Nota 8

8.1 Potenziali elettromagnetici

Equazioni di Maxwell in presenza di materia

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \qquad (1)$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad (2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t \qquad (3)$$
$$\nabla \times \vec{H} = \partial \vec{D}/\partial t + \vec{j} \qquad (4)$$

Relazioni costitutive

Condizioni di regolarità all'infinito

Condizioni iniziali

Essendo il campo di induzione magnetica solenoidale in tutto lo spazio esiste almeno un campo vettoriale $\vec{A}$ tale che

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \qquad (5)$$

Il campo $\vec{A}$ prende il nome di potenziale vettore magnetico.

E' evidente che esiste una infinità di potenziali vettori magnetici di un campo magnetico.

$$\vec{A} \Rightarrow \vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi \Rightarrow \vec{B}' = \nabla\times(\vec{A}+\nabla\chi) = \nabla\times\vec{A} = \vec{B} \qquad (6)$$

Il potenziale vettore magnetico di un campo $\vec{B}$ è determinato a meno di un campo irrotazionale arbitrario.

L'arbitrarietà del campo $\nabla\chi$ è un grado di libertà che può essere sfruttato in diversi modi come vedremo.

Sostituendo l'espressione (5) nell'equazione (3) abbiamo

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{A}$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla\times\vec{E} = \nabla\times\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla\times\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \qquad (7)$$

quindi deve essere necessariamente

$$\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla\Phi \qquad (8)$$

dove Φ è un campo scalare (il segno meno è una convenzione) che prende il nome di potenziale scalare elettrico.

Il campo di induzione magnetica $\vec{B}$ e il campo elettrico $\vec{E}$ rappresentati attraverso i potenziali elettromagnetici $(\vec{A}, \Phi)$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \qquad (9)$$
$$\vec{E} = -\partial \vec{A}/\partial t - \nabla \Phi \qquad (10)$$

verificano le equazioni (2) e (3) per ogni coppia $(\vec{A}, \Phi)$.

8.2 Equazioni per i potenziali elettromagnetici in un mezzo lineare, isotropo, non dispersivo, tempo invariante, omogeneo e non conduttore

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \qquad (11)$$

Le equazioni (1) e (4) diventano

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho_s/\epsilon \qquad (12)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{j}_s \qquad (13)$$

dove $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ e $(\rho_s, \vec{j}_s)$ sono assegnate. Per la conservazione della carica si ha il vincolo

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j}_s \qquad (14)$$

Sostituendo le (9) e (10) nelle (12) e (13) otteniamo

$$\nabla \cdot \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \Phi \right) = \rho_s / \epsilon \quad , \qquad (15)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \Phi \right) + \mu \vec{j}_s \quad , \qquad (16)$$

ovvero (i potenziali sono sufficientemente regolari da potere invertire gli operatori $\nabla \cdot$ e $\partial/\partial t$ e gli operatori $\partial/\partial t$ e ∇)

$$-\nabla^2 \Phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = \rho_s / \epsilon \quad , \qquad (17)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \nabla \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \mu \vec{j}_s \, . \qquad (18)$$

Ricordando che $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A} + \nabla \nabla \cdot \vec{A}$ otteniamo

$$-\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \mu \vec{j}_s \, . \qquad (19)$$

In conclusione i potenziali elettromagnetici nel materiale considerato sono governati dalle equazioni

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi + \dfrac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = -\dfrac{1}{\epsilon} \rho_s & , (20) \\ \nabla^2 \vec{A} - \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\mu \vec{j}_s & . (21) \end{cases}$$

Ricordiamo che abbiamo ancora un grado di libertà a disposizione: il potenziale vettore magnetico è definito a meno di un campo irrotazionale arbitrario. Ciò è equivalente ad affermare che di $\vec{A}$ non è stata fissata la divergenza.

Condizione di gauge

Tra le infinite possibili scelte due sono di particolare rilievo.

- gauge di Coulomb

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \qquad (22)$$

Questa scelta dà le seguenti equazioni per i potenziali elettromagnetici

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{1}{\epsilon} \rho_s \quad , \qquad (23)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\mu \vec{j}_s \quad . \qquad (24)$$

Le equazioni per i due potenziali hanno strutture diverse e non sono invarianti per trasformazioni di Lorentz. In particolare, l'equazione per Φ è quella che avremmo se fossimo in regime stazionario. Questa è la ragione per cui la (22) prende il nome di gauge di Coulomb. L'equazione per il potenziale vettore magnetico dipende dal potenziale scalare elettrico.

- gauge di Lorentz

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad (25)$$

Con questa scelta della divergenza di $\vec{A}$ otteniamo le seguenti equazioni per i potenziali elettromagnetici

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon}\rho_S \,, \qquad (26)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}_S \,. \qquad (27)$$

Le equazioni (26) e (27) sono disaccoppiate, sono entrambe equazioni delle onde (equazioni di d'Alembert) e sono non omogenee. Esse sono invarianti per trasformazioni di Lorentz.

