

Prova scritta Elettrodinamica Classica – Prof. Lorenzo Marrucci – 30/1/2020

Esercizio 1

Si considerino due gusci sferici concentrici nel vuoto, fatti di materiale conduttivo, di raggio $R_1 = 5$ cm e $R_2 = 10$ cm e spessore molto sottile. Il guscio interno è collegato a terra mediante un filo conduttore molto sottile (di capacità trascurabile) che attraversa il guscio esterno senza toccarlo grazie ad un piccolo foro (abbastanza piccolo da non perturbare la simmetria sferica del problema). Il guscio esterno è posto ad un potenziale $V_2 = 90$ kV (il potenziale all'infinito è considerato nullo). Calcolare l'espressione del potenziale elettrico che si genera in tutto lo spazio interno ed esterno ai due gusci e la carica elettrica Q_1 che si induce complessivamente sul guscio interno.

Esercizio 2

Si consideri ora un singolo guscio sferico isolante di raggio R e spessore trascurabile, su cui è stata disposta una densità di carica superficiale non uniforme descritta dalla seguente espressione:

$$\sigma(x, y, z) = \sigma_0 \frac{xy}{R^2}$$

dove σ_0 è una costante e x, y, z sono le coordinate di un sistema di riferimento cartesiano con origine posta al centro della sfera. Calcolare l'espressione del potenziale elettrico dentro e fuori il guscio sferico, assumendo che il potenziale si annulli all'infinito.

Esercizio 3

Un nucleo atomico di massa a riposo $m_0 = 10^{-26}$ kg che viaggia inizialmente ad una velocità di $0.8c$, dove c è la velocità della luce, urta in modo perfettamente anelastico un altro nucleo di uguale massa a riposo, che viaggiava alla stessa velocità del primo ma nella direzione perpendicolare. Dopo l'urto i due nuclei si fondono. Calcolare la massa a riposo del nucleo "composto" formatosi dopo l'urto.

Memo: espressioni del laplaciano in coordinate polari e tabella delle prime armoniche sferiche

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\end{aligned}$$

$$1/(4\pi\epsilon_0) \approx 9 \times 10^9 \text{ m/F}$$

$$Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

$$Y_1^{-1}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi}$$

$$Y_1^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta$$

$$Y_1^1(\theta, \varphi) = \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{i\varphi}$$

$$Y_2^{-2}(\theta, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\varphi}$$

$$Y_2^{-1}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{-i\varphi}$$

$$Y_2^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$Y_2^1(\theta, \varphi) = \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi}$$

$$Y_2^2(\theta, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi}$$

Soluzioni

Esercizio 1

L'esercizio può essere risolto con i metodi tipici dei corsi di Fisica Generale 2 (o altri corsi introduttivi di elettromagnetismo), come il teorema di Gauss per trovare il campo elettrico e poi l'integrale di linea del campo per calcolare il potenziale. Oppure può essere risolto con metodi leggermente più avanzati, basati sull'equazione di Laplace. In questa soluzione utilizziamo l'equazione di Laplace, ma se uno studente usa i metodi più elementari non viene penalizzato.

La simmetria sferica del problema indica che la soluzione avrà la medesima simmetria, per cui il potenziale ϕ espresso in coordinate polari è funzione solo del raggio r e non delle coordinate angolari ϑ e φ , ossia $\phi = \phi(r)$. Inserendo questa espressione nell'equazione di Laplace in coordinate polari sferiche (riportata nel testo), troviamo immediatamente che la soluzione più generale ha il seguente andamento:

$$\phi = A + \frac{B}{r}$$

dove A e B sono costanti da determinare mediante le condizioni al contorno. Queste costanti vanno determinate *separatamente per ciascuna regione di spazio* vuoto delimitato dai gusci conduttivi e in ciascuna regione assumeranno valori diversi. Per esempio, nella regione più interna, con $r < R_1$, si vede subito che si deve avere $B = 0$ per evitare la divergenza del potenziale nell'origine. Quindi il potenziale $\phi = A$ è costante e la condizione che sia uguale al valore nullo del potenziale del guscio interno ci dice che $\phi = 0$.

