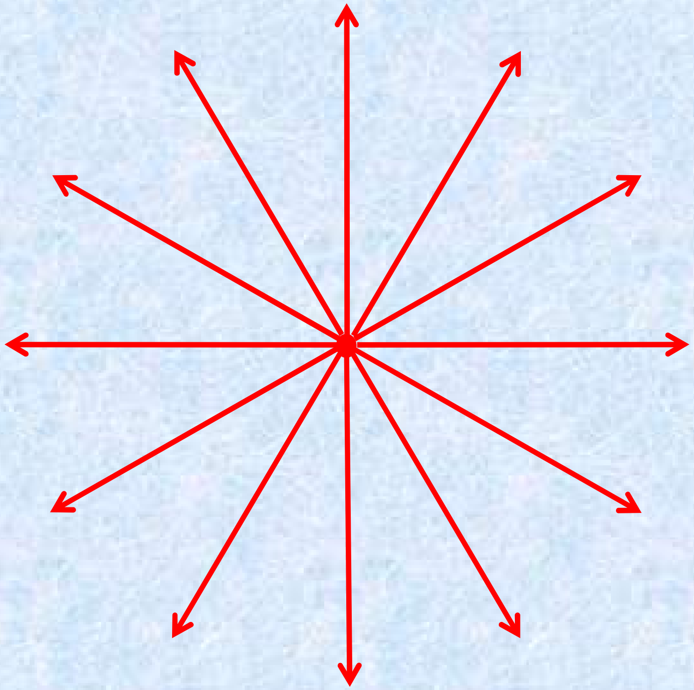
OTTICA GEOMETRICA

C. ALTUCCI

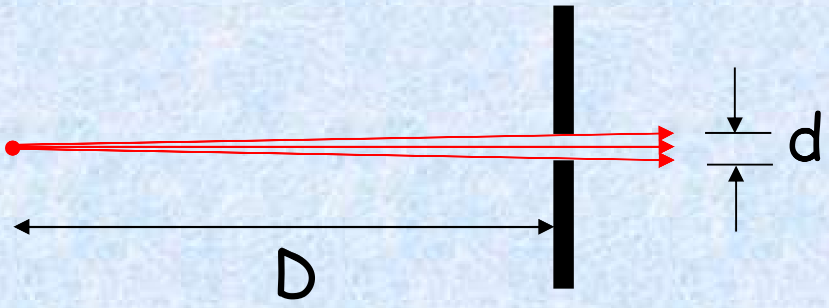
Corso di Fisica Applicata
Laurea triennale in Tecniche di Laboratorio Biomedico
A.A. 2019-2020

IPOTESI

La propagazione luminosa avviene attraverso sottili "pennelli" di luce detti "raggi luminosi" che si approssimano con una linea retta se il raggio si propaga nello stesso mezzo (in un mezzo omogeneo) e a cui è possibile applicare le leggi della geometria euclidea.



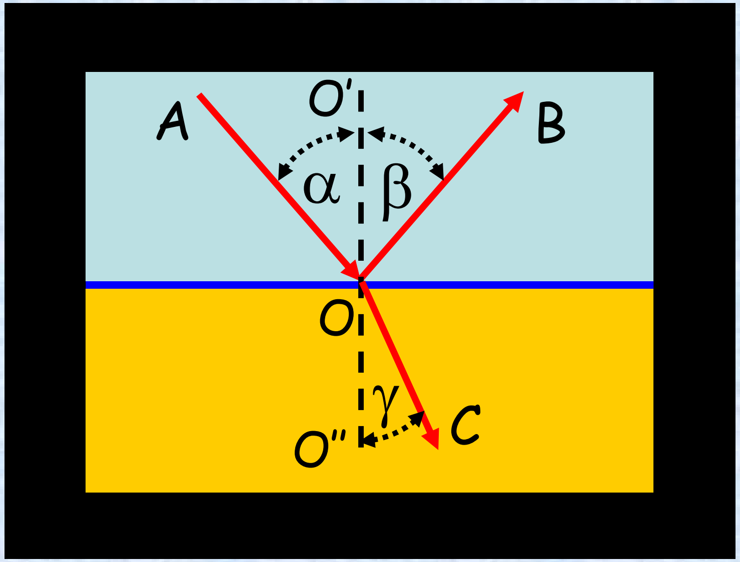
Sorgente puntiforme

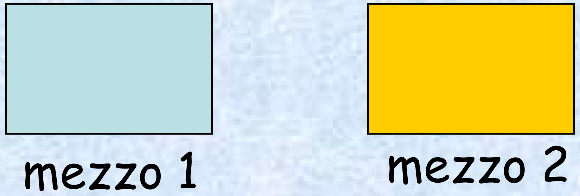


Selezionando un fascio sufficientemente stretto con un diaframma posto a grande distanza dalla sorgente ($D/d \gg 1$) si ottiene con buona approssimazione un fascio parallelo

C. Altucci

LE LEGGI DELLA RIFLESSIONE E DELLA RIFRAZIONE





AO = raggio incidente (luce monocromatica)

O'OO'' = normale nel punto d'incidenza O

α = angolo di incidenza

OB = raggio riflesso β = angolo di riflessione

OC = raggio rifratto γ = angolo di rifrazione

1ª legge della riflessione: AO, O'OO'', OB si trovano nello stesso piano

2ª legge della riflessione: $\alpha = \beta$

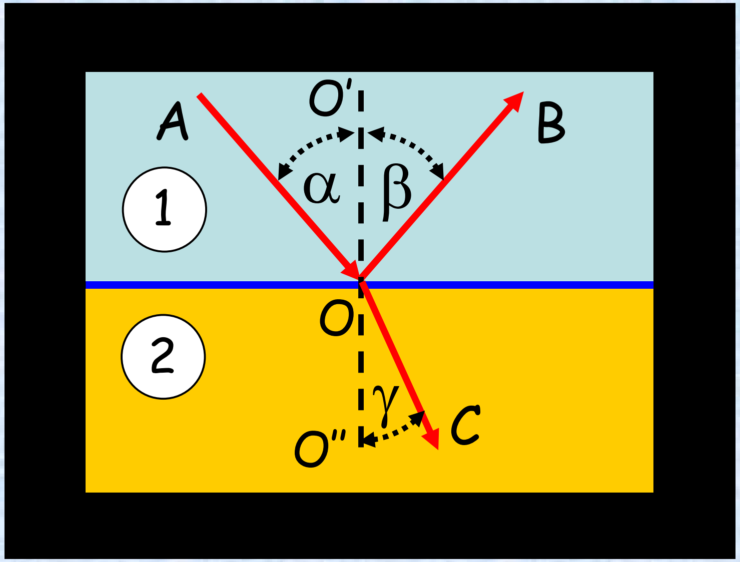
1ª legge della rifrazione: AO, O'OO'', OC si trovano nello stesso piano

2ª legge della rifrazione: $\text{sen}(\alpha) / \text{sen}(\gamma) = n_{12}$

n_{12} = costante che non dipende né da α né da γ, ma solo dai due mezzi a contatto = indice di rifrazione relativo del mezzo 2 rispetto al mezzo 1

C. Altucci

INDICE DI RIFRAZIONE

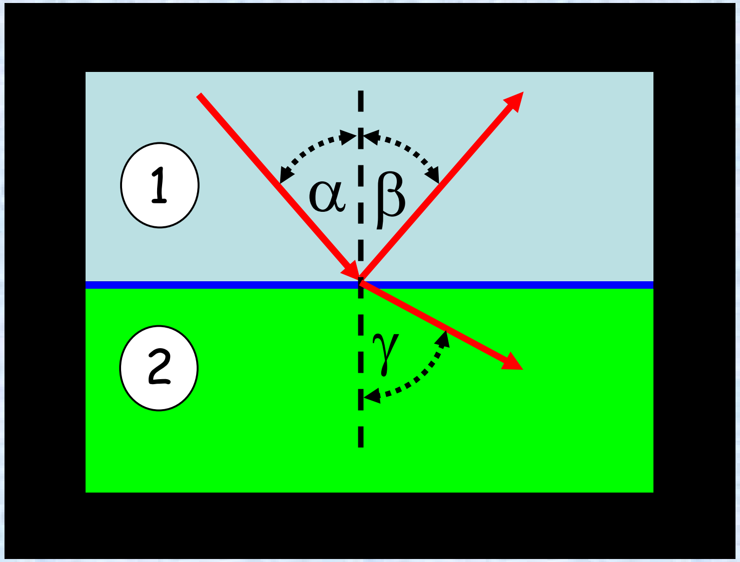


$\text{sen}(\alpha) / \text{sen}(\gamma) = n_{12}$

$\alpha > \gamma \longrightarrow \text{sen}(\alpha) > \text{sen}(\gamma)$

$\text{sen}(\alpha) / \text{sen}(\gamma) > 1 \longrightarrow n_{12} > 1$

Il raggio passa da un mezzo meno rifrangente ad uno più rifrangente.



$\text{sen}(\alpha) / \text{sen}(\gamma) = n_{12}$

$\alpha < \gamma \longrightarrow \text{sen}(\alpha) < \text{sen}(\gamma)$

$\text{sen}(\alpha) / \text{sen}(\gamma) < 1 \longrightarrow n_{12} < 1$

Il raggio passa da un mezzo più rifrangente ad uno meno rifrangente.

INDICE DI RIFRAZIONE RELATIVO

n_{12} = indice di rifrazione del mezzo 2 rispetto al mezzo 1 = indice di rifrazione per il passaggio della luce dal mezzo 1 al mezzo 2

n_{21} = indice di rifrazione del mezzo 1 rispetto al mezzo 2 = indice di rifrazione per il passaggio della luce dal mezzo 2 al mezzo 1

$$\boxed{n_{21} = 1 / n_{12}}$$

INDICE DI RIFRAZIONE ASSOLUTO

L'indice di rifrazione assoluto di un mezzo è l'indice di rifrazione relativo per il passaggio della luce dal vuoto al mezzo considerato.

L'indice di rifrazione assoluto del mezzo 1 è l'indice di rifrazione relativo per il passaggio della luce dal vuoto al mezzo 1:

$$n_1 = n_{v1}$$

INDICE DI RIFRAZIONE ASSOLUTO

L'indice di rifrazione assoluto si può esprimere anche in funzione della velocità di propagazione della luce nel vuoto, c, e della velocità della luce nel mezzo, v_1:

$$n_1 = n_{v1} = c / v_1$$

Poiché la velocità della luce nel vuoto è maggiore della velocità in ogni altro mezzo materiale, l'indice di rifrazione assoluto di qualunque sostanza è sempre maggiore di 1.

RELAZIONE TRA INDICE DI RIFRAZIONE ASSOLUTO E RELATIVO

$$n_{12} = n_2 / n_1 \longrightarrow n_{12} = n_2 / n_1 = (c/v_2)\,(v_1/c) = v_1/v_2$$

La 2ª legge della rifrazione si può scrivere

$$\text{sen}(\alpha) / \text{sen}(\gamma) = n_{12} = n_2/n_1 = v_1/v_2$$

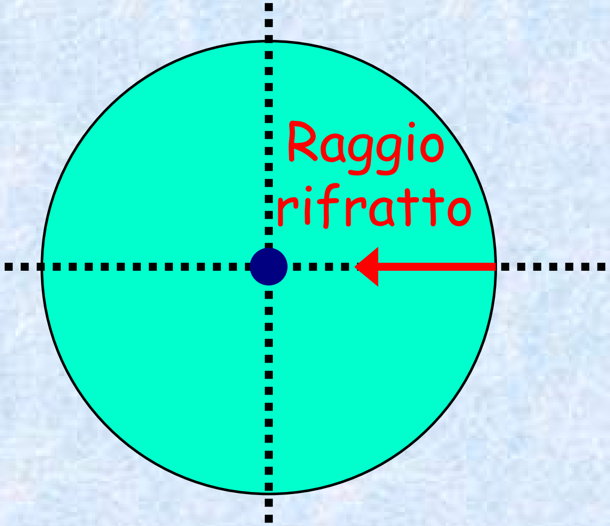
INDICE DI RIFRAZIONE DI ALCUNI MEZZI

Mezzo materiale	Indice di rifrazione	Mezzo materiale	Indice di rifrazione
Aria(c.n di T e p)	1.000029	Normale vetro crown	1.52
Acqua(20°C)	1.33	Cloruro di sodio	1.54
Fluoruro di sodio	1.33	Polistirene	1.55
Acetone	1.36	Bisolfuro di carbonio	1.63
Alcool etilico	1.36	Vetro flint denso	1.65
Soluzione di zucchero(30%)	1.38	Zaffiro	1.77
Quarzo fuso	1.46	Il più denso vetro flint	1.89
Soluzione di zucchero(80%)	1.49	Diamante	2.42

Alcuni indici di rifrazione rispetto al vuoto per λ = 589 nm.

Un mezzo che ha un indice di rifrazione maggiore/minore di un altro si dice che è "otticamente più/meno denso" dell'altro.

Un raggio di luce che viaggia in aria incide sulla superficie di una sfera. Per quale angolo d'incidenza il raggio rifratto passa certamente per il centro della sfera?



$$\text{sen}\,(\alpha) / \text{sen}\,(\gamma) = n_{12}$$

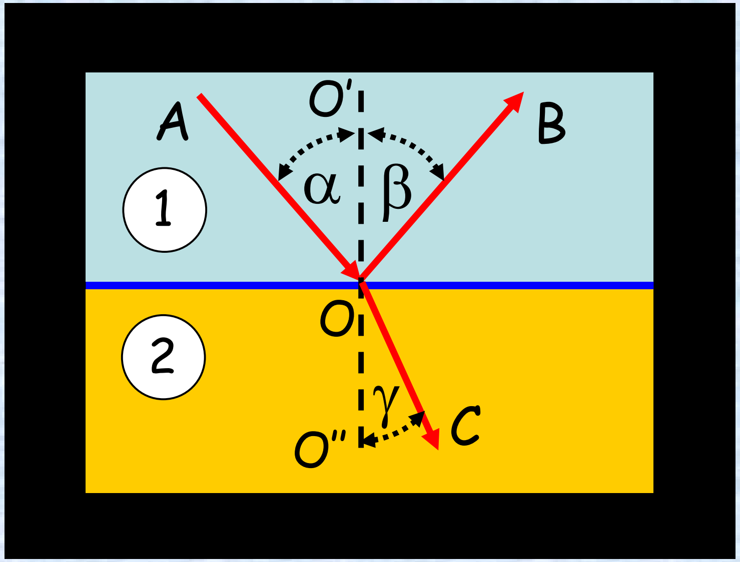
$$\text{sen}\,(\alpha) = \text{sen}\,(\gamma)\, n_{12}$$

Se il raggio rifratto è diretto lungo il raggio della sfera, l'angolo di rifrazione γ vale 0°. Quindi

$$\text{sen}\,(\alpha) = \text{sen}\,(\gamma)\, n_{12} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 0$$

Anche l'angolo d'incidenza è 0° e quindi il raggio incidente è pure diretto lungo il raggio della sfera, cioè perpendicolarmente alla superficie sferica.

Un raggio luminoso monocromatico passa da un mezzo con indice di rifrazione 1.33 (acqua) ad un mezzo con indice di rifrazione 1.5 (vetro). Sapendo che l'angolo d'incidenza è di 45°, quanto vale l'angolo di rifrazione?



