Nota 3

Introduzione alle onde elettromagnetiche

Ipotesi

i) materiale lineare, isotropo, non dispersivo, omogeneo spazialmente e invariante temporalmente in tutto lo spazio
ii) $\varrho = 0$, $\vec{J} = 0$.

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \\ \vec{B} = \mu \vec{H} . \end{cases}$$

Equazioni del campo

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & (1) \\ \nabla \times \vec{B} = \mu \epsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} . & (2) \end{cases} \quad \text{in } V_\infty \text{ e } 0 < t$$

Condizioni iniziali

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}; t=0) &= \vec{E}_0(\vec{r}), \\ \vec{B}(\vec{r}; t=0) &= \vec{B}_0(\vec{r}). \end{aligned} \qquad (3)$$

$\vec{E}_0$ e $\vec{B}_0$ sono campi solenoidali.

Dalla (1) abbiamo

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B},$$

utilizzando la (2) otteniamo

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad (4)$$

E' evidente che $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ ha le dimensioni di una velocità.

Essendo $\nabla \cdot \vec{E}_0 = 0$ abbiamo che $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ per $t > 0$, quindi

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} + \nabla \nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

e l'equazione (4) diventa (equazione di d'Alembert)

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad (5)$$

Analogamente

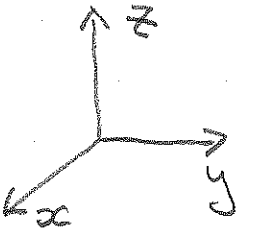
$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \qquad (6)$$

L'equazione (5) deve essere risolta con le condizioni iniziali

$$
\begin{cases}
\vec{E}(\vec{r};t=0) = \vec{E}_0\,, \\
\left.\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right|_{t=0} = +c^2\,\nabla\times B_0 .
\end{cases}
\qquad (7)
$$

Cerchiamo una soluzione del problema (5), (7) nel l'ipotesi in cui la direzione di $\vec{E}$ sia uniforme. Dovendo essere $\nabla\cdot\vec{E}=0$ per $t>0$ poniamo

$$
\vec{E}(\vec{r};t) = \hat{x}\,E_x(z;t) \qquad (8)
$$



In coordinate cartesiane $\nabla^2\vec{E} = \hat{x}\,\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$, quindi

$$
\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \qquad (9)
$$

Sostituendo la (8) nella equazione (1) otteniamo

$$
\nabla\times\vec{E} = \hat{y}\,\frac{\partial E_x}{\partial z} \qquad (10)
$$

quindi

$$
\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\hat{y}\,\frac{\partial E_x}{\partial z} . \qquad (11)
$$

Poniamo pertanto

$$\vec{B}(z;t) = \hat{y}\, B_y(z;t). \qquad (12)$$

Abbiamo

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z}. \qquad (13)$$

L'equazione (9) deve essere risolta con le condizioni iniziali

$$\begin{cases} E_x(z;t=0) = E_0(z), \\ \left.\frac{\partial E_x}{\partial t}\right|_{t=0} = -c^2 \frac{\partial B_0}{\partial z}. \end{cases} \qquad (14)$$

Ansatz

$$E_x(z;t) = E^{(\pm)}(z \pm vt) \qquad (15)$$

Calcoliamo $\partial^2 E_x/\partial^2 z$ e $\partial^2 E_x/\partial^2 t$ - Posto $\xi^{(\pm)} \equiv z \pm vt$ abbiamo:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{dE^{(\pm)}}{d\xi^{(\pm)}} \frac{\partial \xi^{(\pm)}}{\partial z} = \frac{dE^{(\pm)}}{d\xi^{(\pm)}}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{dE^{(\pm)}}{d\xi^{(\pm)}} \frac{\partial \xi^{(\pm)}}{\partial t} = \frac{dE^{(\pm)}}{d\xi^{(\pm)}}(\pm v)$$

quindi

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{d^2 E^{(\pm)}}{d\xi^{(\pm)2}} \qquad , \qquad \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{d^2 E^{(\pm)}}{d\xi^{(\pm)2}} v^2 \; . \qquad (16)$$

sostituendo le (16) nella (9) otteniamo

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{d^2 E^{(\pm)}}{d\xi^{(\pm)2}} = 0 \qquad (17)$$

La (15) è soluzione dell'equazione delle onde (9) per $v = c$. Data la linearità dell'equazione (9) la soluzione più generale è

$$E_x(z;t) = E^{(-)}(z-ct) + E^{(+)}(z+ct) \quad (18)$$

Le due funzioni $E^- = E^-(\xi^-)$ e $E^+ = E^+(\xi^+)$ dipendono solo dalle condizioni iniziali (14). Abbiamo:

$$\begin{cases} E^-(z) + E^+(z) = E_0(z) \; , \\ \left.\frac{\partial E^-}{\partial t}\right|_{t=0} + \left.\frac{\partial E^+}{\partial t}\right|_{t=0} = -c^2 \frac{\partial B_0}{\partial z} \; . \end{cases} \qquad (19)$$

