Schema di calcolo del modello di previsione coorti-componenti

1. In generale

Il metodo coorti-componenti, che si può far risale alla fine del XIX secolo (Cannan, 1895), è quello più comunemente utilizzato nelle previsioni di popolazione ma è anche uno strumento utile per fare simulazioni che consentano di comprendere, attraverso la verifica empirica, il ruolo giocato nell'evoluzione demografica dalla struttura per età e dalle componenti della dinamica di popolazione (mortalità, fecondità e migrazioni).

L'approccio consiste nel suddividere la popolazione in sottogruppi che risultano esposti in modo differente ai rischi di fecondità, mortalità e migrazioni, calcolando separatamente per ciascun gruppo i cambiamenti nel tempo. Poiché in ogni popolazione i rischi variano quantomeno per sesso ed età ecco che i sottogruppi saranno determinati quantomeno in base a questi due caratteri. Altri possibili caratteri di distinzione sono la razza, la cittadinanza, la localizzazione territoriale (per regioni o distintamente per aree urbane e rurali), il livello d'istruzione o la religione.

Si tratta di un modello temporale discreto di dinamica delle popolazioni: le caratteristiche della popolazione sono calcolate solo con riferimento ad alcuni istanti di tempo separati tra loro da intervalli temporali di uguale ampiezza. Se le classi di età sono annuali anche gli intervalli tra istanti successivi di previsione sono annuali (previsioni per classi di età e periodi annuali), se le classi sono di ampiezza n anche gli intervalli di previsione sono di ampiezza n (in genere n=5, in questo caso si tratta di previsioni per classi di età e periodi quinquennali). Per ogni intervallo di previsione, il metodo di base prevede tre passi:

a) proiezione distintamente per classi di età della popolazione esistente all'inizio dell'intervallo allo scopo di stimare il numero delle persone ancora in vita all'inizio dell'intervallo successivo;

b) stima delle nascite nell'intervallo di previsione derivanti da ogni sottogruppo di popolazione in età riproduttiva, somma delle nascite di ciascun sottogruppo e calcolo dei nati che sopravvivono all'inizio dell'intervallo successivo;

c) aggiunta degli immigrati e sottrazione degli emigrati in ogni sottogruppo durante l'intervallo, calcolo del numero di nascite derivanti dagli immigrati durante l'intervallo, proiezione del numero di migranti e dei loro nati sopravviventi all'inizio del periodo successivo.

2. Schema di previsione in assenza di migrazioni

Nel caso di popolazioni chiuse (in assenza di migrazioni) due sono le tappe essenziali nello schema di previsione:

a) proiezione della popolazione presente ad inizio di ciascun periodo alla fine del periodo di previsione (annuale o quinquennale);

b) stima delle nascite nell'intervallo di previsione e calcolo dei nati che sopravvivono all'inizio dell'intervallo successivo.

Se la popolazione è distinta solo per sesso ed età, il primo passo si basa sulla disponibilità di due tavole di mortalità, una per i maschi e l'altra per le femmine, valide per l'intervallo di previsione attraverso le quali ottenere i coefficienti di sopravvivenza che consentono di proiettare la popolazione dall'inizio dell'anno base all'inizio del periodo immediatamente successivo.

Visto che si adotta un modello a "dominanza femminile", con la previsione delle nascite che è determinata sulla base dell'ammontare delle generazioni femminili in età feconda e dei valori previsti dei tassi specifici di fecondità delle donne, la formalizzazione seguente sarà riferita per semplicità alla popolazione femminile.

Nel caso di previsioni per periodi di tempo e per classi di età annuali la formula di calcolo è la seguente:

$$ {}^{F}P_{x,t+1} = {}^{F}P_{x-1,t} \cdot \frac{{}^{F}L_x}{{}^{F}L_{x-1}} = {}^{F}P_{x-1,t} \cdot {}^{F}p_{x-1} \qquad [1] $$

per la popolazione già presente all'inizio dell'anno t di previsione in una qualsiasi classe di età annuale. Per l'ultima classe aperta si utilizza invece la procedura seguente:

$$ {}^{F}P_{80+,t+1} = {}^{F}P_{79,t} \cdot \frac{{}^{F}L_{80}}{{}^{F}L_{79}} + {}^{F}P_{80+,t} \cdot \frac{{}^{F}T_{81}}{{}^{F}T_{80}} = {}^{F}P_{79,t} \cdot {}^{F}p_{79} + {}^{F}P_{80+,t} \cdot {}^{F}p_{80+} \qquad [2] $$

Mentre la popolazione nella prima classe di età (0 anni compiuti) all'inizio dell'anno t+1 si ottiene nel modo seguente:

$$ {}^{F}P_{0,t+1} = {}^{F}N_T \cdot \frac{{}^{F}L_0}{l_0} = {}^{F}N_T \cdot {}^{F}p_N \qquad [3] $$

Pertanto, per la determinazione della popolazione nella prima classe di età è necessario determinare preventivamente il numero delle nascite nel periodo di previsione, ammontare che viene ottenuto utilizzando la serie dei tassi specifici di fecondità:

$$ {}^{F}N_T = \frac{1}{1+RSN} \cdot N_T = \frac{1}{1+RSN} \cdot \sum_{x=\alpha}^{\beta-1} \frac{1}{2} \cdot f_x \cdot \left({}^{F}P_{x,t} + {}^{F}P_{x-1,t} \cdot \frac{{}^{F}L_x}{{}^{F}L_{x-1}}\right) \qquad [4] $$

dove il rapporto dei sessi alla nascita (RSN) non è altro che una costante biologica pari in media a 1,06 nati maschi per ogni nata femmina. Il valore corrispondente a 1/(1+RSN) non esprime altro che la frazione media di nate femmine pari a circa 0,485. È in questo modo che si procede a suddividere i nati previsti tra maschi e femmine.