La 2ª legge della rifrazione

si può scrivere

$$\mathrm{sen}(\alpha) / \mathrm{sen}(\gamma) = n_{12} = n_2/n_1$$

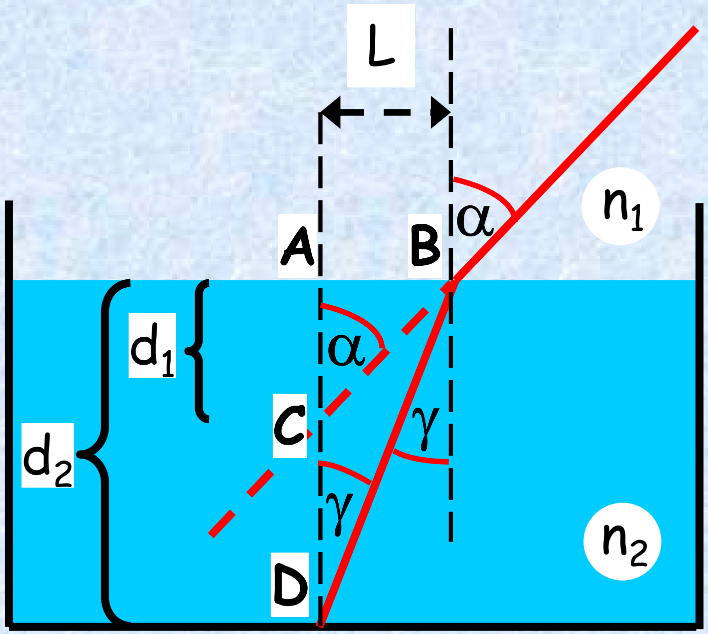
$$\mathrm{sen}(\gamma) = \mathrm{sen}(\alpha)\, n_1/n_2$$

$$\mathrm{sen}(\gamma) = \mathrm{sen}(45°)\, 1.33/1.5$$

$$\mathrm{sen}(\gamma) = (\sqrt{2}/2)(1.33/1.5) = 0.627$$

$$\gamma = \mathrm{arcsen}(0.627) = 38.8°$$

Un osservatore guarda la superficie libera dell'acqua di una piscina profonda 2 m, secondo una direzione che forma un angolo di 20° con la normale. Sapendo che l'indice di rifrazione dell'acqua è uguale a 1.33, di quanto appare sollevato all'osservatore il fondo della piscina?



Nel triangolo rettangolo ABC: $L = d_1 \, tg\,(\alpha)$

Nel triangolo rettangolo ABD: $L = d_2 \, tg\,(\gamma)$

Da cui $d_1 / d_2 = tg\,(\gamma) \,/\, tg(\alpha)$

Se l' angolo α è piccolo così che

$tg(\alpha) \approx sen(\alpha)$ (1)

Anche $\gamma < \alpha$ sarà tale che $tg(\gamma) \approx sen(\gamma)$ (1)

$d_1/d_2 = tg\,(\gamma)/tg(\alpha) = sen\,(\gamma)/sen(\alpha) = n_1/n_2$

$\Longrightarrow$ $d_1 = d_2 \, n_1 / n_2$

$\Delta d = d_2 - d_1 = d_2 - d_2 \, n_1/n_2 = d_2(1 - n_1/n_2) = 2\text{ m}\,(1 - 1/1.33) = 0.50\text{ m}$

Se l'approssimazione (1) non è valida, allora dalla II legge della rifrazione

$sen\,(\gamma) = n_1 \, sen(\alpha) / n_2 \Longrightarrow d_1 / d_2 = tg\,(arcsen\,(n_1 \, sen\alpha / n_2)) / tg(\alpha)$

Un raggio luminoso monocromatico incide sulla superficie di separazione tra un mezzo A ed un mezzo B, formando un angolo di incidenza di 38° ed un angolo di rifrazione di 25°. Lo stesso raggio luminoso, quando incide sulla superficie di separazione tra il mezzo A ed il mezzo C con un angolo d'incidenza di 18°, forma un angolo di rifrazione 23°. Quanto vale l'indice di rifrazione relativo del mezzo B rispetto al mezzo C ?

Per il passaggio della luce dal mezzo A al mezzo B

$$\text{sen } i_A/\text{sen } i_B = n_B/n_A = n_{AB}$$

Per il passaggio della luce dal mezzo A al mezzo C

$$\text{sen } i'_A/\text{sen } i_C = n_C/n_A = n_{AC}$$

Per il passaggio della luce dal mezzo C al mezzo B

$$\text{sen } i_C/\text{sen } i_B = n_B/n_C = (n_B/n_A)\,(n_A/n_C) = (\text{sen } i_A/\text{sen } i_B)\,(\text{sen } i_C \,/\, \text{sen } i'_A)$$

$$n_{BC} = n_B/n_C = (\text{sen } i_A/\text{sen } i_B)\,(\text{sen } i_C \,/\, \text{sen } i'_A) =$$

$$= (\text{sen } 38°/\text{sen } 25°)(\text{sen } 23°/\text{sen } 18°) = 1.8$$

C. Altucci

RELAZIONE TRA INTENSITA' INCIDENTE, RIFLESSA E RIFRATTA

Intensità di un raggio luminoso = energia trasportata dal raggio / (unità di tempo) (unità di area perpendicolare al fascio) = potenza trasportata dal fascio/ unità di area perpendicolare al fascio

Unità di misura dell'intensità luminosa → $J/sm^2 = W/m^2$

I_0 = intensità incidente

I_{Rifl} = intensità riflessa

I_{Rifr} = intensità rifratta

Per incidenza perpendicolare ($\alpha \approx 0$)

$$I_{Rifl}/I_0 = (n_2 - n_1)^2/(n_2 + n_1)^2$$

$$I_{Rifr}/I_0 = (I_0 - I_{Rifl})/\ I_0 = 1 - (I_{Rifl}/\ I_0) = 1 - (n_2 - n_1)^2/(n_2 + n_1)^2$$

Quanto vale l'indice di rifrazione assoluto del ghiaccio, sapendo che la velocità della luce nel ghiaccio è di 2.3 10^8 m/s?

c = velocità della luce nel vuoto

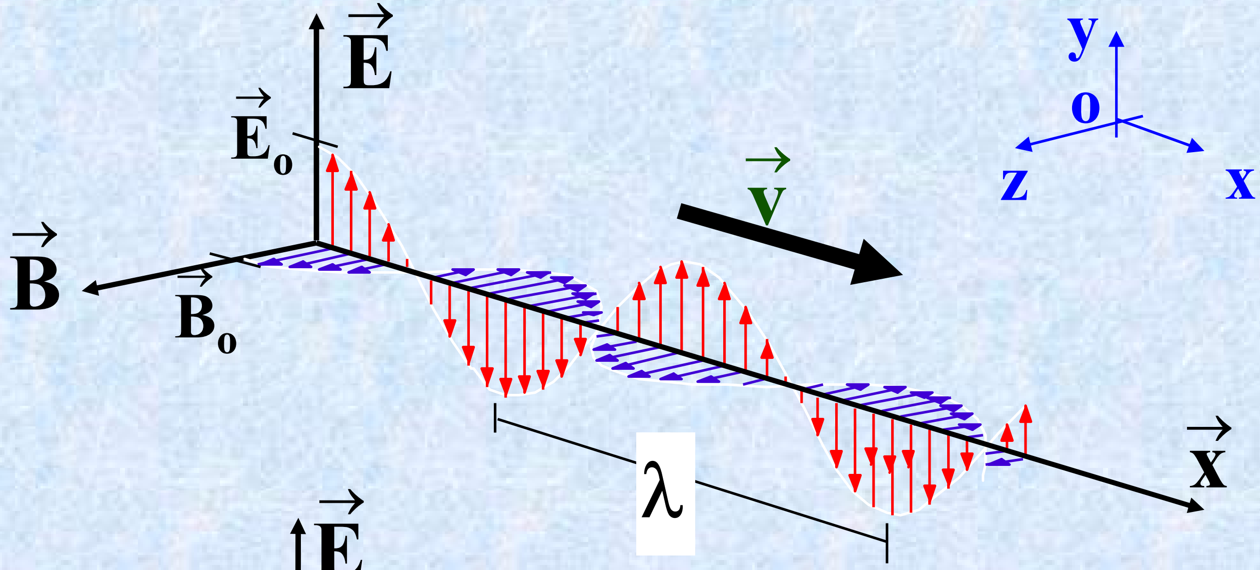
c_g = velocità della luce nel ghiaccio

n = indice di rifrazione assoluto del ghiaccio = $c / c_g > 1$

$n = c / c_g = 2.9 \ 10^8 \text{ m/s} / 2.3 \ 10^8 \text{ m/s} = 1.3$

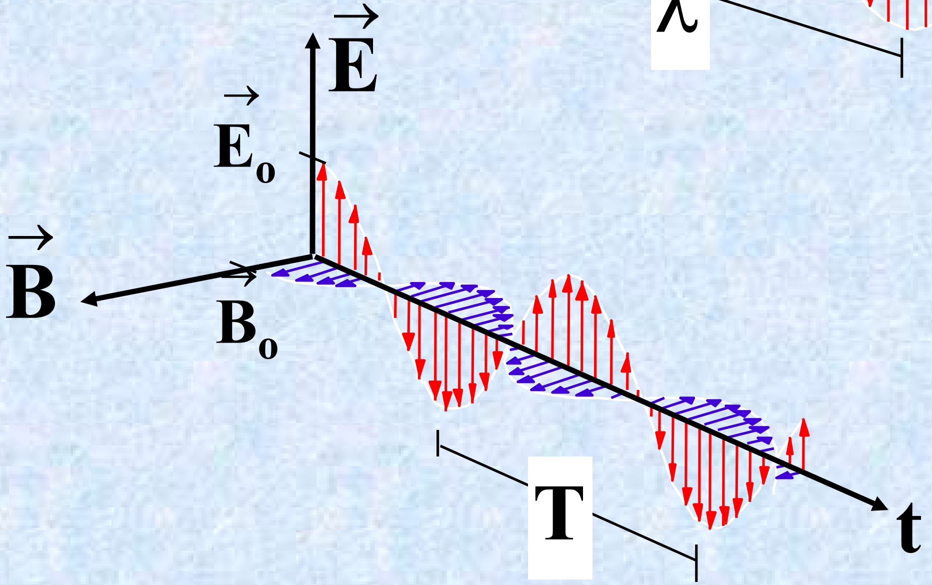
C. Altucci

ONDE ELETTROMAGNETICHE



- $\vec{E} = \vec{E}(x,t)$
- $\vec{B} = \vec{B}(x,t)$

$$v = \frac{\lambda}{T}$$



Questa descrizione è valida nel caso di onde e.m. monocromatiche in cui i vettori **E** e **B** non cambiano nel tempo (onde em polarizzate linearmente).

Un’onda sonora in aria ha una frequenza di 300 Hz e viaggia alla velocità di 330 m/s. Quanto vale la sua lunghezza d’onda?

La relazione tra lunghezza d’onda λ, frequenza ν e velocità di propagazione v (relazione di dispersione) è

$$\boxed{\lambda \, \nu = v}$$

λ = lunghezza d’onda (m^{-1}) S.I.

ν = frequenza= 1/T (sec^{-1} = Hz) S.I.

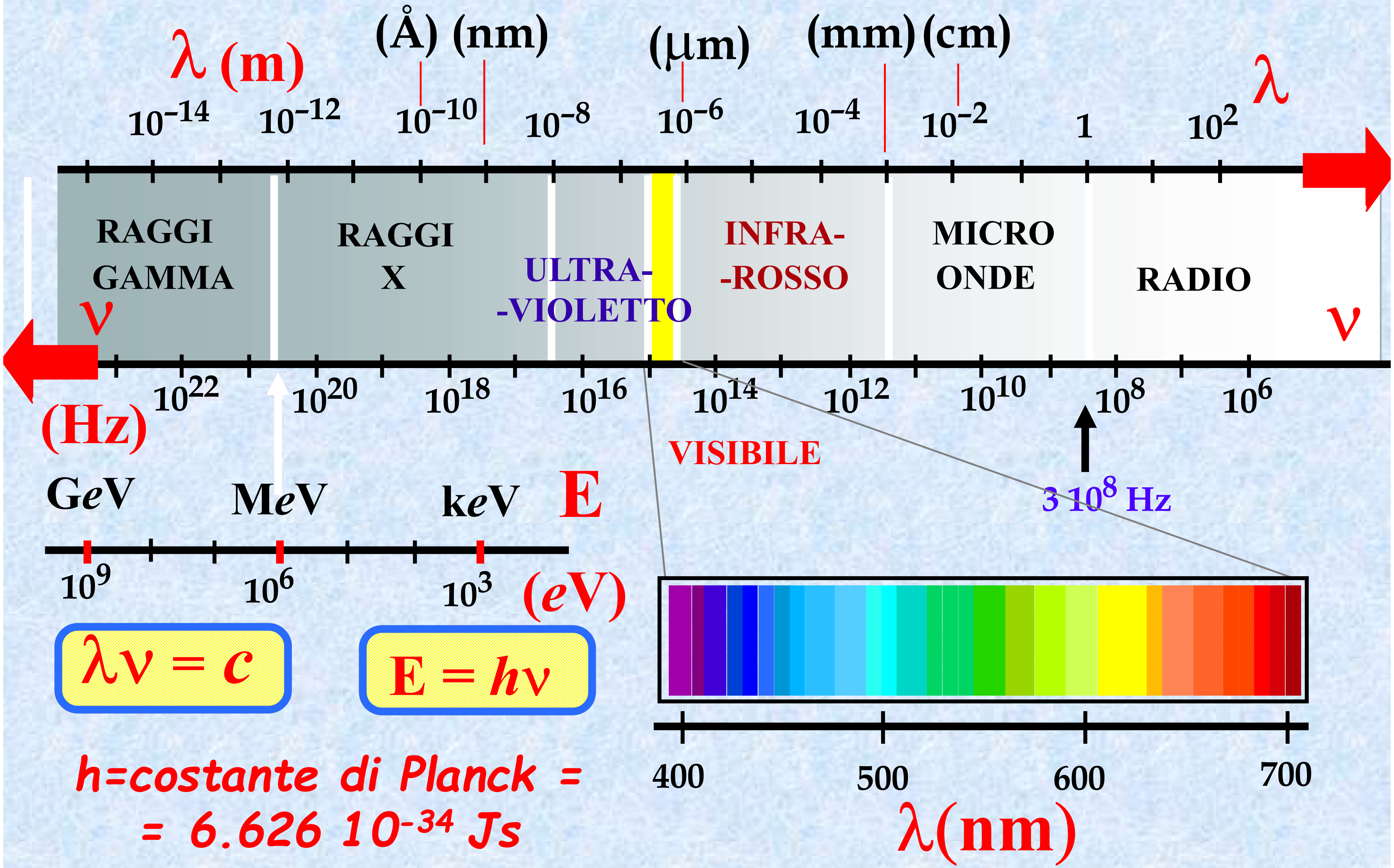
v = velocità di propagazione (m/s) S.I.

$$\boxed{\lambda = v / \nu = 330 \text{ m/s} / 300 \text{ Hz} = 1.1 \text{ m}}$$

Altre unità di misura della lunghezza d’onda:
μm (micron) = 10^{-6} m; nm (nanometro) = 10^{-9} m; Å = 10^{-10} m

