF ∪ {¬AI}

Se $\theta$ è il minimo cardinale inaccessibile, $V_\theta \models \mathsf{ZF} \cup \{\neg\mathsf{AI}\}$,
essendo $\theta$ il minimo inaccessibile e $\theta \notin V_\theta$

# Sommario

# Grandi cardinali e l'universo $V$