8.3 Potenziali elettromagnetici nella gauge di Lorentz

Ora risolviamo le equazioni (26) e (27). Assumiamo che $\rho_S(\vec{r};t)=0$ e $\vec{J}_S(\vec{r};t)=0$ per $t<0$ e i potenziali elettromagnetici sono uguali a zero ovunque

per $t<0$, $\vec{A}(\vec{r};t)=0$, $\Phi(\vec{r};t)=0$ per $t\leq 0$ -
Inoltre come condizione al contorno all'infinito assumiamo la condizione di radiazione verso l'infinito: essendo le sorgenti limitate al finito all'infinito esiste solo un'onda che si propaga verso l'infinito -

8.3.1 Calcolo del potenziale scalare elettrico

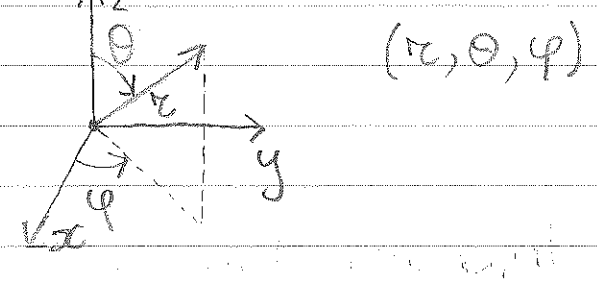
Utilizzando la proprietà di campionamento della funzione delta di Dirac nello spazio a tre dimensioni abbiamo

$$\rho_s(\vec{r};t)=\int \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\rho_s(\vec{r}\,';t)\,dV' - \qquad (28)$$

Essendo l'equazione (26) lineare e a coefficienti costanti rispetto allo spazio e al tempo possiamo risolverla attraverso la soluzione del problema ausiliario

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\frac{1}{\epsilon}\,\delta(\vec{r})\,Q(t) \qquad (29)$$

dove $Q(t)=0$ $t\leq 0$ e $\phi(\vec{r};t)=0$ per $t\leq 0$
e condizione di radiazione all'infinito -



Risolviamo equazione (29) utilizzando un sistema di coordinate sferiche con l'origine nel punto in cui è applicato l'impulso di Dirac.
Per la simmetria sferica del problema ϕ non dipende dalle coordinate θ e φ, $\phi = \phi(r;t)$. Pertanto abbiamo

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) \qquad (30)$$

quindi l'equazione (29) diventa ($0 \leq r < \infty$ e $0 < t$)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon}\,\delta(\vec{r})\,Q(t) \qquad (31)$$

Cerchiamo la soluzione nella forma (ansatz)

$$\phi(r;t) = \frac{1}{4\pi\epsilon r}\,F(r;t) \qquad (32)$$

Dato che

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\left(-\frac{1}{r^2}F + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right) \qquad (33)$$

e

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\left(2\frac{1}{r^3}F - \frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\right) \qquad (34)$$

abbiamo

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}$$

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon}\left\{\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{2}{r^3}F\right]+\frac{2}{r}\left[-\frac{1}{r^2}F+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right]\right\} \quad (35)$$

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon r}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$$

Pertanto l'equazione per $F(r;t)$ è

$$\frac{1}{4\pi\epsilon r}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right)=-\frac{1}{\epsilon}\delta(\vec{r})Q(t) \quad (36)$$

che per $0<r<\infty$ si riduce all'equazione di d'Alembert monodimensionale

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=0 \quad (37)$$

La soluzione generale di questa equazione è

$$F(r;t)=F^-(t-r/c)+F^+(t+r/c) \quad (38)$$

dove $F^+(\cdot)$ e $F^-(\cdot)$ sono funzioni arbitrarie. Il termine $F^-(t-r/c)$ rappresenta un'onda sferica progressiva che propaga verso l'infinito con velocità c, mentre $F^+(t+r/c)$ rappresenta una

onda sferica regressiva che proviene dall'infinito.
Per la condizione di radiazione all'infinito il termine F^+ è nullo, quindi

$$F(r,t) = F^-(t - r/c) \qquad (39)$$

e di conseguenza

$$\phi(r,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon r} F^-(t - r/c) . \qquad (40)$$

Per determinare F^- bisogna imporre l'equazione (29) (o (31)) nell'intorno di $\vec{r} = 0$ (l'equazione (37) è definita nel problema in esame per $0 < r < \infty$).
Consideriamo l'integrale di volume di entrambi i membri dell'equazione (31) su di una sfera con centro nell'origine e raggio arbitrariamente R_ε

$$\int_{V_\varepsilon} \nabla^2 \phi \, dV - \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \int_{V_\varepsilon} \phi \, dV = -\frac{1}{\epsilon} Q(t) \int_{V_\varepsilon} \delta(\vec{r}) \, dV \quad (41)$$