C. Altucci

SPETTRO ELETTROMAGNETICO

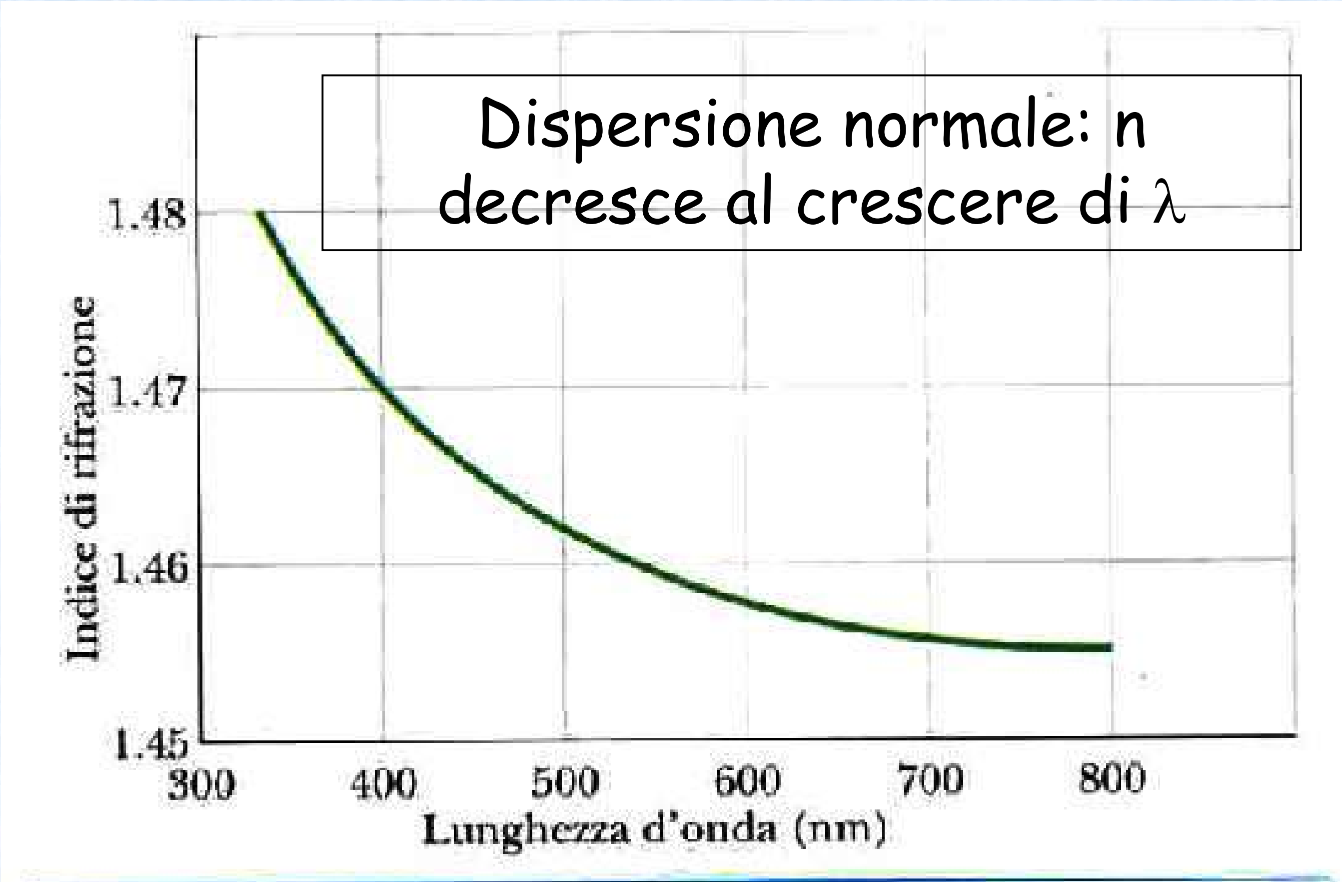


$\lambda\nu = c$

$E = h\nu$

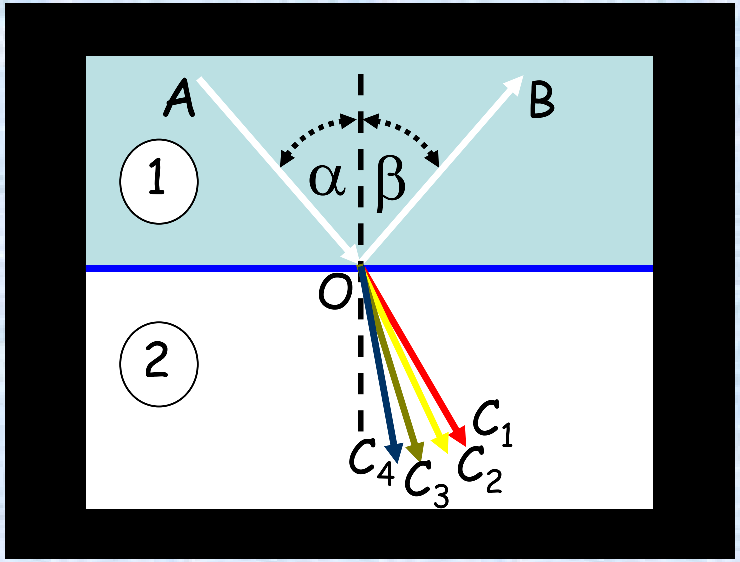
h=costante di Planck =
= 6.626 10^{-34} Js

DIPENDENZA DELL'INDICE DI RIFRAZIONE DALLA FREQUENZA DELLA RADIAZIONE



Indice di rifrazione del quarzo fuso in funzione della lunghezza d'onda

LA DISPERSIONE NORMALE DELLA LUCE



AO = raggio incidente (luce bianca)
OB = raggio riflesso (luce bianca)
OC_1 = raggio rifratto (luce rossa)
OC_2 = raggio rifratto (luce gialla)
OC_3 = raggio rifratto (luce verde)
OC_4 = raggio rifratto (luce blu)

Tutte le radiazioni di lunghezza d'onda diversa contenute nel raggio di luce bianca incidono con lo stesso angolo d'incidenza.

Per la radiazione rossa la legge della rifrazione dà

$$\text{sen}(\gamma) = \text{sen}(\alpha)/n_{12}(\lambda_{rosso})$$

dove $n_{12}(\lambda_{rosso})$ rappresenta il valore dell'indice di rifrazione alla lunghezza d'onda della radiazione rossa.

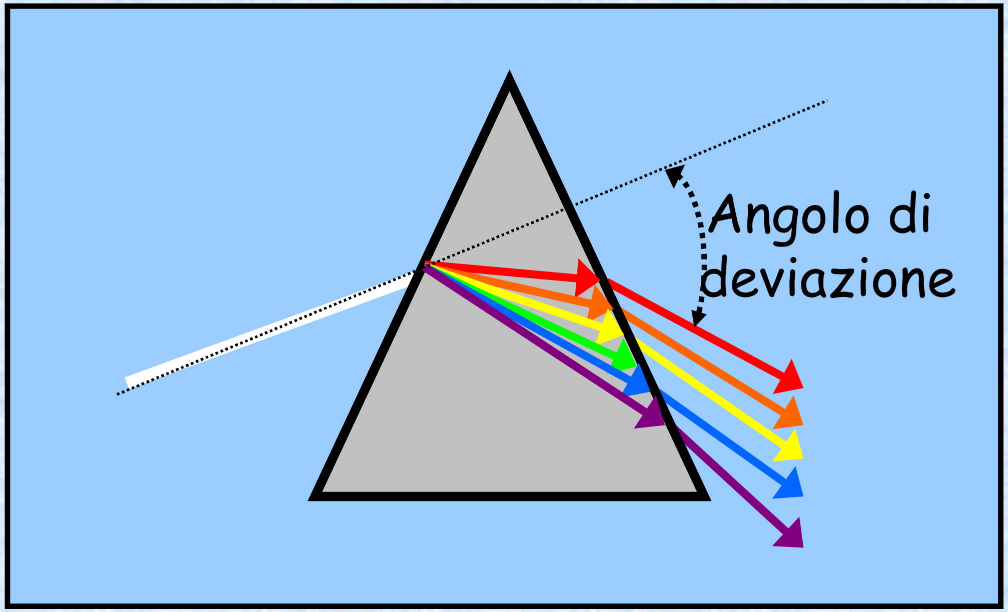
Formule simili si possono scrivere per tutte le lunghezze d'onda. Esse mostrano che l'angolo di rifrazione γ è diverso per le diverse componenti monocromatiche contenute nel fascio di luce bianca (dispersione della luce).

C. Altucci

DIPENDENZA DELL'INDICE DI RIFRAZIONE DALLA FREQUENZA DELLA RADIAZIONE

Nella dispersione anomala l'indice di rifrazione cresce al crescere di λ.

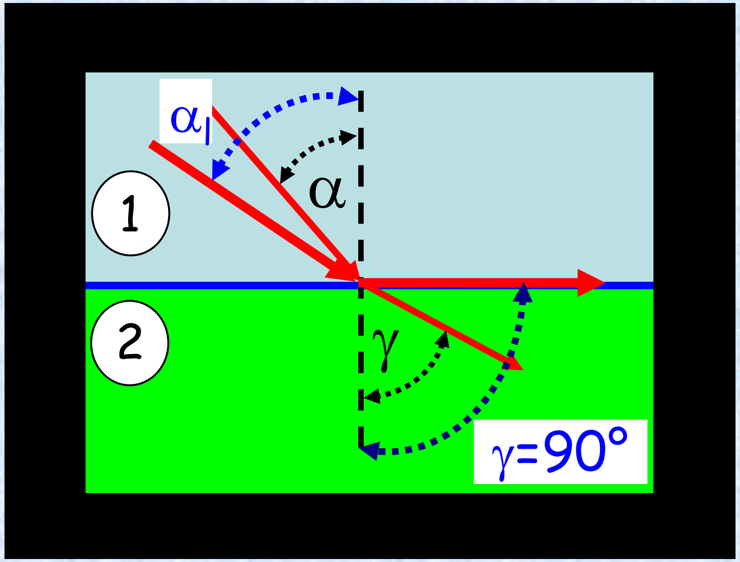
Lo stesso materiale può avere dispersione normale in un certo intervallo spettrale e dispersione anomala in un altro intervallo spettrale.



Prisma di materiale a dispersione normale: la radiazione rossa ha indice di rifrazione minore e quindi viene deviata di meno

C. Altucci

RIFLESSIONE TOTALE



Consideriamo un raggio luminoso monocromatico che passa da un mezzo più rifrangente ad uno meno rifrangente ($n_1 > n_2$).

L'angolo di rifrazione, γ, sarà sempre maggiore dell'angolo d'incidenza, α.

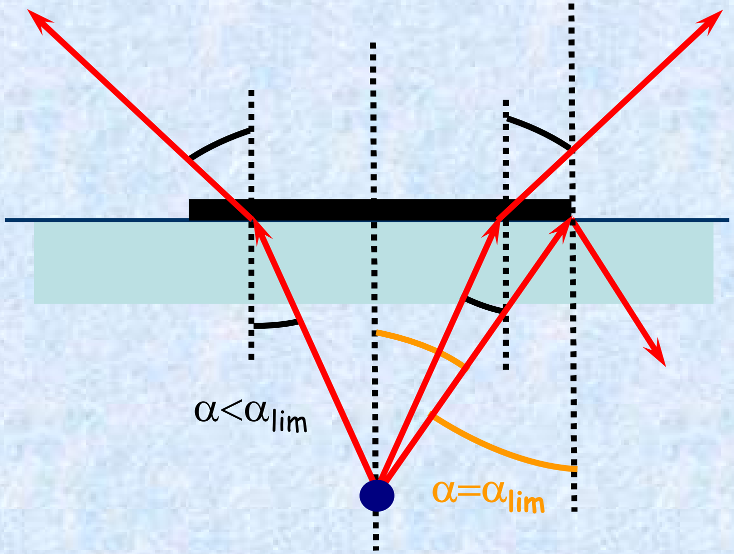
Ad un raggio rifratto con angolo di rifrazione γ = 90 ° (rifrazione radente) corrisponde un angolo d'incidenza α_l<90°.

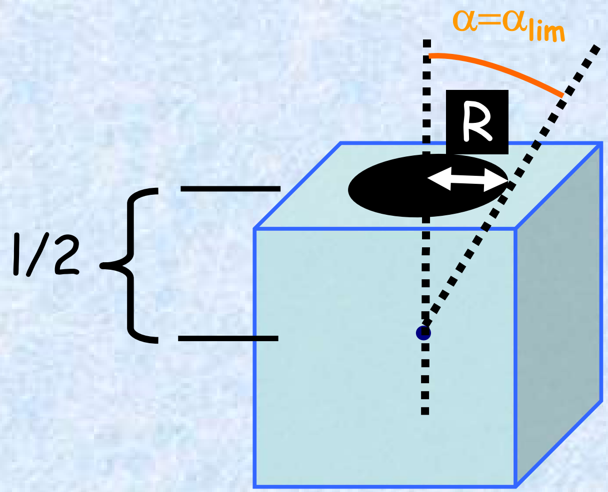
Un raggio incidente con un angolo $\alpha > \alpha_l$ non può essere più rifratto, ma sarà riflesso con le stesse leggi della riflessione normale, ma senza perdite d'intensità (riflessione totale).

Il valore dell'angolo α_l (angolo limite) si può ottenere dalla 2ª legge della rifrazione applicata all'incidenza con l'angolo limite:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}(\alpha) / \text{sen}(\gamma) = n_{12} \\ \alpha = \alpha_l \qquad \gamma = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow \text{sen}(\alpha_l) = n_{12} \Rightarrow \alpha_l = \text{arcsen}(n_{12})$$

Un'impurità puntiforme si trova al centro di un cubo di vetro di spigolo 10 cm. Quale raggio R deve avere un cerchio di cartone da incollare al centro di ciascuna faccia per non vedere l'impurità?
Si consideri che l'angolo limite α_{lim} per il passaggio della luce dal vetro all'aria è di 42°.





Solo i raggi che partono dall'impurità e che vengono trasmessi attraverso la faccia del cubo devono essere assorbiti dal cartoncino. Quelli che subiscono la riflessione totale non devono essere schermati. Per cui

$$R = (l/2)\ \mathrm{tg}\ (\alpha_{lim}) = 5\ \mathrm{cm}\ \mathrm{tg}\ (42°) = 5\ \mathrm{cm} \times 0.9 = 4.5\ \mathrm{cm}$$

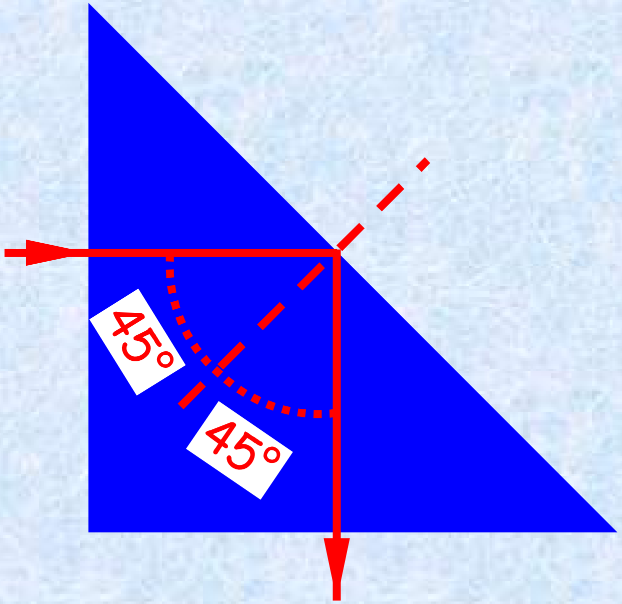
C. Altucci

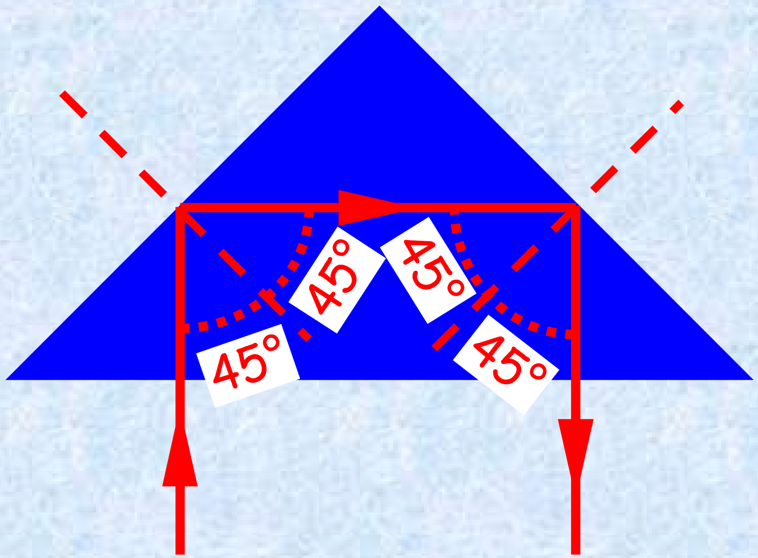
RIFLESSIONE TOTALE

Nel passaggio della luce dal vetro [n = 1.5 (vetro crown) – 1.65 (vetro flint)] all'aria (n ≈ 1) si può avere il fenomeno della riflessione totale per angoli d'incidenza maggiori dell'angolo limite α_l = arcsen (1/1.5) = 41.8 ° per il vetro crown e α_l = arcsen (1/1.65) = 37.3° per il vetro flint.
Angolo limite per il passaggio della luce dall'acqua (n=1.33) all'aria (n ≈ 1) è

