Nota 6

Equazione delle onde in un conduttore

Ipotesi sul mezzo

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma \vec{E} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (2) \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} & (3) \end{cases}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \gamma \vec{E} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

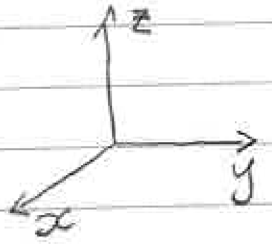
$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad (4)$$

Ipotesi (condizione iniziale) $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ - L'equazione (4) diventa

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{\epsilon} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu \epsilon} \nabla^2 \vec{E} = 0 \qquad (5)$$

Questa è l'equazione delle onde in un mezzo con perdite -
Consideriamo ora un'onda piana

$$\vec{E} = \hat{x} E_x(z;t) \qquad (6)$$



L'equazione (5) diventa

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial E_x}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = 0 \qquad (7)$$

dove $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ e $\tau = \epsilon/\gamma$ -

Questa equazione non ha soluzioni del tipo $F^{\pm}(z \pm ct)$ a causa della presenza del termine di derivata prima temporale che nasce dalla conduzione elettrica -
Per illustrare le conseguenze sulla propagazione della presenza della conduzione analizziamo il campo in regime sinusoidale nel tempo -

$$E_x(z;t) = E_m(z)\cos[\omega t + \varphi(z)]$$

$$\Downarrow \qquad (8)$$

$$E_x(z;t) = Re\{\underline{E}_x(z)\, e^{i\omega t}\}$$

dove

$$\underline{E}_x(z) = E_m(z)\, e^{i\varphi(z)} \qquad (9)$$

$\underline{E}_x = \underline{E}_x(z)$ è il fasore rappresentativo della componente E_x del campo -

$$E_x(z;t)=E_m(z)\cos[\omega t+\varphi(z)] \iff \underline{E}_x(z)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \iff \frac{d^2}{dz^2}\underline{E}_x$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} \iff i\omega \underline{E}_x$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \iff -\omega^2 \underline{E}_x$$

Regole di trasformazione

L'equazione (7) nel dominio dei fasori diventa

$$\frac{d^2\underline{E}}{dz^2}+\frac{1}{c^2}\left(\omega^2-i\frac{\omega}{\tau}\right)\underline{E}=0 \qquad (10)$$

ovvero

$$\frac{d^2\underline{E}}{dz^2}+\left(k^2-i\frac{k}{\ell}\right)\underline{E}=0 \qquad (11)$$

dove $k=\omega/c$ ed $\ell=c\tau$. La soluzione generale della (11) è

$$\underline{E}(z)=A^+e^{i\beta z}+A^-e^{-i\beta z} \qquad (12)$$

dove A^+ e A^- sono due costanti arbitrarie, e β è la cosiddetta costante di propagazione

$$\beta = \sqrt{k^2 - \frac{ik}{\ell}} = k\sqrt{1 - \frac{i}{k\ell}} - \qquad (13)$$

Nella (13) compare la radice quadrata di una grandezza complessa, essa indica il valore principale - Posto

$$1 - \frac{i}{k\ell} = \chi(k)\, e^{-i\phi(k)} \qquad (14)$$

dove

$$\chi = \sqrt{1 + \frac{1}{(k\ell)^2}} = \frac{1}{k\ell}\sqrt{(k\ell)^2 + 1} \qquad (15)$$

$$\phi = \operatorname{arctg}(1/k\ell) \qquad (16)$$

si ha

$$\beta = \left[1 + \frac{1}{(k\ell)^2}\right]^{1/4} e^{-i[\operatorname{arctg}(1/k\ell)]/2} \qquad (17)$$

ovvero

$$\beta = \sqrt{\chi}\,\left[\cos(\phi/2) - i\sin(\phi/2)\right] - \qquad (18)$$

L'angolo ϕ assume valori compresi tra 0 e $\pi/2$, quindi la parte immaginaria di β^+ è negativa e quella di β^- è positiva - Pertanto il termine

$e^{+i\beta z}$ diverge esponenzialmente per $z \to +\infty$, mentre $e^{-i\beta z}$ diverge esponenzialmente per $z \to -\infty$.
Dovendo richiedere la limitatezza della soluzione all'infinito si ha:

$$\underline{E}(z) = \begin{cases} A^+ e^{+i\beta z} & \text{per } z<0, \\ A^- e^{-i\beta z} & \text{per } z>0. \end{cases} \tag{19}$$

