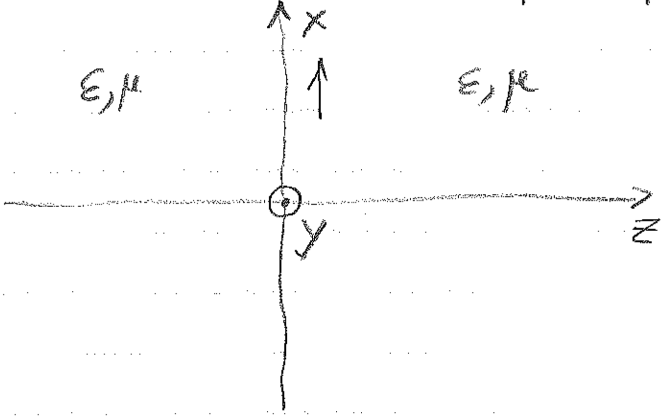
Nota 7

Determiniamo il campo elettromagnetico generato da una corrente superficiale distribuita uniformemente su un piano; il mezzo è lineare, isotropo, non dispersivo, ... e isolante. Non ci sono onde piane provenienti da $z=\pm\infty$.



$$\vec{J}(\vec{r};t) = \hat{x}\, J_x(z;t) \qquad , \qquad (1)$$

dove

$$J_x(z;t) = \delta(z)\, J_s(t) \qquad , \qquad (2)$$

$\delta(z)$ è la funzione delta di Dirac e $J_s(t)$ è una densità superficiale assegnata. Assumiamo $J_s(t)=0$ per $t<0$ e campo elettromagnetico nullo all'istante $t=0$.
Cerchiamo la soluzione $\vec{E}(\vec{r};t) = \hat{x}\, E_x(z;t)$.
L'equazione che governa $E_x = E_x(z;t)$ è

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial J_x}{\partial t} \, . \qquad (3)$$

La soluzione dell'equazione (3) tenendo conto della condizione di radiazione a $z=\pm\infty$ è

$$E_x(z;t) = \begin{cases} E^-(t-z/c) & z>0 \\ E^+(t+z/c) & z<0 \end{cases} \qquad (4)$$

Per il campo magnetico abbiamo

$$H_y(z;t) = \begin{cases} \frac{1}{Z} E^-(t-z/c) & z>0 \\ -\frac{1}{Z} E^+(t+z/c) & z<0 \end{cases} \qquad (5)$$

La componente tangente del campo elettrico è ovunque continua, quindi

$$E^-(t) = E^+(t) = \hat{E}(t) \text{ per ogni } t. \qquad (6)$$

Inoltre dall'equazione (3) abbiamo

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} dz = \frac{1}{c^2} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} dz + \mu \frac{dJ_s}{dt} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(z) dz \qquad (7)$$

dove ε è una lunghezza piccola a piacere ma diversa da zero. Dato che il campo elettrico si mantiene limitato si ha

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} dz = 0 \qquad (8)$$

quindi

$$\left.\frac{\partial E_x}{\partial z}\right|_{z=0^+} - \left.\frac{\partial E_x}{\partial z}\right|_{z=0^-} = \mu \frac{dj_s}{dt} \quad \text{per ogni } t. \quad (9)$$

Dato che

$$\left.\frac{\partial E_x}{\partial z}\right|_{z=0^+} = \left.\frac{\partial E^-}{\partial z}\right|_{z=0^+} = -\frac{1}{c}\frac{d\hat{E}}{dt} \quad , \qquad (10)$$

$$\left.\frac{\partial E_x}{\partial z}\right|_{z=0^-} = \left.\frac{\partial E^+}{\partial z}\right|_{z=0^-} = \frac{1}{c}\frac{d\hat{E}}{dt} \quad , \qquad (11)$$

dalla (9) abbiamo che

$$\frac{d\hat{E}}{dt} = -\frac{1}{2} Z \frac{dj_s}{dt} \qquad (12)$$

dove $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$ - Essendo per ipotesi

$$E_x(z;t=0) = 0 \quad , \quad H_y(z;t=0) = 0 \qquad (13)$$

dalla (12) otteniamo

$$\hat{E}(t) = -\frac{1}{2} Z \, j_s(t) \qquad (14)$$

dove ricordiamo che abbiamo ipotizzato $j_s(t=0)=0$.
Allora abbiamo:

$$E_x(z;t) = \begin{cases} -Z j_s(t - z/c) & 0 \le z\ ,\ 0 \le t \\ -Z j_s(t + z/c) & z \le 0\ ,\ 0 \le t \end{cases} \tag{15}$$

$$H_y(z;t) = \begin{cases} -j_s(t - z/c) & 0 < z\ ,\ 0 \le t \\ j_s(t + z/c) & z < 0\ ,\ 0 \le t\ . \end{cases} \tag{16}$$