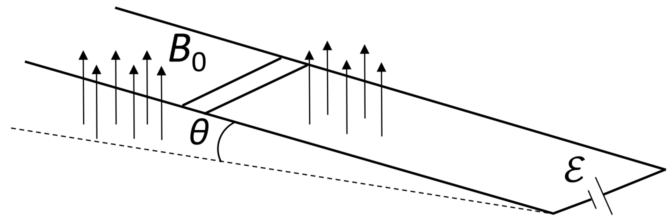
Recupero II prova *in itinere* – 22/1/2020

Elettromagnetismo e Ottica – Proff. Raffaele Velotta & Giovanni La Rana

Esercizio 1)



Due rotaie conduttrici, di resistenza trascurabile e distanti L=30 cm, sono disposte su una rampa inclinata di un angolo ϑ=5°. In basso, esse sono collegate a un generatore di forza elettromotrice, mentre sulla parte alta è appoggiata una sbarretta conduttrice di massa m=40 g e resistenza R=5 Ω. L'intero dispositivo è posto in un campo magnetico d'induzione di modulo B_0=0.55 T, uniforme e diretto verticalmente.

Supponendo che la sbarretta scivoli senza attrito sulle rotaie, determinare:

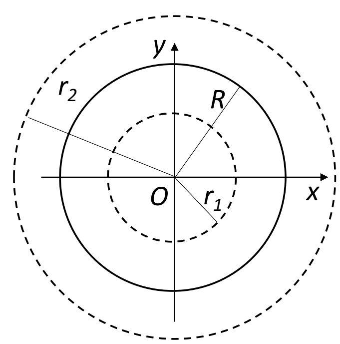
(a) Il valore della forza elettromotrice affinché la sbarretta rimanga ferma;

(b) La velocità limite v_∞ con cui la sbarretta scende se il generatore viene sostituito da un corto circuito.

(c) La potenza P dissipata nella sbarretta quando scende con la velocità a regime v_∞.

[*Punti domande: a = 3, b = 3, c = 3*].

Esercizio 2).



Un solenoide infinito ideale di raggio R=30 cm ha 100 spire per metro ed è percorso da una corrente $I(t) = I_0 \sin^2(\omega t)$ con I_0=1 A e ω=2 rad/s.

Ad una distanza dall'asse r_1=15 cm per t=1 s, determinare

(a) il modulo del campo elettrico indotto;

(b) il modulo della densità della corrente di spostamento **J**.

(c) Ripetere il calcolo dei punti (a) e (b) per un punto a distanza r_2=40 cm

[*Punti domande: a = 3, b = 3, c = 3*].

Memo: Permittività elettrica del vuoto: ε_0 = 8.9 pF/m; permeabilità magnetica del vuoto: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m;

Nota sulla valutazione: il punteggio del compito parte da una base minima di 12 punti.

SOLUZIONI

Esercizio 1)

Domanda (a)

La sbarretta è soggetta alla forza di gravità $\vec{F}_g$, nonché alla forza $\vec{F}_B$ dovuta al campo di induzione magnetica, essendo percorsa dalla corrente I erogata dal generatore. Affinché la sbarretta rimanga ferma deve verificarsi la condizione di equilibrio:

$$\vec{F}_g + \vec{F}_B = 0 \tag{1}$$

dove

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \quad e \quad \vec{F}_B = I\vec{L} \times \vec{B} \tag{2}$$

Proiettando la (1) lungo la direzione del piano inclinato, e considerando che $\vec{F}_B$ ha direzione orizzontale, con la componente lungo il piano inclinato opposta a quella della forza di gravità, e che il suo modulo è $F_B = ILB$, otteniamo:

$$mg \sin\vartheta = ILB \cos\vartheta = \frac{\mathcal{E}}{R} LB \cos\vartheta \tag{3}$$

da cui:

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{Rmg \sin\vartheta}{LB \cos\vartheta} = \frac{Rmg}{LB} \tan\vartheta = 1.04 \text{ V}} \tag{4}$$

Domanda (b)

Se il generatore viene sostituito da un corto circuito, la sbarretta inizierà a scendere lungo il piano inclinato a causa della forza peso. Poiché sarà percorsa da una corrente indotta I_i, dovuta alla variazione di flusso attraverso la spira ad area variabile, essa è soggetta anche alla forza magnetica $\vec{F}_B = I\vec{L} \times \vec{B}$, che si oppone al moto. La velocità di regime si raggiunge quando la componente della forza peso lungo il piano inclinato eguaglia l'analoga componente della forza magnetica:

$$mg \sin\vartheta = I_i LB \cos\vartheta \tag{5}$$

Tenuto conto che la direzione di $\vec{B}$ e la normale al piano del circuito formano un angolo ϑ pari a quello del piano inclinato, abbiamo:

$$I_i = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{d(BS\cos\vartheta)}{dt} = -\frac{BL\cos\vartheta}{R}\frac{dx}{dt} = -\frac{BLv}{R}\cos\vartheta \tag{6}$$