Nel caso di previsioni per **periodi di tempo e per classi di età quinquennali** le formule di calcolo si modificano nel modo di seguito riportato:

$$ {}^{F}_{5}P_{x,t+5} = {}^{F}_{5}P_{x-5,t} \cdot \frac{{}^{F}_{5}L_x}{{}^{F}_{5}L_{x-5}} \qquad [1.bis] $$

$$ {}^{F}P_{80+,t+5} = {}^{F}_{5}P_{75,t} \cdot \frac{{}^{F}_{5}L_{80}}{{}^{F}_{5}L_{75}} + {}^{F}P_{80+,t} \cdot \frac{{}^{F}T_{85}}{{}^{F}T_{80}} \qquad [2.bis] $$

$$ {}^{F}_{5}P_{0,t+5} = {}^{F}N_{T-T+4} \cdot \frac{{}^{F}_{5}L_0}{5 \cdot l_0} \qquad [3.bis] $$

$$ {}^{F}N_{T-T+4} = \frac{1}{1+RSN} \cdot N_{T-T+4} = \frac{1}{1+RSN} \cdot \sum_{x=\alpha}^{\beta-1} \frac{5}{2} \cdot {}_5f_x \cdot ({}_5^FP_{x,t} + {}_5^FP_{x-5,t} \cdot \frac{{}_5^FL_x}{{}_5^FL_{x-5}}) \qquad [4.bis] $$

3. Schema di previsione in presenza di migrazioni (previsione degli ammontari assoluti)

Un approccio per modellare il processo migratorio continuo è quello di dividere per ciascuna classe di età (annuale o quinquennale) il numero di immigrati (netti) durante l'intervallo considerato in due quantità discrete, assumendo che metà dei migranti si spostano esattamente all'inizio del periodo dell'intervallo di proiezione e l'altra metà si muove alla fine dell'intervallo. Questo approccio si adatta meglio al caso di paesi/regioni in cui l'immigrazione è più consistente dell'emigrazione e quindi risulta più opportuno stimare i flussi di arrivo o i saldi migratori in valore assoluto e come componente esogena, dipendendo spesso dalle politiche di contingentamento degli ingressi.

Nel caso in cui vengono determinati per i periodi di previsione i saldi migratori per sesso ed età bisogna inglobare questi aggregati assoluti nella procedura di previsione della popolazione. Per ciascuna classe di età ci sono quindi due termini addizionali nel numero di sopravviventi alla fine di ogni intervallo di previsione:

- metà degli immigrati tra le età da x a x+1 (o da x a x+4 per periodi e classi quinquennali) sono aggiunti direttamente alla fine dell'intervallo;
- metà degli immigrati tra le età da x-1 a x (o da x-5 a x-1) sono addizionati all'inizio dell'intervallo e sopravviventi all'età da x a x+1 (o da x a x+4) anni compiuti.

Per **periodi e classi annuali** la formula di calcolo dei sopravviventi all'inizio del periodo successivo diviene la seguente:

$$ {}^{F}P_{x,t+1} = ({}^{F}P_{x-1,t} + \frac{{}^{F}SM_{x-1,T}}{2}) \cdot \frac{{}^{F}L_x}{{}^{F}L_{x-1}} + \frac{{}^{F}SM_{x,T}}{2} \qquad [5] $$

Questa procedura di calcolo può essere adottata all'interno di una generazione, quella costituita dalle persone che all'inizio dell'anno t hanno x-1 anni compiuti (generazione t-x). In questo caso si assume che l'immigrazione netta di persone appartenenti a tale generazione (SM^{t-x}) avvenga per metà ad inizio periodo quindi in età x-1 e per metà a fine periodo cioè in età x. Solo agli immigrati ad inizio periodo, esposti al rischio di morire nell'area di adozione, viene applicato il coefficiente di sopravvivenza, la formula di calcolo può essere riscritta come di seguito:

$$ {}^{F}P_{x,t+1} = {}^{F}P_{x-1,t} \cdot {}^{F}p_{x-1} + \frac{{}^{F}SM_T^{t-x}}{2}(1 + {}^{F}p_{x-1}) = {}^{F}P_{x-1,t} \cdot p_{x-1} + {}^{F}SM_T^{t-x} \cdot (1 - q_{x-1}/2) $$