Nella regione più esterna, con $r > R_2$, nel limite $r \rightarrow \infty$ si ha $\phi \rightarrow A$. Perciò imponendo la condizione di annullamento del potenziale all'infinito si ottiene $A = 0$. L'altra condizione è che il potenziale sia pari a V sul guscio esterno, per cui $B = R_2 V_2$ e $\phi = V_2 R_2 / r$. Resta da determinare il potenziale nella regione intermedia tra i due gusci, con $R_1 < r < R_2$. In questo caso dobbiamo imporre le due condizioni al contorno corrispondenti ai raggi dei gusci:

$$A + \frac{B}{R_1} = 0, \quad A + \frac{B}{R_2} = V_2$$

da cui otteniamo $B = -V_2 R_1 R_2 / (R_2 - R_1)$ e $A = V_2 R_2 / (R_2 - R_1)$. Ricapitolando i nostri risultati, abbiamo:

$$\phi = \begin{cases} 0 & \text{per } r < R_1 \\ \frac{V_2 R_2}{R_2 - R_1} \left(1 - \frac{R_1}{r}\right) & \text{per } R_1 < r < R_2 \\ V_2 \frac{R_2}{r} & \text{per } r > R_2 \end{cases}$$

Per calcolare la carica del guscio interno, utilizziamo il teorema di Coulomb e calcoliamo prima la densità superficiale di carica (all'esterno del guscio, perché all'interno è chiaramente nulla):

$$\sigma = \varepsilon_0 E_r(R_1) = -\varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial r}(R_1^+) = -\frac{\varepsilon_0 V_2 R_2}{R_1(R_2 - R_1)}$$

Quindi moltiplicando per l'area del guscio si ha la carica totale:

$$Q_1 = -\frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{(R_2 - R_1)} V_2 = -1.0 \mu\text{C}$$

Esercizio 2

Il potenziale può essere determinato risolvendo l'equazione di Laplace con le condizioni al contorno fissate dalla specifica densità di carica presente sul guscio e dall'annullamento all'infinito. Data la forma del guscio, conviene utilizzare coordinate polari sferiche ed esprimere anche la densità di carica in tali coordinate:

$$\sigma(\vartheta, \varphi) = \sigma_0 \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi$$

Dato che c'è una dipendenza angolare nella densità di carica, è chiaro che ci sarà una dipendenza angolare anche nel potenziale. Le soluzioni dell'equazione di Laplace in coordinate polari possono essere cercate con il metodo della separazione di variabili e sappiamo già che la parte angolare di tali soluzioni coincide con le armoniche sferiche. Quindi le soluzioni che stiamo cercando sono della forma

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = f_{lm}(r) Y_l^m(\vartheta, \varphi)$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione di Laplace troviamo facilmente che la parte radiale in generale sarà data dalla seguente combinazione lineare

$$f_{lm}(r) = A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}}$$

La soluzione più generale sarà data dalla combinazione lineare di tutte queste soluzioni con diverse armoniche sferiche, per cui sarà data dalla seguente espressione:

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_l^m(\vartheta, \varphi)$$

Per determinare i coefficienti A_{lm} e B_{lm} dovremo ora imporre le condizioni al contorno. In questo caso possiamo semplificare il lavoro riscrivendo la densità di carica in termini di armoniche sferiche:

$$\sigma(\vartheta, \varphi) = \sigma_0 \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi = \frac{\sigma_0}{2} \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi = \frac{\sigma_0}{2} \sin^2 \vartheta \left(\frac{e^{i2\varphi} - e^{-i2\varphi}}{2i} \right) = -i\sigma_0 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} (Y_2^2 - Y_2^{-2})$$

Data questa struttura della densità di carica, è probabile che anche il potenziale avrà anch'esso solo le armoniche sferiche con $l = 2$ e $m = \pm 2$ non nulle, con la stessa combinazione $(Y_2^2 - Y_2^{-2})$, e tutti gli altri coefficienti nulli. Tenendo anche conto del requisito di non divergenza del potenziale nell'origine ($r = 0$) e della condizione di annullamento all'infinito, possiamo semplificare come segue l'espressione del potenziale dentro e fuori il guscio:

$$\begin{aligned} \phi &= Ar^2(Y_2^2 - Y_2^{-2}) \quad \text{per } r < R \\ \phi &= \frac{B}{r^3}(Y_2^2 - Y_2^{-2}) \quad \text{per } r > R \end{aligned}$$