$$\alpha_l = \text{arcsen}\ (1/1.33) = 48.8°$$

PRISMI A RIFLESSIONE TOTALE

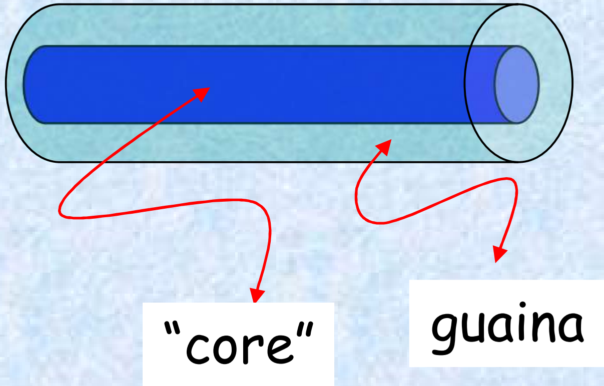




FIBRE OTTICHE

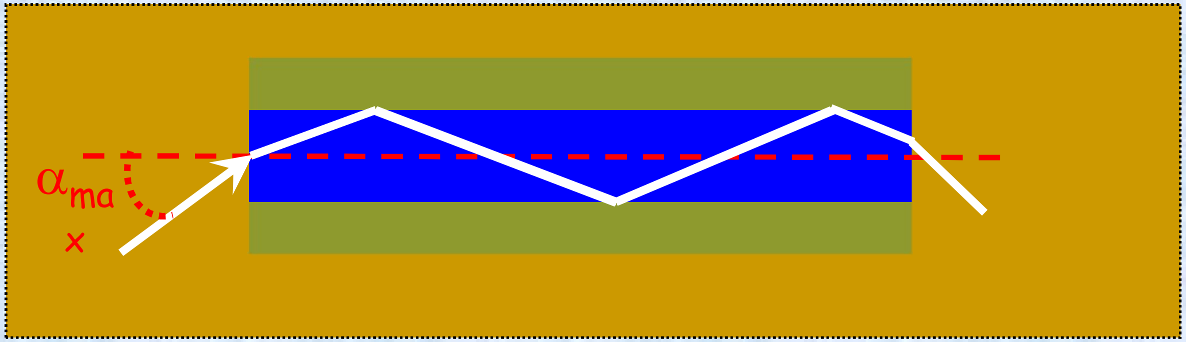
n_c = indice di rifrazione assoluto del core

n_g = indice di rifrazione assoluto della guaina



$n_g/n_c \ll 1 \rightarrow \alpha_l = \text{arcsen}\,(n_g/n_c) \ll 45°$

α_{max} = angolo di accettazione della fibra = angolo massimo che forma un raggio entrante nella fibra affinchè possa uscire dall'altra estremità



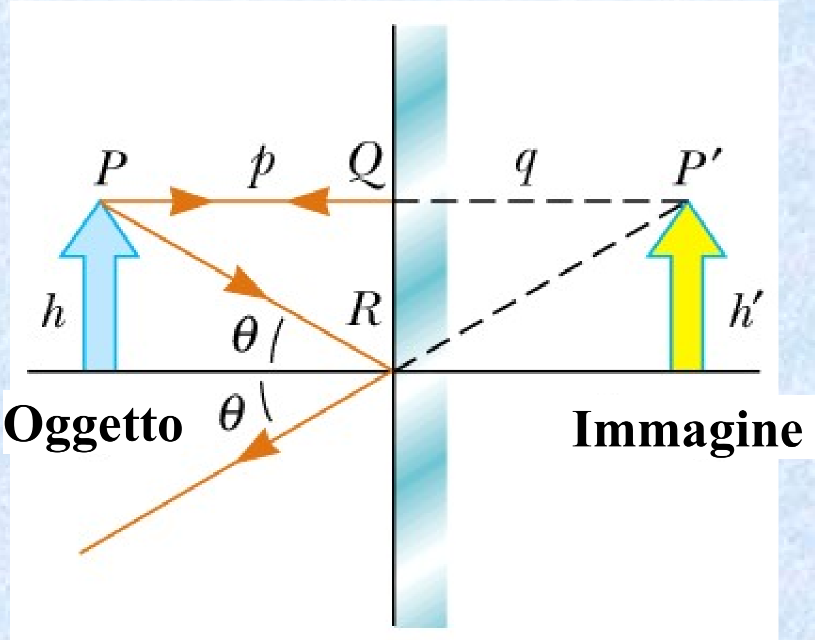
Apertura numerica (NA) = $n_o \text{sen}(\alpha_{max}) = (n_c^2 - n_g^2)^{1/2}$

Generalmente $0.1 \leq NA \leq 1.0$

$NA = 1.0 \rightarrow$ La radiazione incidente con qualsiasi angolo viene trasmessa dalla fibra.

C. Altucci

Specchio piano



M= ingrandimento lineare =
= dimensione lineare immagine / corrispondente dimensione lineare oggetto

$$M \equiv \frac{\text{altezza immagine}}{\text{altezza oggetto}} = \frac{h'}{h} = \frac{q}{p}$$

p = q

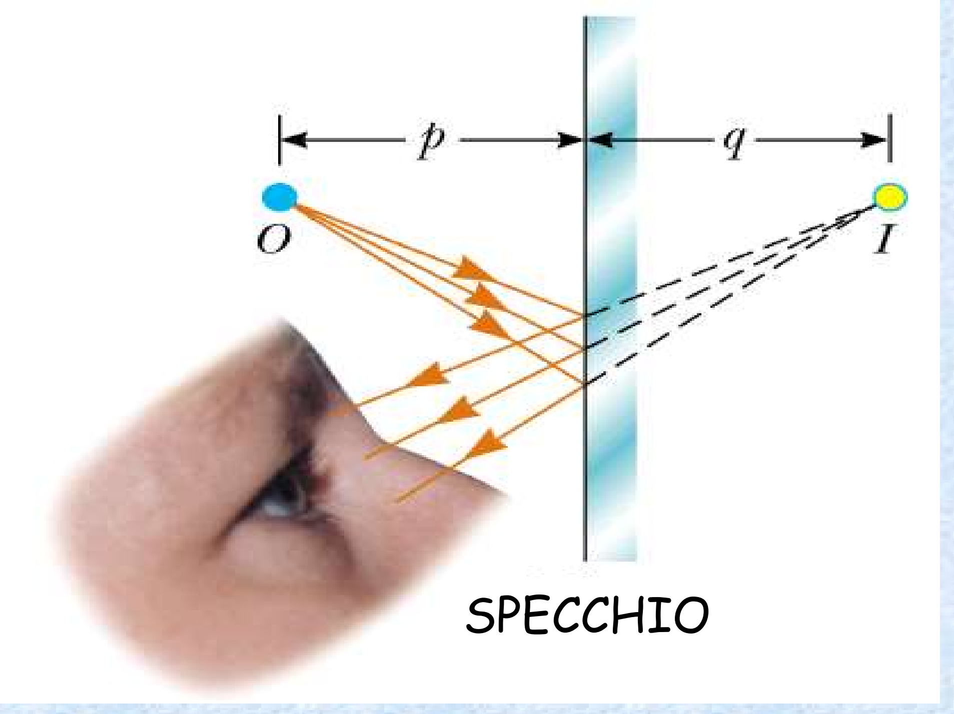
M = 1

Gli specchi piani hanno ingrandimento = 1

- La distanza immagine-specchio è uguale alla distanza oggetto-specchio.
- L'immagine non è ingrandita nè rimpicciolita, è virtuale e non capovolta.

C. Altucci

Specchio piano



O = sorgente puntiforme

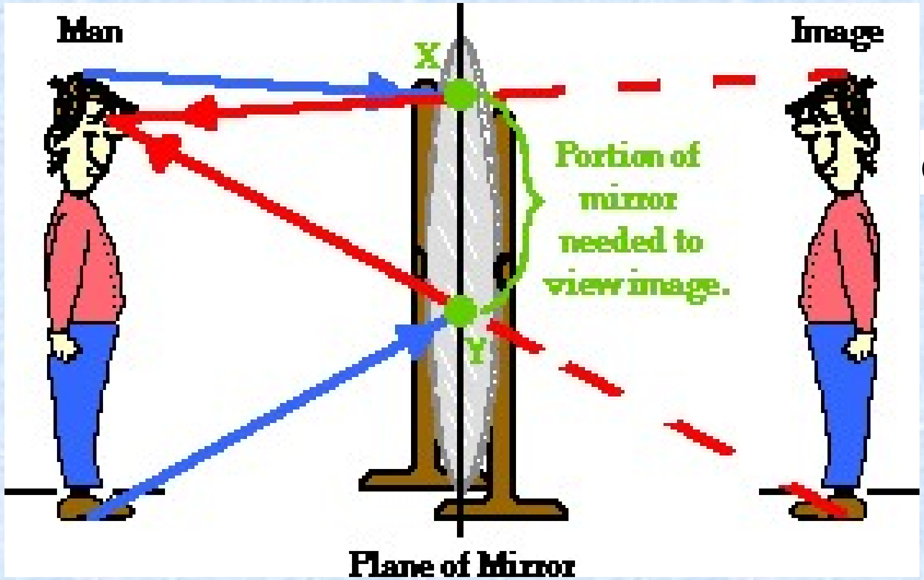
I = immagine

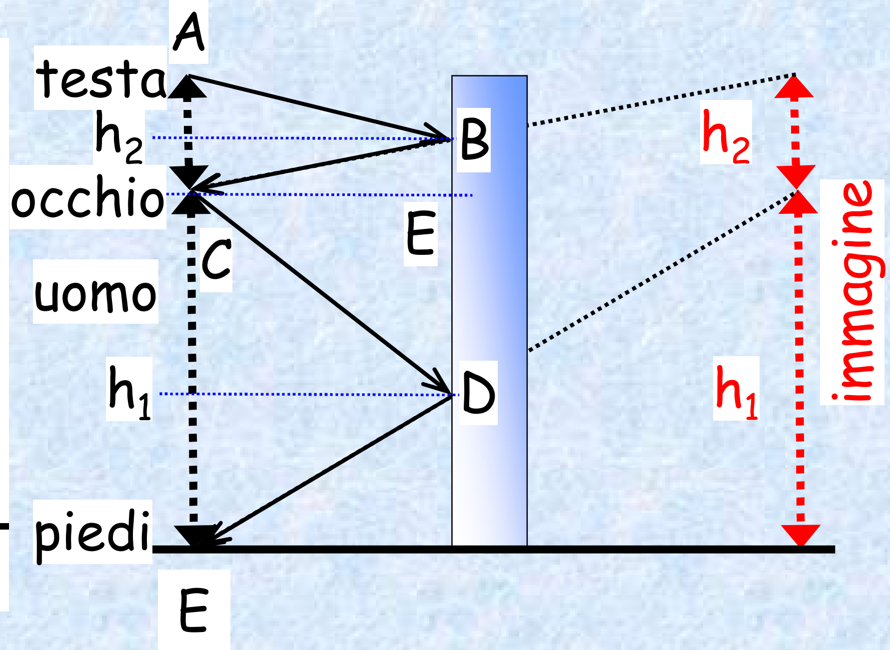
I raggi riflessi divergono, mentre i loro prolungamenti si incontrano nel punto I.

I è l'immagine del punto O e si forma in posizione simmetrica alla sorgente rispetto al piano dello specchio (p =q).

L'immagine formata da uno specchio piano è un'immagine **virtuale**: in essa non c'è effettiva concentrazione di energia luminosa (**immagine reale**), ma tutto va come se i raggi luminosi provenissero dall'immagine, anche se essi non si incontrano effettivamente in essa.

Una persona di altezza 160 cm è in piedi di fronte ad uno specchio piano verticale. Quale deve essere l'altezza minima dello specchio affinché la persona si possa specchiare completamente?





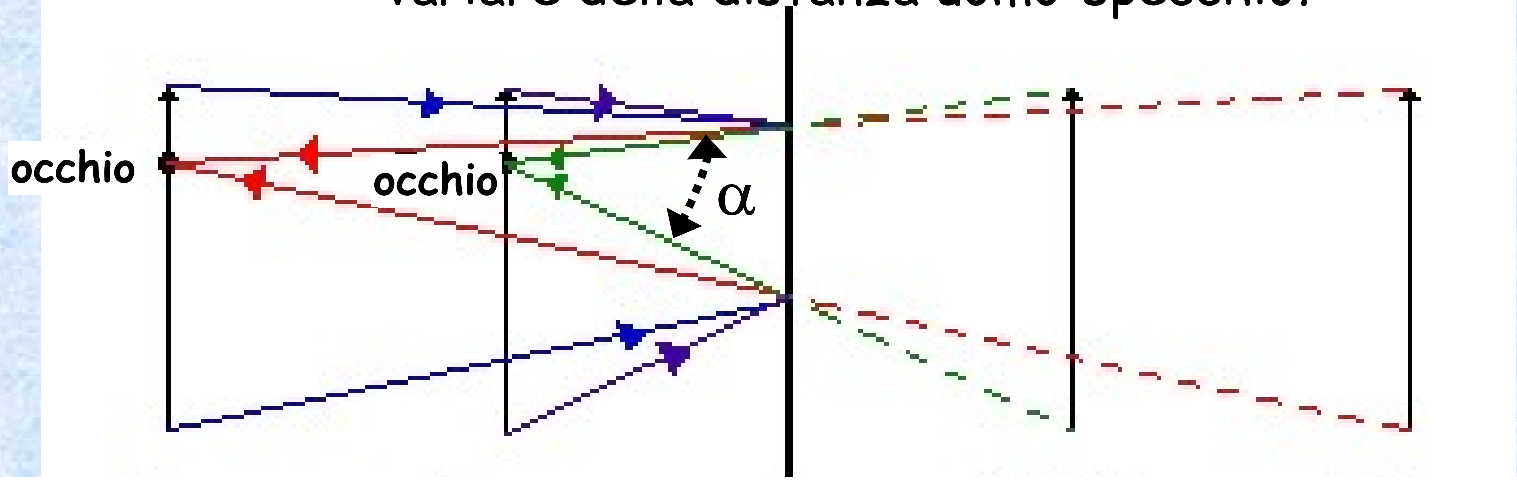
h_1 = altezza base piedi - occhi h_2 = altezza occhi – sommità della testa

$h_1 + h_2 = h$ = altezza dell'uomo

Poiché i due triangoli ABC e CDE sono isosceli, il tratto di specchio BD necessario a formare l'immagine sarà

$$BD = BE + ED = h_2/2 + h_1/2 = (h_1 + h_2)/2 = h/2 = 80 \text{ cm}$$

La porzione di specchio necessaria a formare l'immagine cambia al variare della distanza uomo-specchio?