Dato che

$$\frac{\partial E^\pm}{\partial t} = \pm c \, \frac{\partial E^\pm}{\partial z} \qquad (20)$$

la seconda condizione iniziale si può scrivere nel modo seguente

$$+c\frac{\partial E^-}{\partial z}\bigg|_{t=0} - c\frac{\partial E^+}{\partial z}\bigg|_{t=0} = c^2\frac{\partial B_0}{\partial z} \qquad (21)$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[E^-(z) - E^+(z)\right] = c\frac{\partial B_0}{\partial z} \rightarrow \qquad (22)$$

quindi (abbiamo posto uguale a zero la costante di integrazione)

$$E^-(z) - E^+(z) = cB_0(z)\,. \qquad (23)$$

Riassumendo abbiamo

$$\begin{cases} E^-(z) + E^+(z) = E_0(z)\,, \\ E^-(z) - E^+(z) = cB_0(z)\,. \end{cases} \qquad (24)$$

La soluzione del sistema (24) dà

$$\begin{cases} E^-(z) = \frac{1}{2}\left[E_0(z) + cB_0(z)\right], \\ E^+(z) = \frac{1}{2}\left[E_0(z) - cB_0(z)\right]. \end{cases} \qquad (25)$$

Dalla (13) è immediato che

$$B_y(z;t) = \frac{1}{c}\left[E^-(z-ct) - E^+(z+ct)\right]. \qquad (26)$$

Infatti abbiamo

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E^-}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial E^+}{\partial t} , \qquad (27)$$

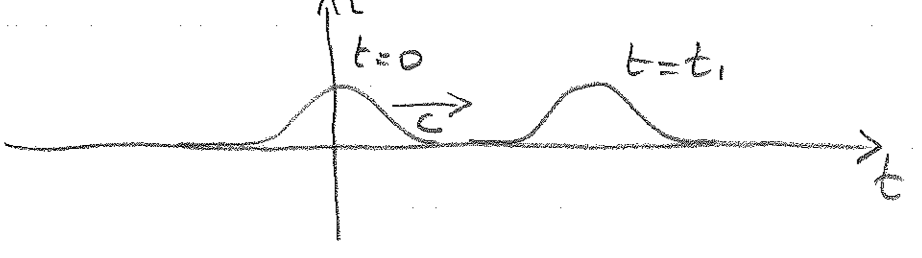
quindi

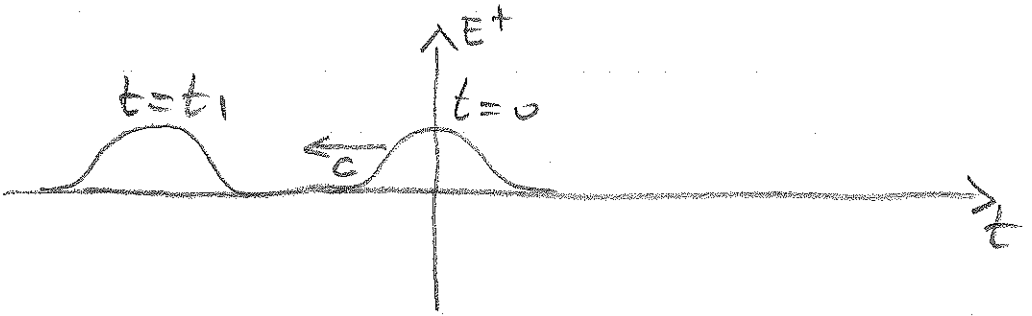
$$\frac{\partial}{\partial t}\left[B_y - \frac{1}{c}\left(E^- - E^+\right)\right] = 0 . \qquad (28)$$

Imponendo le condizioni iniziali (24) otteniamo la (26).

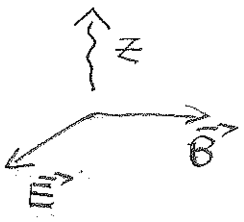
Commenti

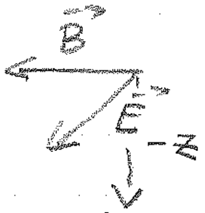
Il campo elettrico è la sovrapposizione di due termini: un'onda progressiva che viaggia alla velocità c nella direzione delle z positive, $E^- = E^-(z-ct)$; un'onda regressiva che viaggia sempre alla velocità c nella direzione delle z negative, $E^+ = E^+(z+ct)$.





Sia l'onda progressiva che la regressiva sono onde piane trasverse elettromagnetiche -





onda piana progressiva trasverso elettromagnetica

Onda piana regressiva trasverso elettromagnetica

L'onda si dice <u>piana</u> perché si propagano i piani $z = cost$, in cui i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono uniformi -

L'onda si dice <u>trasverso elettromagnetica</u> perché le direzioni di $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono ortogonali alle direzioni di propagazione -