Consideriamo un buon conduttore come il rame. Si ha $\gamma \cong 5.8 \times 10^7$ S/m, $\epsilon \cong \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m, quindi $\tau = \epsilon_0/\gamma \cong 1.5 \times 10^{-19}$ s. Per l'acqua di mare si ha $\gamma \cong 3$ S/m, $\epsilon \cong 80\,\epsilon_0$, quindi $\tau \cong 2.4 \times 10^{-10}$ s. Di conseguenza per il rame $l \cong 4.5 \times 10^{-11}$ m e per l'acqua di mare $l \cong 8 \times 10^{-3}$ m. È evidente che in entrambi i casi abbiamo uno scenario in cui $kl \ll 1$, ovvero ($k = 2\pi/\lambda_0$) $2\pi l/\lambda_0 \ll 1$: per il rame $\lambda_0 \gg 10^{-10}$ m e per l'acqua di mare $\lambda_0 \gg 5 \times 10^{-2}$ m.
Dato che

$$k\sqrt{1 - \frac{i}{kl}} = k\sqrt{\frac{1}{kl}}\sqrt{kl - i}$$

$$\cong k\sqrt{\frac{1}{kl}}\sqrt{-i} \tag{20}$$

e $\sqrt{-i} = (1-i)\sqrt{2}/2$ otteniamo

$$\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\frac{k}{\sqrt{kl}} . \tag{21}$$

Le espressioni (19) diventano

$$\underline{E}(z) = \begin{cases} A^{+} e^{i\beta(\omega)z} e^{-|z|/\delta(\omega)} & z<0 \\ A^{-} e^{-i\beta(\omega)z} e^{-z/\delta(\omega)} & z>0 \end{cases} \qquad (22)$$

dove (ricordiamo che $K=\omega/c$)

$$\beta(\omega) \cong \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{K}{\sqrt{K\ell}} , \qquad (23)$$

$$\delta(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{K\ell}}{K} . \qquad (24)$$

Abbiamo un'onda progressiva per $z>0$ (o regressiva per $z<0$) con ampiezza che si attenua esponenzialmente.
La lunghezza d'onda è $2\pi/\beta$, quindi è diversa da quella che avremmo se fossimo nel vuoto. Se indichiamo con λ_0 la lunghezza d'onda nel vuoto e con λ_m la lunghezza d'onda nel metallo conduttore abbiamo

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_0} = \sqrt{4\pi f \tau} , \qquad (25)$$

$$\frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_m}{\lambda_0} . \qquad (26)$$

Nei buoni conduttori il campo elettromagnetico si propaga in uno strato di spessore dell'ordine di δ per poi attenuarsi completamente.
Dato che ℓ scala come $1/\gamma$ la lunghezza di propagazione δ tende a zero per $\gamma \to \infty$ e tende a zero anche per $\omega \to \infty$.
Il fatto che nel limite di $\gamma \to \infty$ la lunghezza di propagazione tenda a zero è in accordo con la proprietà che il campo elettrico e il campo magnetico sono uguali a zero in un conduttore elettrico perfetto ($\gamma = \infty$).
Consideriamo ora il limite opposto di cattivo conduttore, ovvero il materiale è un isolante non perfetto.
Abbiamo in questo limite ($k\ell \gg 1$ ovvero $\lambda_0 \ll \ell$)

$$p = \sqrt{k^2 - \frac{ik}{\ell}} \cong k\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{k\ell}\right) \qquad (27)$$