Uomo in piedi lontano dallo specchio

Uomo in piedi vicino allo specchio

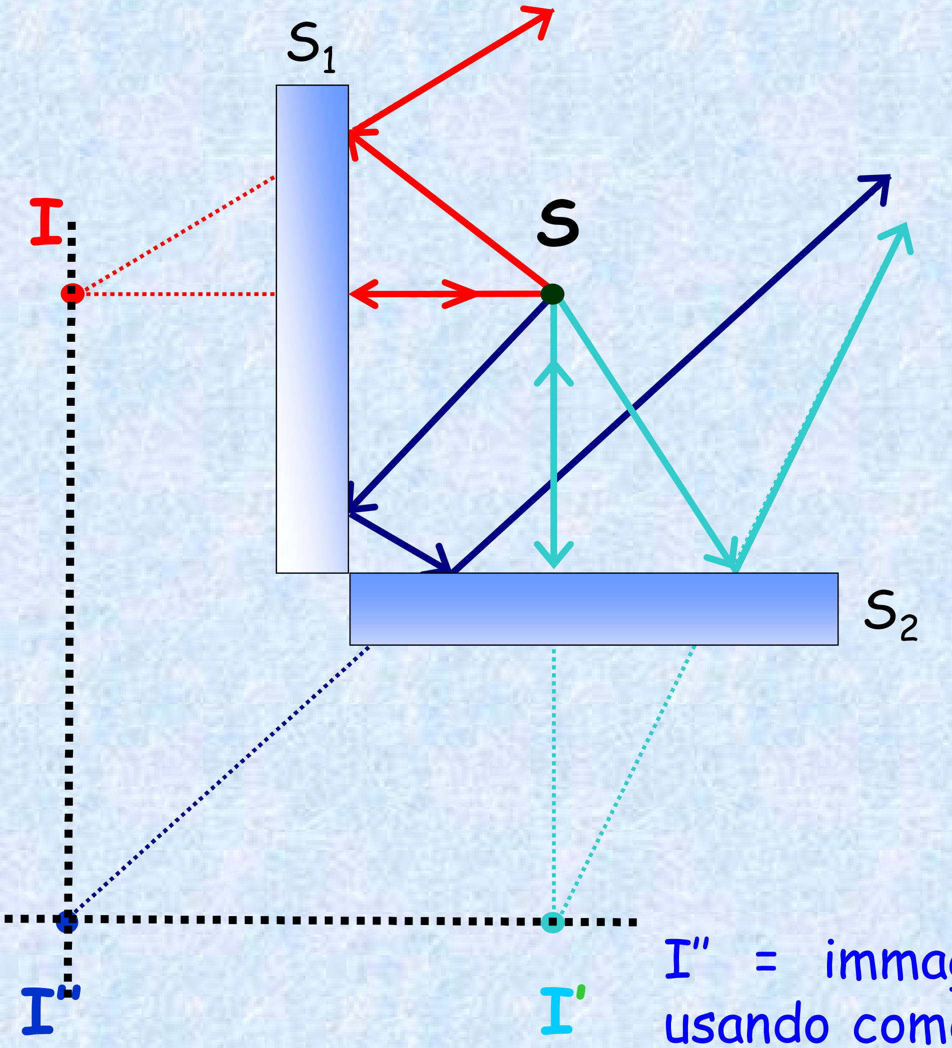
Immagine dell'uomo in piedi vicino allo specchio

Immagine dell'uomo in piedi lontano dallo specchio

Tracciando i raggi che vanno dall'immagine virtuale agli occhi dell'uomo a diverse distanze dallo specchio si vede che la porzione di specchio necessaria a formare l'immagine non cambia al variare della distanza uomo-specchio, se si suppone che l'angolo di accettazione dei raggi luminosi da parte dell'occhio è di 180°.

Poiché l'angolo di accettazione dell'occhio (considerato fisso) α_{max} è di 140° (2.44 rad), questo pone un limite alla minima distanza d a cui, usando uno specchio di altezza h/2, si può vedere l'intera immagine della persona.

Una sorgente puntiforme si trova tra due specchi piani che formano un angolo di 90°. Quante sono le immagini che si formano?



S = sorgente puntiforme

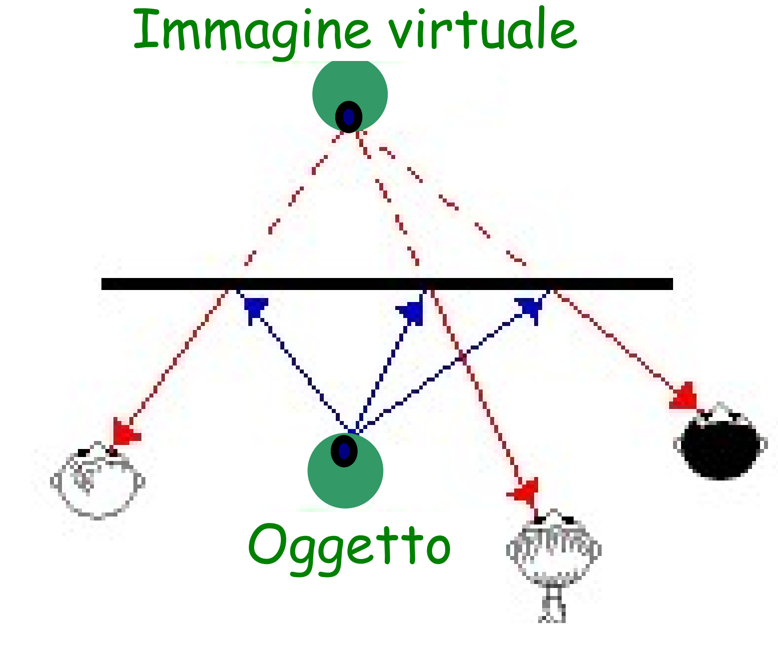
I = immagine della sorgente S prodotta dallo specchio S_1 (raggi che si riflettono solo su S_1)

I' = immagine della sorgente S prodotta dallo specchio S_2 (raggi che si riflettono solo su S_2)

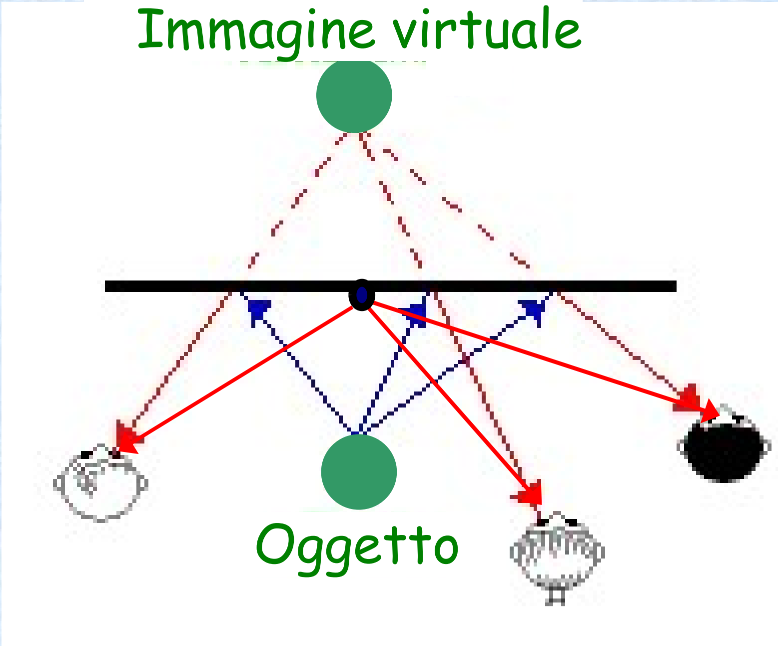
I'' = immagine prodotta dallo specchio S_2 usando come sorgente l'immagine I (raggi che si riflettono prima su S_1 e poi su S_2)

I'' = immagine prodotta dallo specchio S_1 usando come sorgente l'immagine I' (raggi che si riflettono prima su S_2 e poi su S1)

Come si fa a capire, osservando l'immagine di un oggetto, se una macchiolina si trova sull'oggetto e sullo specchio?



Se la macchiolina si trova sull'oggetto la sua posizione rispetto all'oggetto non cambia.

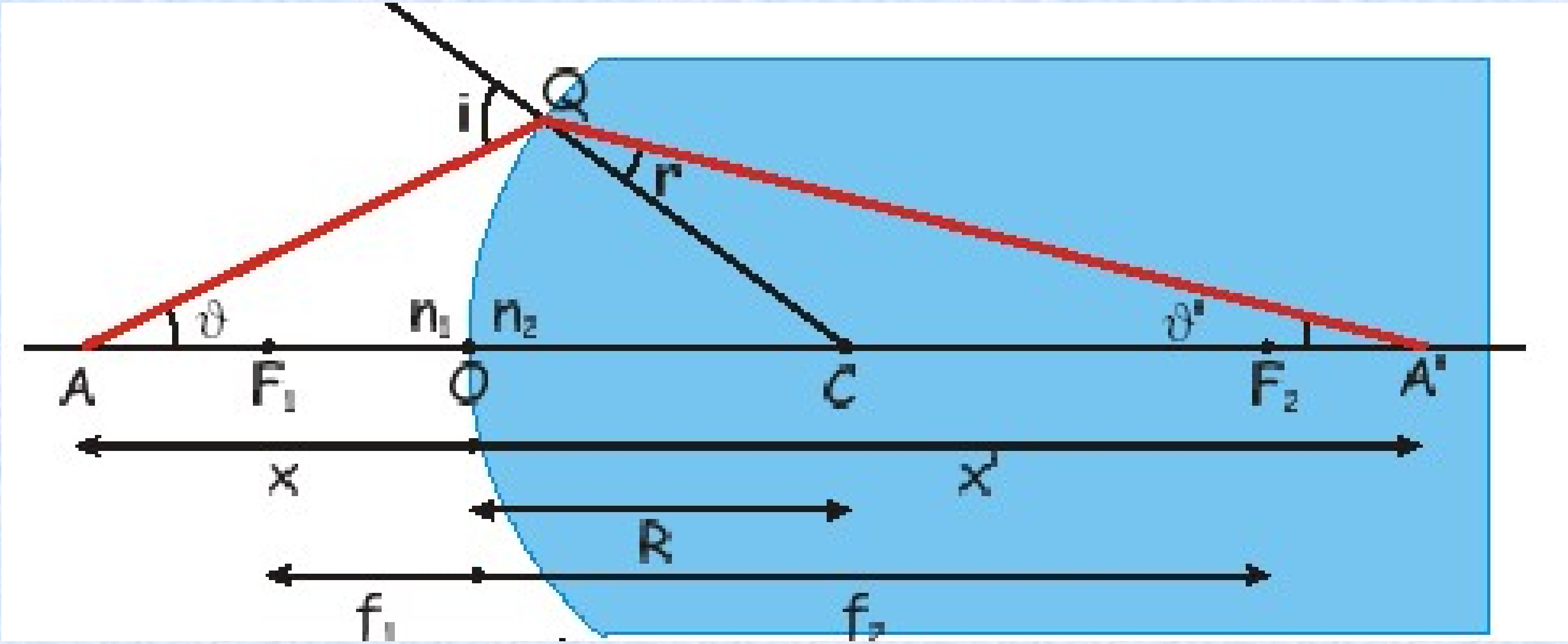


Se la macchiolina si trova sullo specchio la sua posizione rispetto all'oggetto cambia.

C. Altucci

Diottro sferico

Il diottro sferico è una superficie di separazione sferica tra due mezzi con diverso indice di rifrazione.



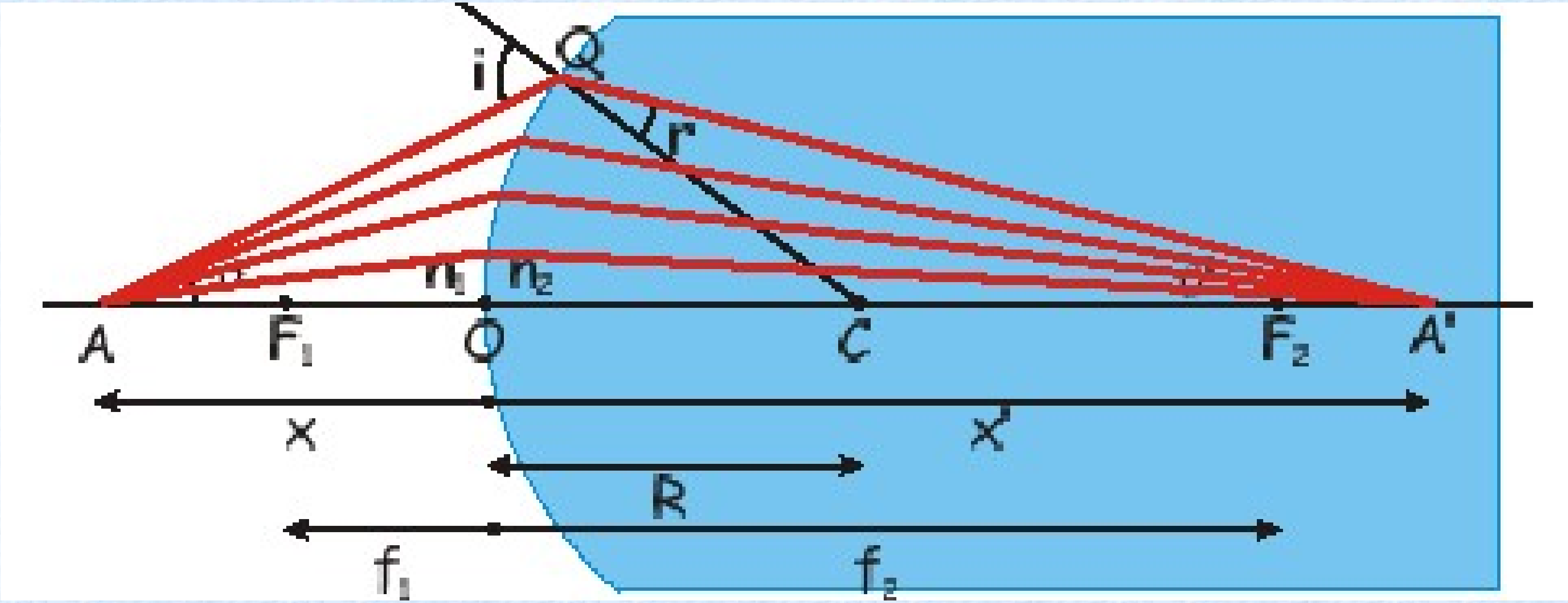
n_1, n_2 = indice di rifrazione dei mezzi 1 e 2;

R, C = raggio e centro della superficie sferica;

AQ, QA' = raggio incidente e raggio rifratto

x, x' = distanza sorgente-diottro e diottro-immagine

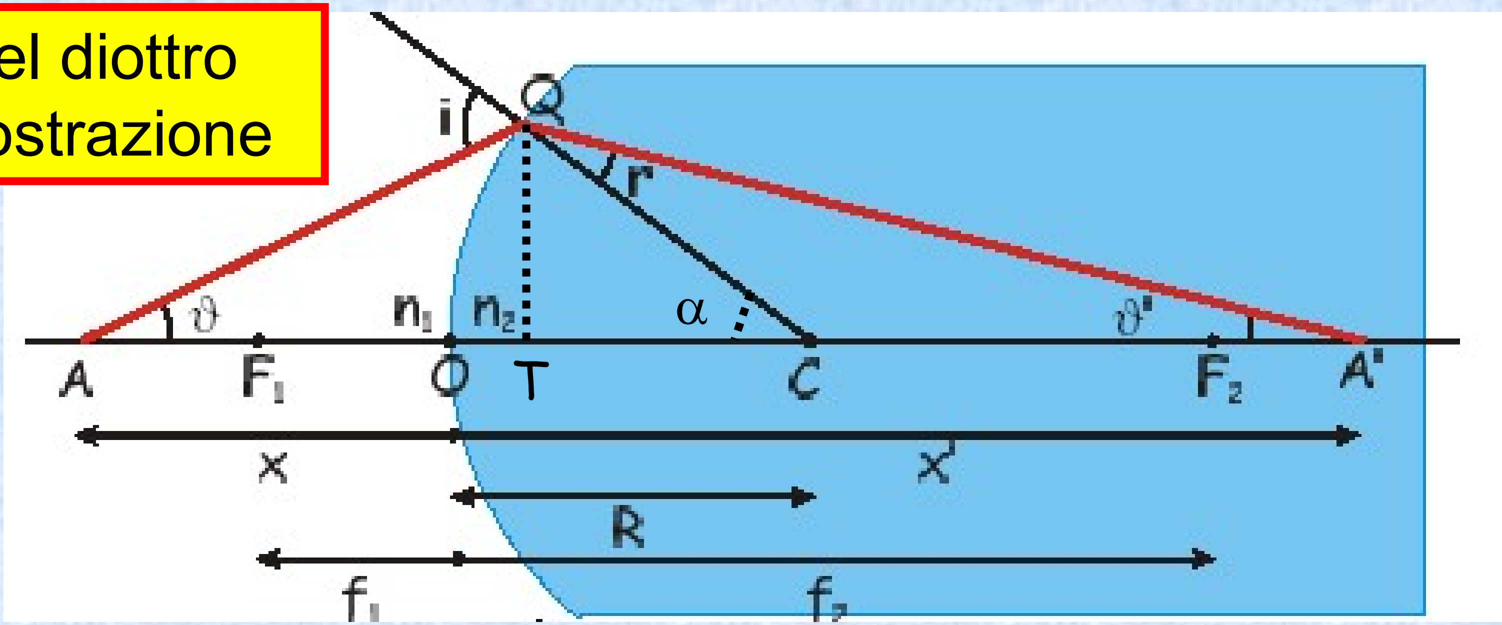
Diottro sferico



Per valori piccoli dell'angolo ϑ (raggi parassiali) il diottro è un sistema **stigmatico**: tutti i raggi uscenti dallo stesso punto sorgente si incontrano nello stesso punto immagine.