Dato che (teorema di Gauss)

$$\int_{V_\varepsilon} \nabla^2 \phi \, dV = \oint_{S_\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial r} dS$$

dove S_ε è la frontiera di V_ε, essendo nel nostro caso

$$\int_{V_\varepsilon} (\cdot)\, dV = 4\pi \int_0^{R_\varepsilon} (\cdot)\, r^2 dr \,, \quad \oint_{S_\varepsilon} (\cdot)\, ds = 4\pi R_\varepsilon^2 (\cdot)\Big|_{R_\varepsilon}$$

e $\int_{V_\varepsilon} \delta(\vec{r})\, dV = 1$ la (41) si riduce a

$$4\pi R_\varepsilon^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}\Big|_{R_\varepsilon} - \frac{4\pi}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{R_\varepsilon} \phi\, r^2 dr = -\frac{Q(t)}{\varepsilon} \qquad (42)$$

dove dobbiamo poi far tendere a zero R_ε - Visto che

$$\lim_{R_\varepsilon \to 0} 4\pi R_\varepsilon^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}\Big|_{R_\varepsilon} = -\frac{F^-(t)}{\varepsilon} \,, \qquad (43)$$

$$\lim_{R_\varepsilon \to 0} \int_0^{R_\varepsilon} r^2 \phi\, dr = 0 \,, \qquad (44)$$

la (42) dà

$$F^-(t) = Q(t) - \qquad (45)$$

Pertanto la soluzione dell'equazione (29) che verifica la condizione di radiazione all'infinito è

$$\phi(\vec{r};t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon r} Q(t - r/c) - \qquad (46)$$

Se all'ipotesi $Q(t)=0$ per $t\leq 0$ aggiungiamo anche che $dQ/dt=0$ per $t\leq 0$ abbiamo che $\phi(\vec{r};t)$ e $\partial\phi/\partial t$ sono entrambi uguali a zero per $t\leq 0$.

Abbiamo risolto il problema ausiliario (29). Il problema di nostro interesse consiste nel risolvere l'equazione

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon}\int \delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\rho_s(\vec{r}';t)\,dV' \qquad (47)$$

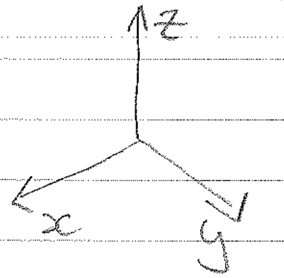
Dato che l'equazione (47) è lineare e a coefficienti costanti rispetto alle coordinate spaziali la soluzione è

$$\Phi(\vec{r};t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int \frac{\rho_s(\vec{r}';t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dV' \qquad (48)$$

Abbiamo utilizzato la soluzione del problema ausiliario (29).

8.3.2 Calcolo del potenziale vettore magnetico

Il potenziale vettore magnetico, soluzione dell'equazione (27), può essere determinato a partire dalla (48).



In un sistema di coordinate cartesiane l'equazione (27) dà

$$\nabla^2 A_\alpha - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial t^2} = -\mu j_{s\alpha}(\vec{r};t) \quad \alpha = x,y,z \quad (49)$$

dove A_x, A_y, A_z e j_{sx}, j_{sy}, j_{sz} sono le componenti cartesiane dei campi $\vec{A}$ e $\vec{j}_s$ rispettivamente. E' immediato che

$$A_\alpha(\vec{r};t) = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{j_{s\alpha}(\vec{r}\,';t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dV' \quad (50)$$

con $\alpha = x, y, z$, verifica l'equazione (49) nonché le condizioni di radiazione all'infinito. Essendo per ipotesi $\vec{j}_s(\vec{r};t) = 0$ per $t \leq 0$ si ha anche che $A_\alpha(\vec{r};t) = 0$ per $t \leq 0$. Utilizzando la notazione vettoriale intrinseca la (50) dà

$$\vec{A}(\vec{r};t) = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\vec{j}_s(\vec{r}\,';t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dV' \quad (51)$$

Essendo per ipotesi $\rho_s(\vec{r};t) = 0$, $\vec{j}_s(\vec{r};t) = 0$ per $t \leq 0$ i potenziali elettromagnetici sono uguali a zero per $t \leq 0$ e quindi il campo elettromagnetico è nullo per $t < 0$.

Commento

I potenziali elettromagnetici ritardati

$$\begin{cases} \Phi(\vec{r};t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon}\displaystyle\int \dfrac{\rho_s(\vec{r}\,';t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV', \\ \vec{A}(\vec{r};t) = \dfrac{\mu}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{\vec{j}_s(\vec{r}\,';t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV', \end{cases} \tag{52}$$

sono stati ottenuti utilizzando la gauge di Lorenz. Lasciamo al lettore la verifica che effettivamente le espressioni verificano la gauge di Lorenz. La legge di conservazione della carica gioca un ruolo fondamentale.