quindi

$$p \cong \left(k - \frac{1}{2\ell}\right). \qquad (28)$$

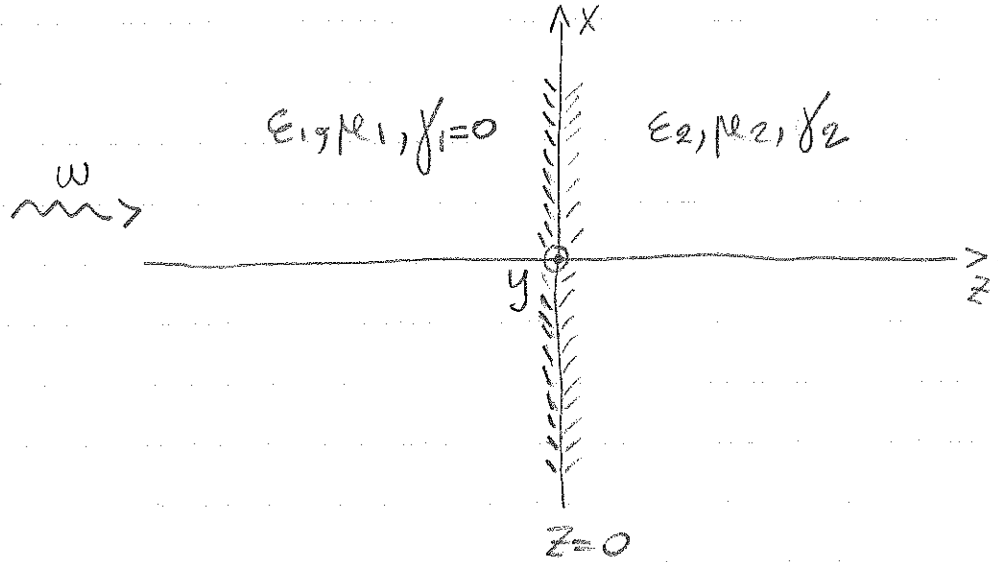
Le espressioni (19) diventano

$$\underline{E}(z) = \begin{cases} A^+ e^{ikz} e^{-|z|/2\ell} & \text{per } z < 0, \\ A^- e^{-ikz} e^{-z/2\ell} & \text{per } z > 0. \end{cases} \qquad (29)$$

In questo caso essendo $\ell \gg \lambda_0$ si ha propagazione con una lieve attenuazione dell'ampiezza.

Problema 2

Un'onda piana (sinusoidale) proviene da $z=-\infty$. Il mezzo nella regione $z<0$ ha costante dielettrica ε_1, permeabilità magnetica μ_1 e conducibilità elettrica uguale a zero e nella regione $z>0$ ha costante dielettrica ε_2, permeabilità magnetica μ_2 e conducibilità γ_2.



Questo problema può essere risolto agevolmente operando nel dominio della frequenza applicando il metodo dei fasori. Abbiamo

$$E_{1x}(z;t) = Re\{\underline{E}_{1x}(z)\, e^{i\omega t}\} \qquad z \leq 0$$

$$H_{1y}(z;t) = Re\{\underline{H}_{1y}(z)\, e^{i\omega t}\} \qquad z \leq 0$$

e

$$E_{2x}(z;t) = Re\{\underline{E}_{2x}(z)\, e^{i\omega t}\} \qquad z \geq 0$$

$$H_{2y}(z;t) = Re\{\underline{H}_{2y}(z)\, e^{i\omega t}\} \qquad z \geq 0$$

dove

$$\underline{E}_{1x}(z) = E_0 e^{-ik_1 z} + A_1^+ e^{ik_1 z} ,$$

$$\underline{H}_{1x}(z) = \frac{E_0}{Z_1} e^{-ik_1 z} - \frac{A_1^+}{Z_1} e^{ik_1 z} ,$$

$$Z_1 = \sqrt{\mu_1/\epsilon_1} ,$$

e

$$\underline{E}_{2x}(z) = A_2^- e^{-i\beta z} ,$$

$$\underline{H}_{2x}(z) = \frac{A_2^-}{Z_2} e^{-i\beta z} ,$$

$$\beta = \sqrt{k_2^2 - \frac{ik_2}{\ell_2}} , \quad Z_2 = \frac{\omega \mu_2}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \left(\sqrt{1 - \frac{i}{k_2 \ell_2}} \right)^{-1} ,$$

$\ell_2 = c\tau_2$, $\tau_2 = \epsilon_2/\gamma_2$ -

Imponendo la continuità delle componenti tangenti del campo elettrico e del campo magnetico $\vec{H}$ otteniamo:

$$A_1^+ = R E_0 ,$$

$$A_2^- = T E_0 ,$$

dove (ricordiamo)

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1},$$

$$T = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}.$$

Si evidenzia che l'impedenza Z_2 ha valori complessi. Per un buon conduttore si ha che

$$Z_2 \cong \frac{1}{\sqrt{-i}} Z_0 \sqrt{k_2 l_2}$$

dove Z_0 è l'impedenza caratteristica del vuoto. Nel limite $\gamma_2 \to \infty$ si ha $l_2 \to 0$, quindi $Z_2 \to 0$, $T \to 0$ e $R \to -1$. In presenza di un buon conduttore l'onda incidente proveniente da $z=-\infty$ viene praticamente riflessa. Nasce un'onda trasmessa, ma si estingue dopo pochi δ a causa della dissipazione. L'onda riflessa è accompagnata dalla presenza di uno strato di corrente in corrispondenza della superficie del conduttore indotto dal campo incidente. Lo strato ha uno spessore di pochi δ. Nel limite di $\gamma \to \infty$ la distribuzione del campo di densità di corrente tende alla distribuzione superficiale.