Equazione del diottro
$n_1/x + n_2/x' = (n_2 - n_1)/R$

Formula del diottro sferico:dimostrazione



$$i = \theta + \alpha \qquad \sin(i) = \sin(\alpha + \vartheta) = \sin(\alpha)\cos(\vartheta) + \sin(\vartheta)\cos(\alpha)$$

$$\alpha = r + \theta' \qquad \sin(r) = \sin(\alpha - \vartheta') = \sin(\alpha)\cos(\vartheta') - \sin(\vartheta')\cos(\alpha)$$

Per raggi parassiali $\cos(\vartheta) \cong \cos(\vartheta') \cong \cos(\alpha) \cong 1$ e $OT \equiv O$

$$\sin(\vartheta) \cong \frac{h}{x} \qquad \sin(\alpha) \cong \frac{h}{R} \qquad \sin(\vartheta') \cong \frac{h}{x'}$$

Ricordando che, per la II legge della rifrazione,

$$n_1 \sin(i) = n_2 \sin(r)$$

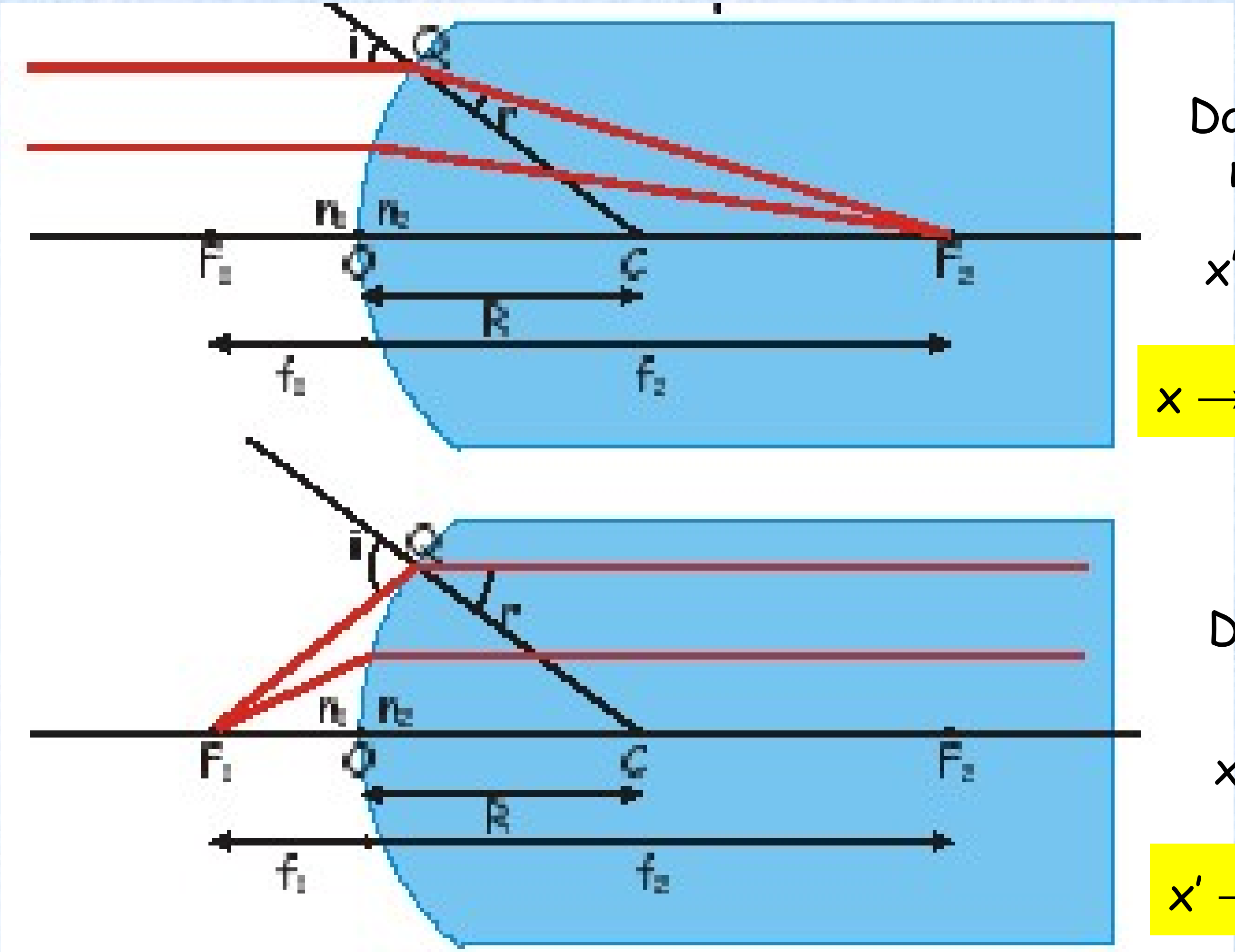
$$n_1 (\sin(\alpha) + \sin(\vartheta)) = n_2 (\sin(\alpha) - \sin(\vartheta'))$$

$$n_1 \left(\frac{h}{R} + \frac{h}{x}\right) = n_2 \left(\frac{h}{R} - \frac{h}{x'}\right)$$

$$\frac{n_1}{x} + \frac{n_2}{x'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Fuochi del diottro sferico

I fuochi sono i punti coniugati dei punti all'infinito, cioè i punti in cui si concentrano i raggi provenienti dall'infinito dopo la rifrazione sul diottro.



Primo fuoco

Dall'equazione del diottro

$n_1/x + n_2/x' = (n_2-n_1)/R$

$x' = R\ n_2/(n_2-n_1) - n_1 n_2/x$

$x \rightarrow \infty \quad x' \rightarrow f_2 = R\ n_2/(n_2-n_1)$

Secondo fuoco

Dall'equazione del diottro

$n_1/x + n_2/x' = (n_2-n_1)/R$

$x = R\ n_1/(n_2-n_1) - n_1 n_2/x'$

$x' \rightarrow \infty \quad x \rightarrow f_1 = R\ n_1/(n_2-n_1)$

C. Altucci

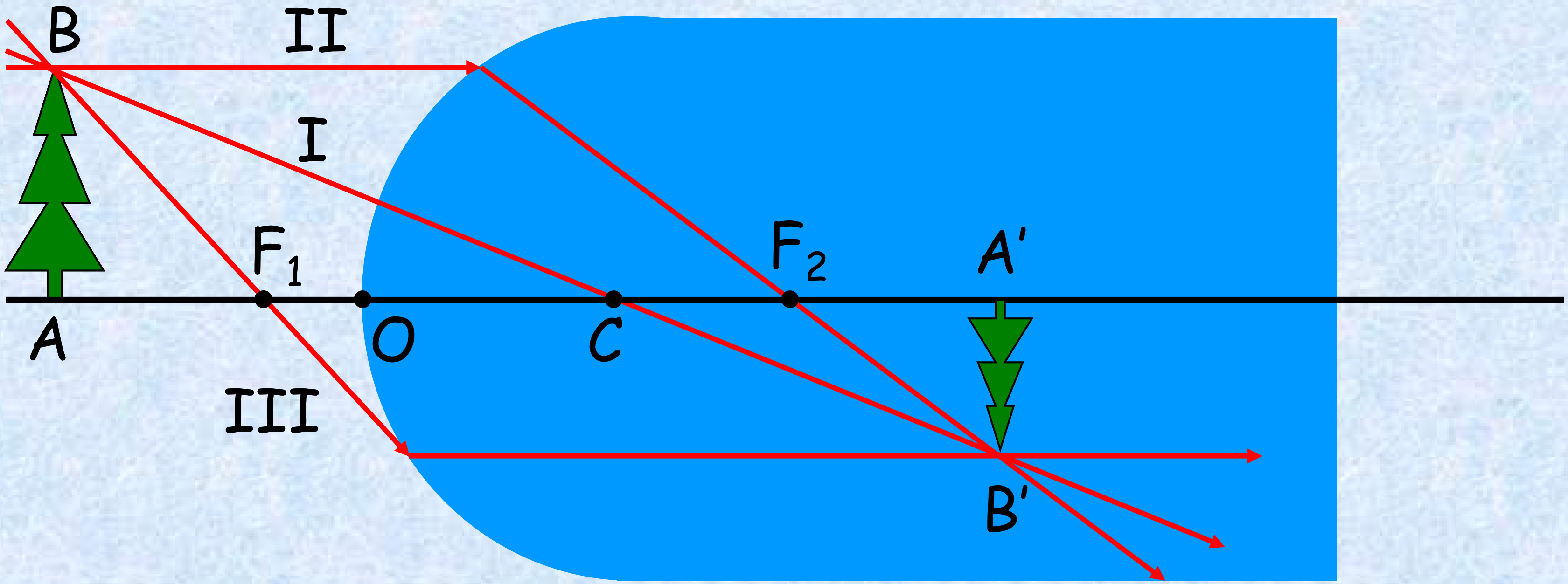
Costruzione grafica dell'immagine di una sorgente estesa da parte del diottro sferico

Per ogni punto della sorgente bisogna considerare i raggi seguenti:

I) Il raggio passante per il centro di curvatura del diottro che non viene deviato nell'attraversamento del diottro stesso.

II) Il raggio che incide parallelamente all'asse ottico del diottrico, che, dopo la rifrazione sul diottro, passa per uno dei fuochi del diottro.

III) Il raggio che esce da uno dei fuochi, dopo l'attraversamento del diottro, viene deviato in modo da risultare parallelo all'asse ottico del diottro.



Diottro sferico

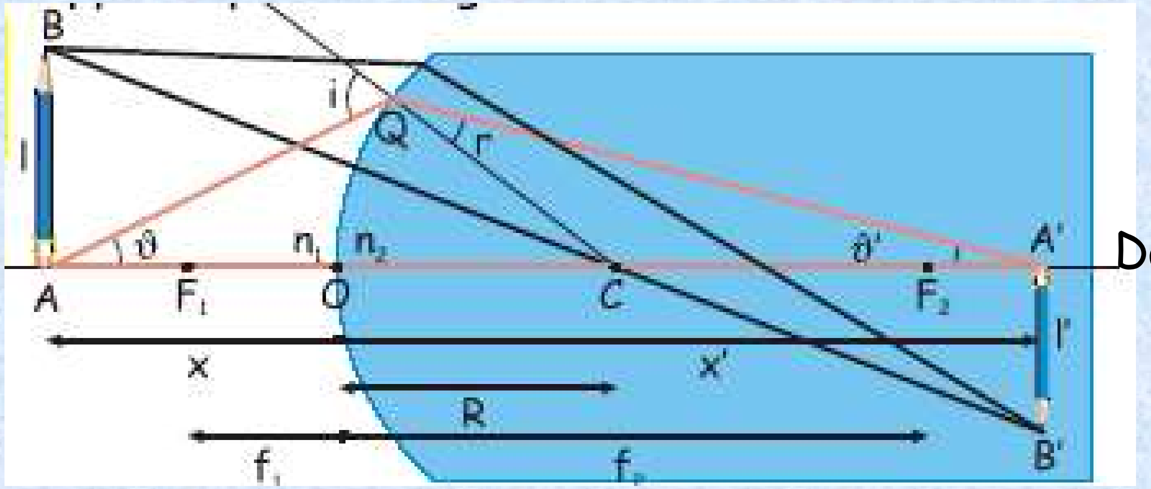
Introducendo le formule delle distanze focali nella formula del diottro, questa diventa:

$$f_1/x + f_2/x' = 1$$

Nell' **approssimazione di Gauss**:

I) raggi parassiali

II) oggetti di piccole dimensioni ($l \ll x+R$)



Dalla formula del diottro

$$x'/x = (n_2/n_1)(x'-R)/(x+R) \quad (1)$$

Dalla similitudine tra ABC e A'B'C

$$A'C/AC = l'/l$$

$$(x'-R)/(x+R) = l'/l \quad (2)$$

Dalle equazioni (1) e (2) si ricava l'ingrandimento lineare G:

$$G = l'/l = x'\, n_1/x\, n_2$$

Dimostrazione per il calcolo dell’ingrandimento di diottro (formula (1) della diapositiva precedente)

$$n_1/x + n_2/x' = (n_2 - n_1)/R = n_2/R - n_1/R$$

$$n_1/x + n_1/R = n_2/R - n_2/x'$$

$$n_1(1/x + 1/R) = n_2(1/R - 1/x')$$

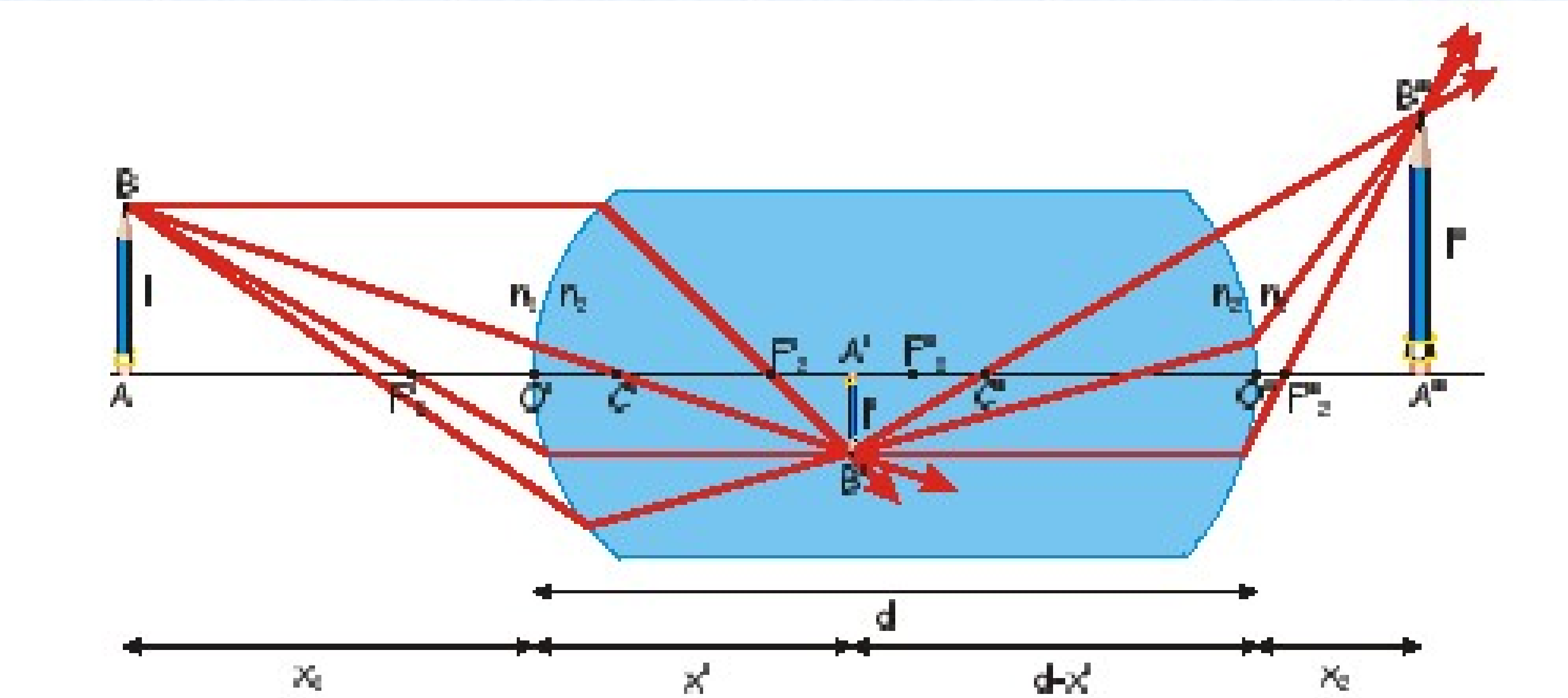
$$n_1\,(x + R)\;\cancel{/\,R}x = n_2\,(x' - R\,)\;\cancel{/\,R}x'$$