Restano da determinare i coefficienti A e B . Per farlo imponiamo le seguenti due condizioni di raccordo sulla superficie del guscio:

$$\begin{aligned} \phi(R^-, \vartheta, \varphi) &= \phi(R^+, \vartheta, \varphi) && \text{(continuità del potenziale)} \\ -\frac{\partial \phi}{\partial r}(R^+, \vartheta, \varphi) + \frac{\partial \phi}{\partial r}(R^-, \vartheta, \varphi) &= \frac{\sigma(\vartheta, \varphi)}{\epsilon_0} && \text{(cond. raccordo del campo elettrico)} \end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni precedenti del potenziale, otteniamo le seguenti equazioni:

$$AR^2 = \frac{B}{R^3}$$

$$3 \frac{B}{R^4} + 2AR = -\frac{i\sigma_0}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{2\pi}{15}}$$

da cui

$$A = -\frac{i\sigma_0}{5\epsilon_0 R} \sqrt{\frac{2\pi}{15}}, \quad B = AR^5$$

Sostituendo queste costanti nell'espressione precedente del potenziale troviamo il risultato finale:

$$\phi = -\frac{i\sigma_0 r^2}{5\epsilon_0 R} \sqrt{\frac{2\pi}{15}} (Y_2^2 - Y_2^{-2}) = \frac{\sigma_0 r^2}{5\epsilon_0 R} \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi = \frac{\sigma_0 xy}{5\epsilon_0 R} \quad \text{per } r < R$$

$$\phi = -\frac{i\sigma_0 R^4}{5\epsilon_0 r^3} \sqrt{\frac{2\pi}{15}} (Y_2^2 - Y_2^{-2}) = \frac{\sigma_0 R^4}{5\epsilon_0 r^3} \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi = \frac{\sigma_0 R^4 xy}{5\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad \text{per } r > R$$

Va notato che, anche senza introdurre le armoniche sferiche, avremmo potuto semplicemente assumere l'ansatz $\phi = f(r) \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi$ per risolvere l'equazione di Laplace e imporre le condizioni al bordo del guscio e il procedimento sarebbe stato del tutto equivalente.

Esercizio 3

Per ciascuna singola particella inizialmente in moto l'energia è $E = \gamma m_0 c^2$ e la quantità di moto (impulso) è legata all'energia da $E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$. Se assumiamo che una particella si muova lungo l'asse x e l'altra lungo l'asse y , i due 4-impulsi corrispondenti sono dati da $p_1^\mu = (E/c, p, 0, 0)$ e $p_2^\mu = (E/c, 0, p, 0)$. Il 4-impulso totale è quindi $p_{tot}^\mu = (2E/c, p, p, 0)$ e questo 4-impulso caratterizza anche la particella che si ottiene dopo la collisione. Per estrarre la massa a riposo possiamo per esempio utilizzare la relazione generale $p^\mu p_\mu = -m_0^2 c^2$ (dove stiamo usando una metrica con segnatura $-1, 1, 1, 1$). Otteniamo quindi

$$m_{fin}^2 = -\frac{1}{c^2} p_{tot}^\mu p_{tot, \mu} = \frac{4E^2}{c^4} - \frac{2p^2}{c^2} = 2m_0^2 + \frac{2E^2}{c^4} = 2m_0^2(1 + \gamma^2)$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usato la relazione tra E e p per eliminare p e nell'ultimo abbiamo riscritto l'energia in termini del γ (ovviamente ci sono modi diversi ma equivalenti di fare questo calcolo) Ora riscriviamo γ in termini della velocità $\beta = v/c$, ottenendo il risultato finale

$$m_{fin} = m_0 \sqrt{2(1 + \gamma^2)} = m_0 \sqrt{\frac{2(2 - \beta^2)}{1 - \beta^2}} = 2.75 m_0 = 2.75 \times 10^{-26} \text{ kg}$$