Inserendo la (6) nella (5), e tenendo opportunamente conto dei segni, abbiamo

$$mg \sin\vartheta = \frac{B^2 L^2 v_\infty \cos^2\vartheta}{R} \tag{7}$$

Dalla (7) otteniamo per la velocità a regime

$$\boxed{v_\infty = \frac{mgR \sin\vartheta}{B^2 L^2 \cos^2\vartheta} = 6.33 \text{ m/s}} \tag{8}$$

Domanda (c)

La potenza a regime è data da:

$$W = I_i^2 R \tag{9}$$

con la corrente I_i fornita dalla (5)

$$I_i = \frac{mg \sin\vartheta}{LB \cos\vartheta} = \frac{mg}{LB} \tan\vartheta \tag{10}$$

Inserendo la (10) nella (9) abbiamo

$$\boxed{W = \left(\frac{mg}{LB} \tan\vartheta\right)^2 R = 0.21 \text{ W}} \tag{11}$$

<u>**Esercizio 2).**</u>

La corrente variabile genera nel solenoide un campo di induzione magnetica variabile e quindi un campo elettrico indotto $\vec{E}(t)$, sia all'interno che all'esterno del solenoide stesso. La simmetria del sistema suggerisce che le linee del campo elettrico siano delle circonferenze centrate intorno all'asse del solenoide.

Domanda (a)

Per un punto interno al solenoide, per la terza equazione di Maxwell

$$\oint \vec{E}\,(r) \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

abbiamo

$$2\pi r E(r) = -\pi r^2 \frac{dB(t)}{dt} \tag{1}$$

da cui

$$E(r) = -\frac{r}{2}\frac{\partial B}{\partial t} \tag{2}$$

Considerando che:

$$B(t) = \mu_0 n I(t) = \mu_0 n I_0 \sin^2(\omega t) \tag{3}$$

la (2) fornisce:

$$E(r,t) = -\frac{r}{2}\mu_0 n I_0 2\omega \sin(\omega t) \cos(\omega t) \tag{4}$$

Per r_1=15 cm e t_1= 1 s, abbiamo

$$\boxed{\left|\boldsymbol{\vec{E}}(r_1, t_1)\right| = 1.43\ 10^{-5}\ \text{V/m}} \tag{5}$$

Domanda (b)

Dalla (2) e dalla (3) possiamo ricavare il modulo della densità della corrente di spostamento **J**:

$$J(r,t) = -\frac{\varepsilon_0}{2} r\mu_0 n I_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\sin^2(\omega t)) = r\varepsilon_0\mu_0 n I_0 \omega^2 \cos(2\omega t) \quad (6)$$

che, per r=r_1=15 cm e t=t_1= 1 fornisce

$$\boxed{J(r_1,t_1) = 4.36\ \times 10^{-16}\ \text{A/m}^2} \quad (7)$$

Domanda (c)

-Primo quesito

Per il punto a distanza r_2=40 cm > R, considerando che $\vec{B} = 0$ all'esterno del solenoide, la (1) fornisce

$$2\pi r E(r) = -\pi R^2 \frac{dB(t)}{dt} \quad (8)$$

da cui

$$\boxed{E(r,t) = -\frac{R^2}{2r}\frac{dB(t)}{dt} = -\frac{R^2}{2r}\mu_0 n I_0 2\omega \sin(\omega t)\cos(\omega t)} \quad (9)$$

Per r=r_2=40 cm e t=t_2=1 s otteniamo:

$$\boxed{\left|\vec{E}(r_2,t_2)\right| = 2.14\ \times 10^{-5}\ \text{V/m}} \quad (10)$$

-Secondo quesito

Analogamente al primo quesito, utilizziamo l'espressione del campo elettrico data dalla (9) per calcolare la densità di corrente di spostamento:

$$J(r,t) = \varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t} = \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{R^2}{2r}\frac{\partial B}{\partial t}\right) = -\frac{\varepsilon_0}{2r}R^2\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon_0}{2r}R^2\mu_0 n I_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\sin^2(\omega t)\right) \quad (11)$$

Dalla (13) otteniamo

$$\boxed{J(r,t) = \frac{\varepsilon_0}{r}R^2\mu_0 n I_0 \omega^2\cos(2\omega t)} \quad (12)$$

Per r=r_2=40 cm e t=t_2=1 s ricaviamo

$$\boxed{\left|\vec{J}(r_2,t_2)\right| = 6.54 \times 10^{-16}\ \text{A/m}^2} \quad (13)$$