$$x'/x = n_1(x + R)\;/\;n_2(x' - R)$$

Lente semplice

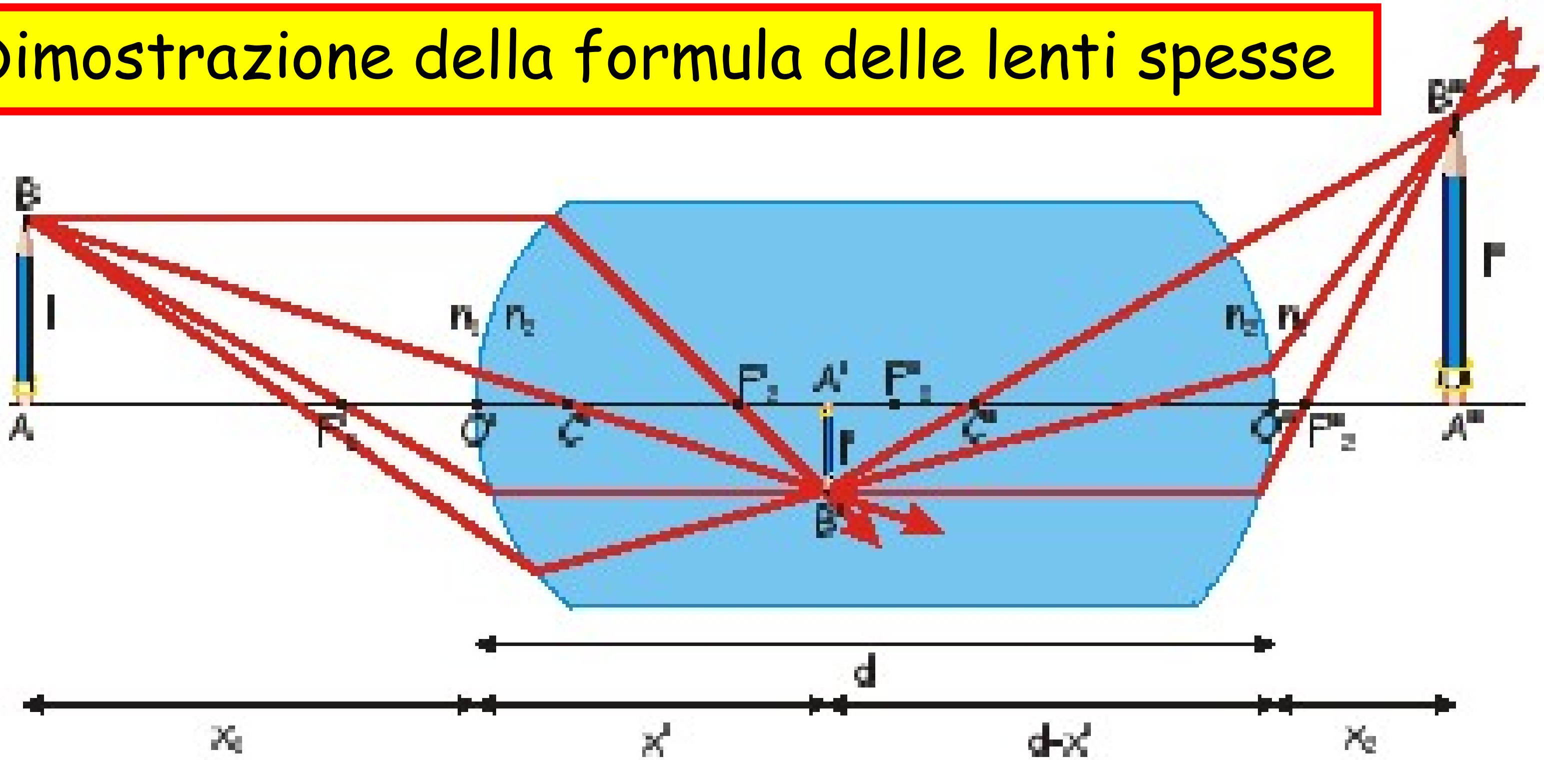
Un sistema ottico centrato è costituito è un sistema costituito da due o più superfici sferiche di separazione (diottri sferici) aventi i centri sulla stessa retta.

Una lente è il più semplice sistema ottico centrato ed è costituita da due diottri semplici, in cui il primo e terzo indice di rifrazione sono uguali.



Si applica due volte la legge del diottro: l'immagine formata dal primo diottro fa da sorgente per il secondo diottro.

Dimostrazione della formula delle lenti spesse



1° diottro $\quad n_1/x_1 + n_2/x' = (n_2 - n_1)/R'$

2° diottro $\quad n_2/(d - x') + n_1/x_2 = (n_1 - n_2)/R''$

Sommando membro a membro le due equazioni e riordinando gli addendi

$$n_1/x_1 + n_1/x_2 = (n_2 - n_1)/R' - (n_2 - n_1)/R'' - n_2 /(d - x') - n_2 / x'$$

Dividendo ambo i membri per n_1

$$1/x_1 + 1 /x_2 = (n - 1) (1/R' - 1/R'') - n (1/x' + 1/(d - x')) \qquad (n_2/n_1 = n)$$

C. Altucci

Lenti sottili

Applicando due volte la formula del diottro ad una lente semplice si ha:

$$1/x_1 + 1/x_2 = (n-1)\,(1/R' - 1/R'') - n\,(1/x' + 1/(d-x'))$$

dove

x_1, x_2= distanza sorgente-lente e lente-immagine

$(n = n_2/n_1)$

n_2 = indice di rifrazione assoluto del mezzo di cui è fatta la lente

n_1 = indice di rifrazione assoluto del mezzo in cui è immersa la lente

R', R'' = raggi di curvatura del primo e secondo diottro sferico

d = spessore della lente

x' = distanza primo diottro-immagine della sorgente formata dal primo diottro

Nel caso di lente sottile ($d \ll x'$) e $1/(d-x') \approx -1/x'$. Quindi

$$1/x_1 + 1/x_2 = (n-1)\,(1/R' - 1/R'')$$

C. Altucci

Lenti sottili

$1/x_1 + 1/x_2 = (n-1)(1/R' - 1/R'')$

Formula delle lenti sottili o formula dei punti coniugati

La quantità $(n-1)(1/R' - 1/R'')$, che ha le dimensioni del reciproco di una distanza che rappresenta la distanza focale della lente, cioè.

$1/f = (n-1)(1/R' - 1/R'')$

Formula dei costruttori di lenti

Infatti se la sorgente si pone all'infinito ($x_1 \to \infty$), allora l'immagine si forma nel fuoco ($x_2 \to f$). Se l'immagine si forma all'infinito ($x_2 \to \infty$), allora la sorgente si trova nel punto $x_1 \to f$.

$P = 1/f$ = potere diottrico o potere convergente della lente

Il potere diottrico di una lente si misura nel S.I. in m^{-1}= diottria (D)

Esempi:

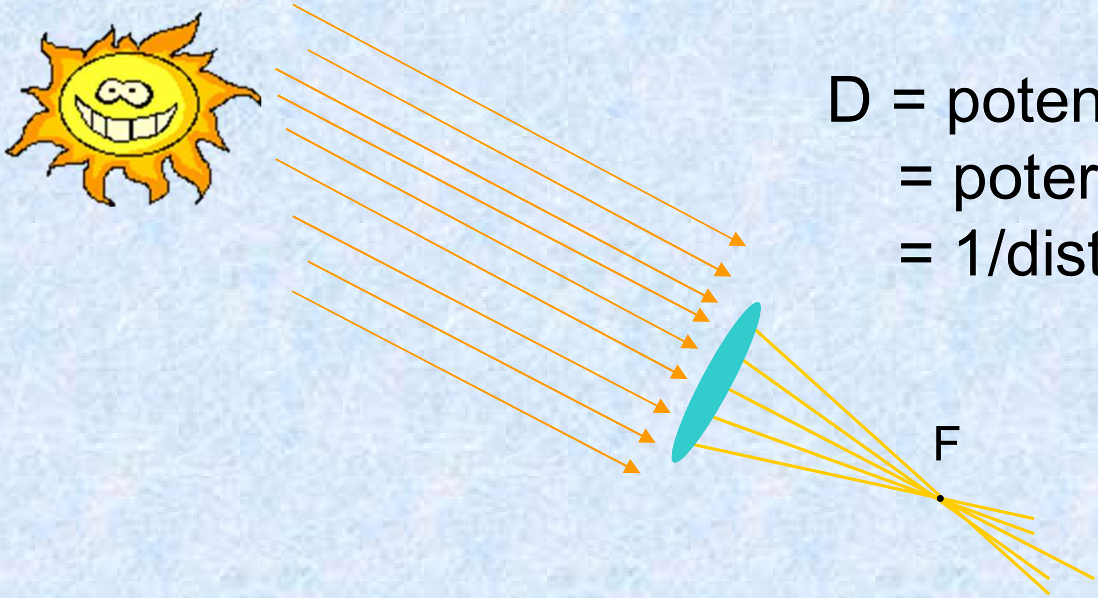
Una lente di focale 50 cm ha il potere diottrico

$P = 1/50\ cm = 1/0.5\ m = 1/(1/2\ m) = 2\ m^{-1} = 2\ D$

Una lente di focale 20 cm ha il potere diottrico

$P = 1/20\ cm = 1/0.2\ m = 1/(1/5\ m) = 5\ m^{-1} = 5\ D$

Una lente concentra i raggi solari in un punto posto a 20 cm dalla lente. Quanto vale la potenza della lente?



D = potenza = potere diottrico =
= potere convergente =
= 1/distanza focale = 1 / f

D si misura in m^{-1} = diottria (D) (S.I.)

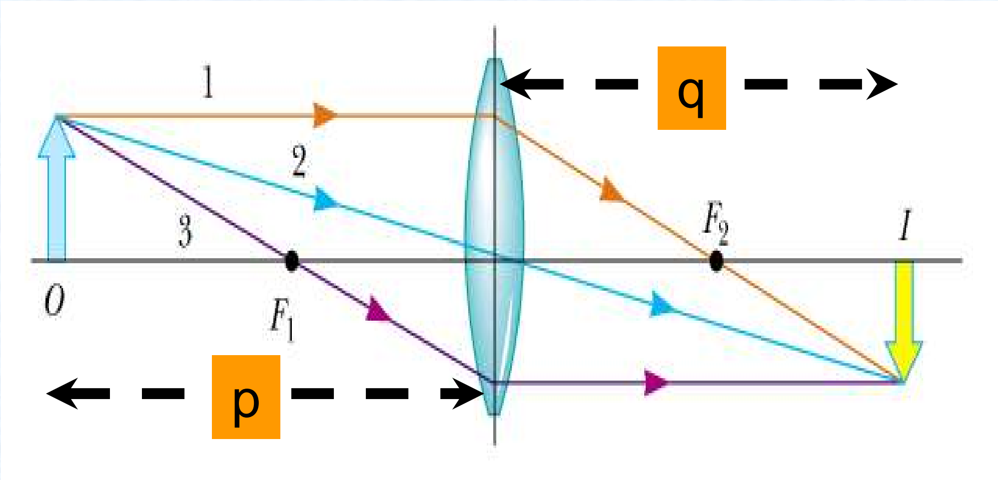
$$f = 20\ cm = 0.2\ m$$

$$D = 1 / f = 1 / 0.2\ m = 1 / (\ 2/10\ m) = (10/2)\ m^{-1} = 5\ D$$

Un oggetto è posto alla distanza di 25 cm davanti ad una lente di +6 D. A quale distanza dalla lente si forma l'immagine?

Formula delle lenti sottili o formula dei punti coniugati

$$1 / p + 1 / q = 1 / f$$



$p = 25$ cm $= 0.25$ m

$1 / f = 6$ D

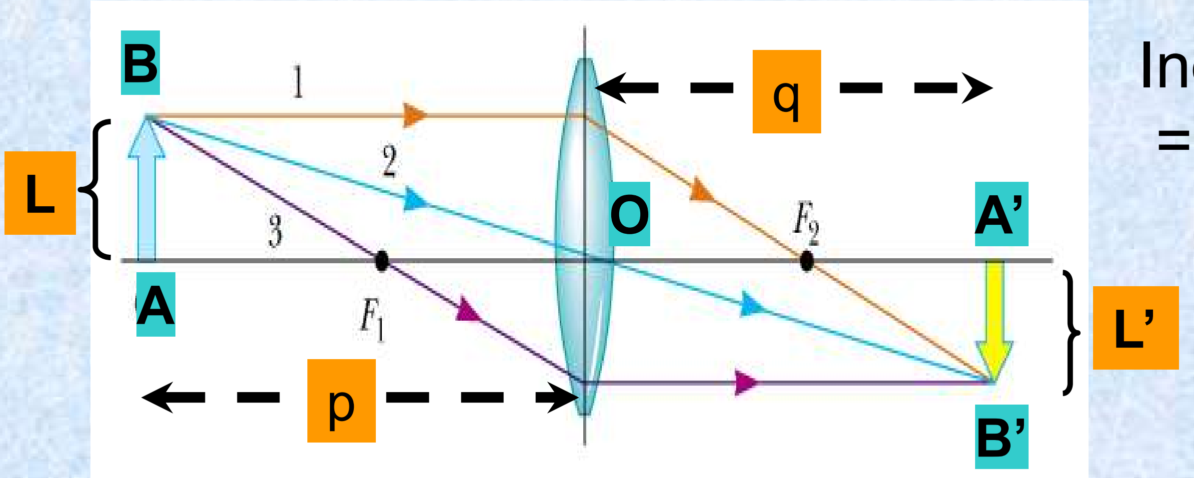
$f = (1 / 6)$ m $= 0.17$ m

$p > f$

$$1 / q = 1 / f - 1 / p = 6 \text{ m}^{-1} – 1/ (1/4) \text{ m} = (6 – 4) \text{ m}^{-1} = 2 \text{ m}^{-1}$$

$$q = 1/2 \text{ m} = 0.5 \text{ m} = 50 \text{ cm}$$

A quale distanza da una lente di +20 D bisogna porre un oggetto per ottenere un'immagine reale ingrandita di due volte?



Ingrandimento lineare = $= I = L'/L$

Dalla similitudine tra i due triangoli AOB e AOB'

$I = L'/L = q/p$

$$\left.\begin{aligned} &1/p + 1/q = 1/f \\ &q = I\,p \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1/p + 1/I\,p = 1/f \Rightarrow$$

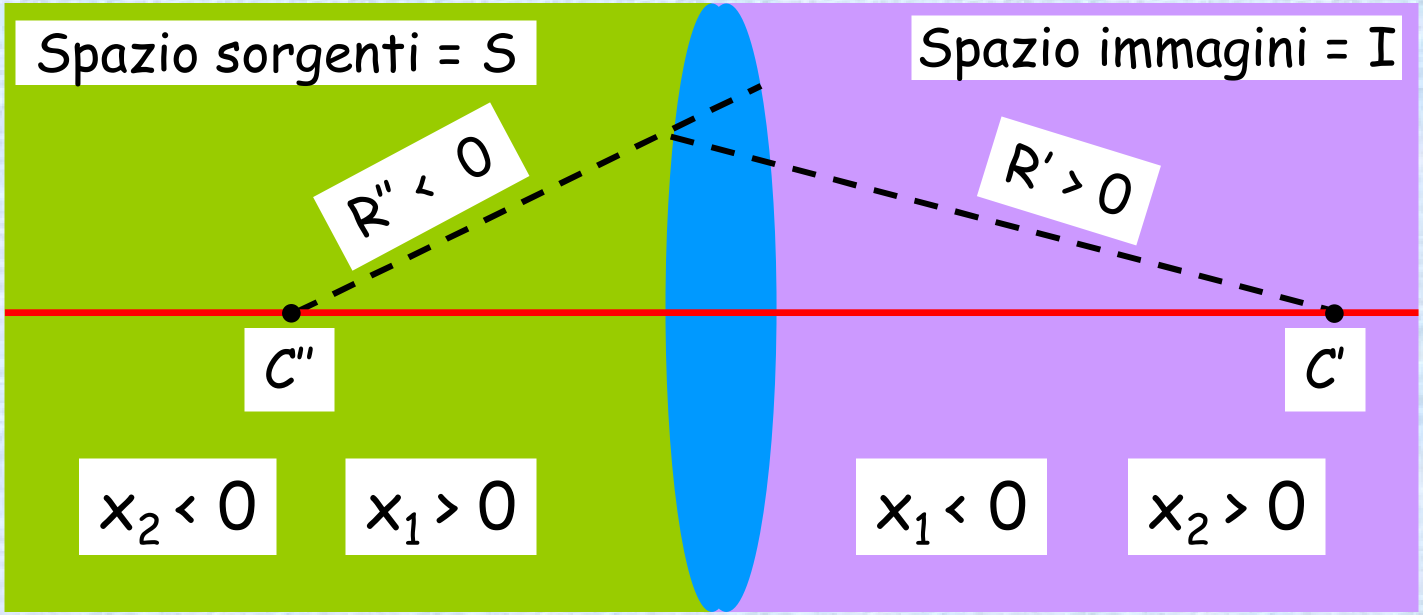
$$\Rightarrow (1/p)(1 + 1/I) = 1/f \Rightarrow (1/p)(I + 1)/I = 1/f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1/p) = (1/f)\,I/(I + 1) = 20\text{ D } 2/(2+1) = 40/3\text{ D} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = (3/40)\text{ m} = 3/4\ 10^{-1}\text{ m} = 0.75\ 10^{-1}\text{ m} = 7.5\text{ cm}$$

C. Altucci

Lenti sottili: convenzione dei segni



C', C'' = centro di curvatura del 1° e 2° diottro

R', R'' = raggi di curvatura del 1° e 2° diottro

$$1/x_1 + 1/x_2 = (n-1)\,(1/R' - 1/R'')$$

Una sorgente ha coordinata x positiva, se si trova nello spazio-sorgenti S, coordinata negativa se si trova nello spazio-immagini I.

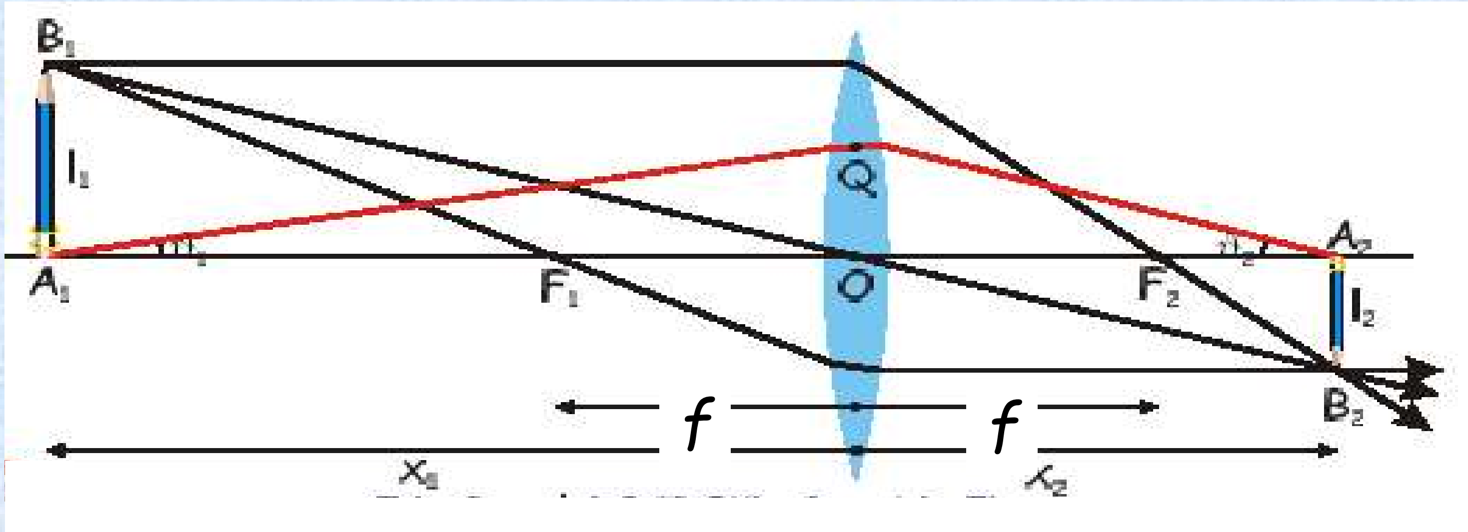
Una immagine ha coordinata x positiva, se si trova nello spazio-immagini I, coordinata negativa se si trova nello spazio-sorgenti S.

R' > 0 se C' è nello spazio-immagini I; R' < 0 se C' è nello spazio-sorgenti S.

R'' > 0 se C'' è nello spazio-immagini I; R'' < 0 se C'' è nello spazio-sorgenti S.

Lenti sottili

Ingrandimento lineare



L'ingrandimento lineare G è il rapporto tra le dimensioni lineari dell'immagine e dell'oggetto = l_2/l_1. Dalla similitudine dei triangoli A_1OB e A_2OB_2

$$G = l_2/l_1 = x_2/x_1$$

Immagine capovolta e reale

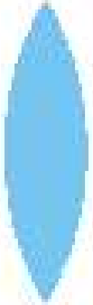
$x_1 > 0$ ⇒ Sorgente nello spazio sorgenti

$x_2 > 0$ ⇒ Immagine nello spazio immagini

$G > 0$

Lenti sottili

- Tipi di lente convergente:

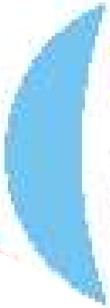


biconvessa

$$R' > 0,\ R'' < 0 \Rightarrow \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R''}\right) > 0 \Rightarrow f > 0$$

piano - convessa

$$R' > 0,\ R'' \to \infty \Rightarrow \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R''}\right) > 0 \Rightarrow f > 0$$

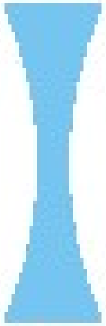


menisco - convergente

$$0 < R' < R'' \Rightarrow \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R''}\right) > 0 \Rightarrow f > 0$$

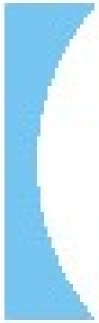
Lenti sottili

- Tipi di lente divergente:



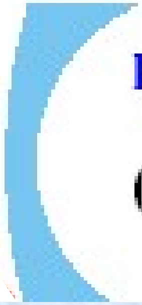
biconcava

$$R' < 0,\ R'' > 0 \ \Rightarrow\ \frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R''}\right) < 0 \ \Rightarrow\ f < 0$$



piano - concava

$$R' \to \infty,\ R'' > 0 \ \Rightarrow\ \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R''}\right) < 0 \ \Rightarrow\ f' < 0$$



menisco - divergente

$$0 < R'' < R' \ \Rightarrow\ \frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R''}\right) < 0 \ \Rightarrow\ f < 0$$

Lenti sottili

In tutte le costruzioni geometriche precedenti, l'immagine ottenuta era stigmatica e non distorta. Questo avviene se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

- Fasci di raggi parassiali
- Oggetti di piccole dimensioni
- Radiazioni monocromatiche

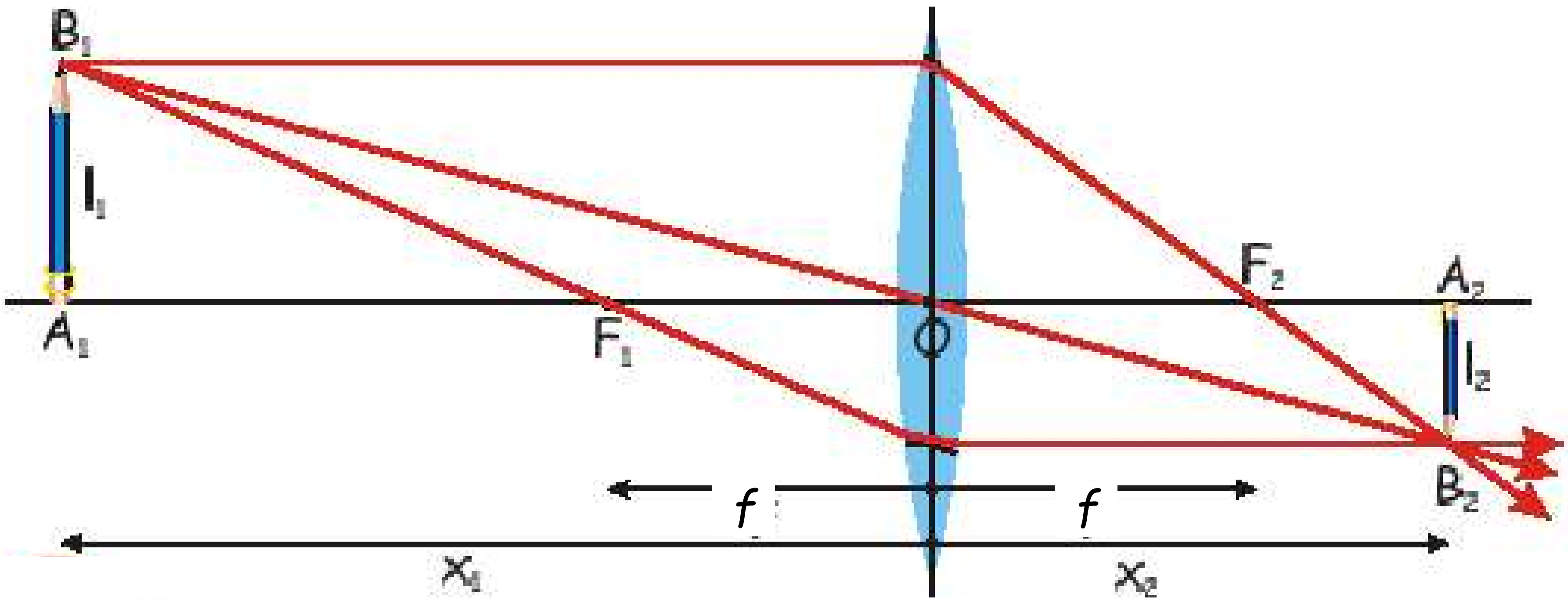
Queste condizioni non si verificano in pratica, quando sono necessari

- Grandi aperture di diaframma per avere immagini luminose
- Lenti di grande apertura (obiettivi grandangolari) per ottenere immagini di oggetti di grandi dimensioni

C. Altucci

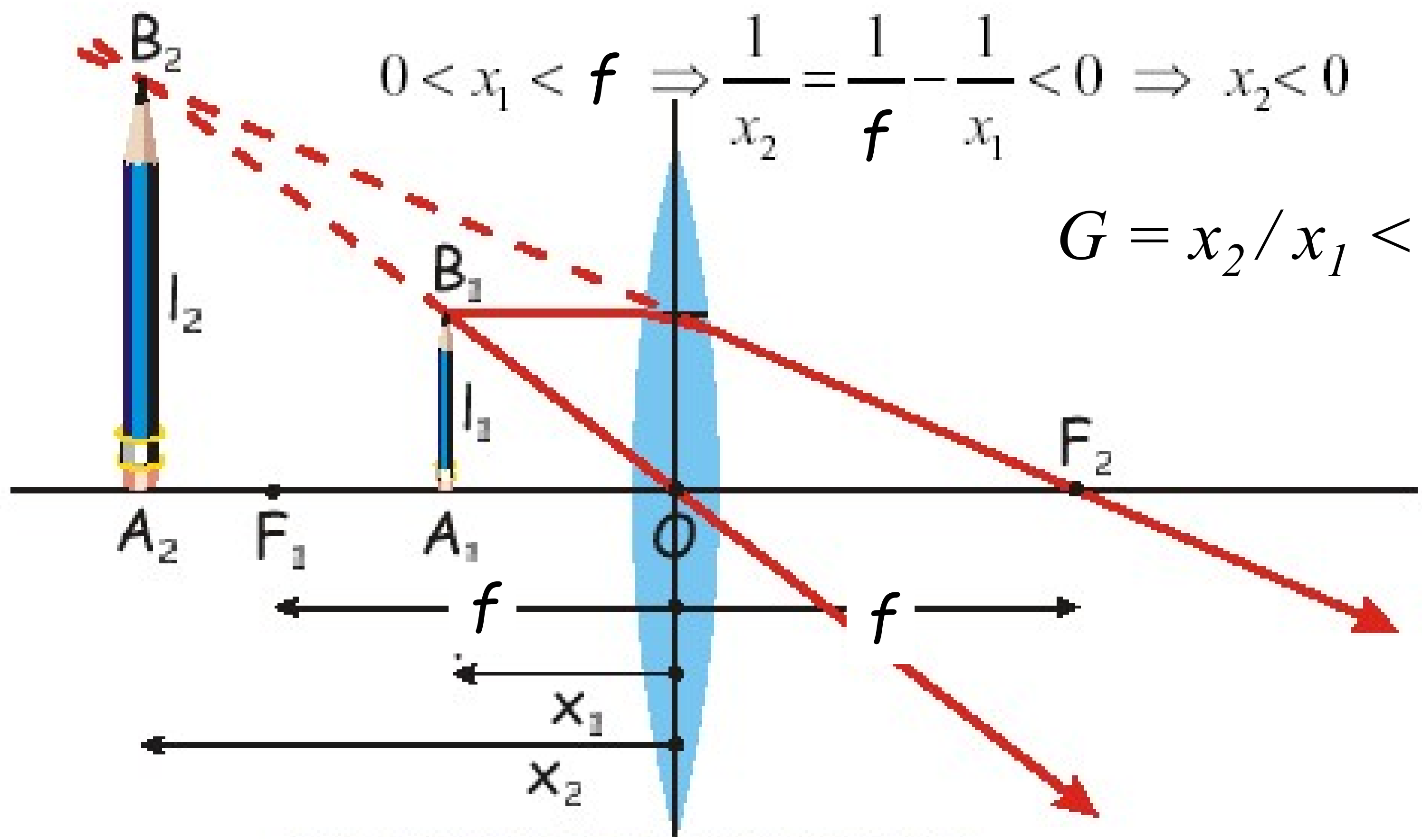
Lenti sottili

$$0 < f < x_1 \Rightarrow \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x_1} > 0 \Rightarrow x_2 > 0 \qquad G = x_2 / x_1 > 0$$



Una sorgente posta ad una distanza da una lente convergente maggiore della distanza focale fornisce un'immagine reale e capovolta. Poiché nel caso del disegno $x_1 > 2f$ =▶ $G < 1$

Lenti sottili



$$0 < x_1 < f \Rightarrow \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x_1} < 0 \Rightarrow x_2 < 0$$

$$G = x_2 / x_1 < 0$$

Una sorgente posta ad una distanza da una lente convergente minore della distanza focale fornisce un'immagine virtuale e dritta. Poiché in questo caso $x_1 < 2f$ =► $|G| > 1$ **(lente d'ingrandimento)**

Lenti sottili convergenti: ingrandimento

Per valutare il valore dell' ingrandimento consideriamo i seguenti casi:

$G = 1 \Rightarrow x_2/x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = x_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1/x_1 + 1/x_1 = 1/f \Rightarrow 2/x_1 = 1/f \Rightarrow x_1 = x_2 = 2f$

$G > 1 \Rightarrow x_2/x_1 > 1 \Rightarrow x_2 > x_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x_2 = f\, x_1 / (x_1 - f) > x_1} \Rightarrow f x_1 > x_1^2 - f x_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^2 - 2 f x_1 < 0 \Rightarrow x_1 (x_1 - 2f) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_1 - 2f) < 0 \Rightarrow x_1 < 2f$

Analogamente si trova che se $G < 1$ allora $x_1 > 2f$

Dall'equazione dei punti coniugati: $1/x_1 + 1/x_2 = 1/f$ si trova che

$1/x_2 + = 1/f - 1/x_1 \Rightarrow 1/x_2 = (x_1 - f) / f\, x_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 = f\, x_1 / (x_1 - f)$