Per l'ultima classe aperta la formula di calcolo risulta così integrata:

$$ {}^{F}P_{80+,t+1} = ({}^{F}P_{79,t} + \frac{{}^{F}SM_{79,T}}{2}) \cdot \frac{{}^{F}L_{80}}{{}^{F}L_{79}} + ({}^{F}P_{80+,t} + \frac{{}^{F}SM_{80+,T}}{2}) \cdot \frac{{}^{F}T_{81}}{{}^{F}T_{80}} + \frac{{}^{F}SM_{80+,T}}{2} $$

Nella determinazione della popolazione nella prima classe di età vanno considerati non solo gli immigrati netti a zero anni ma anche le nascite che derivano dalle donne giunte in età riproduttiva. Le formule di calcolo sono le seguenti:

$$^{F}P_{0,t+1} = {}^{F}N_T \cdot \frac{^{F}L_0}{l_0} + \frac{^{F}SM_{0,T}}{2}$$

con i nati nel periodo di previsione pari a:

$$N_T = \sum_{x=\alpha}^{\beta-1} f_x \cdot \left[\tfrac{1}{2} \cdot ({}^{F}P_{x,t} + {}^{F}P_{x-1,t} \cdot \frac{^{F}L_x}{^{F}L_{x-1}}) + \tfrac{1}{2} \cdot (\frac{^{F}SM_{x,T}}{2} + \frac{^{F}SM_{x-1,T}}{2} \cdot \frac{^{F}L_x}{^{F}L_{x-1}}) \right]$$

La parte aggiuntiva rispetto allo schema senza migrazioni è quindi uguale, per i nati da donne di età x, all'ammontare seguente:

$$\Delta N_{x,T} = \frac{1}{4} \cdot f_x \cdot ({}^{F}SM_{x,T} + {}^{F}SM_{x-1,T} \cdot \frac{^{F}L_x}{^{F}L_{x-1}}).$$

Nelle previsioni **per periodi di tempo e classi di età quinquennali** le formule appena proposte, che tengono conto anche della componente migratoria, possono essere riscritte come segue:

$${}^{F}_{5}P_{x,t+5} = ({}^{F}_{5}P_{x-5,t} + \frac{{}^{F}_{5}SM_{x-5,T-T+4}}{2}) \cdot \frac{{}^{F}_{5}L_x}{{}^{F}_{5}L_{x-5}} + \frac{{}^{F}_{5}SM_{x,T-T+4}}{2}$$

$${}^{F}P_{80+,t+5} = ({}^{F}_{5}P_{75,t} + \frac{{}^{F}_{5}SM_{75,T-T+4}}{2}) \cdot \frac{{}^{F}_{5}L_{80}}{{}^{F}_{5}L_{75}} + ({}^{F}P_{80+,t} + \frac{{}^{F}_{\infty}SM_{80,T-T+4}}{2}) \cdot \frac{{}^{F}T_{85}}{{}^{F}T_{80}} + \frac{{}^{F}_{\infty}SM_{80,T-T+4}}{2}$$

$${}^{F}_{5}P_{0,t+5} = {}^{F}N_{T-T+4} \cdot \frac{{}^{F}_{5}L_0}{5 \cdot l_0} + \frac{{}^{F}_{5}SM_{0,T-T+4}}{2}$$

$$N_{T-T+4} = \sum_{x=\alpha}^{\beta-5} 5 \cdot {}_{5}f_x \cdot \left[\tfrac{1}{2} \cdot ({}^{F}_{5}P_{x,t} + {}^{F}_{5}P_{x-5,t} \cdot \frac{{}^{F}_{5}L_x}{{}^{F}_{5}L_{x-5}}) + \tfrac{1}{2} \cdot (\frac{{}^{F}_{5}SM_{x,T-T+4}}{2} + \frac{{}^{F}_{5}SM_{x-5,T-T+5}}{2} \cdot \frac{{}^{F}_{5}L_x}{{}^{F}_{5}L_{x-5}}) \right]$$

$$\Delta N_{x,T-T+4} = \frac{5}{4} \cdot {}_{5}f_x \cdot ({}^{F}_{5}SM_{x,T-T+4} + {}^{F}_{5}SM_{x-5,T-T+4} \cdot \frac{{}^{F}_{5}L_x}{{}^{F}_{5}L_{x-5}})$$

L'approssimazione proposta, che evita di far ricorso ad una metodologia più complessa, è molto accurata se l'immigrazione (o il saldo migratorio) risulta uniformemente distribuito nell'intervallo di previsione e non varia bruscamente tra un periodo e il successivo.

Sintesi degli schemi di previsione

A. Popolazione chiusa	
A1. Classi e periodi annuali	**A2. Classi e periodi quinquennali**
${}^{F}P_{x,t+1} = {}^{F}P_{x-1,t} \cdot \frac{{}^{F}L_{x}}{{}^{F}L_{x-1}}$	${}^{F}_{5}P_{x,t+5} = {}^{F}_{5}P_{x-5,t} \cdot \frac{{}^{F}_{5}L_{x}}{{}^{F}_{5}L_{x-5}}$
${}^{F}P_{80+,t+1} = {}^{F}P_{79,t} \cdot \frac{{}^{F}L_{80}}{{}^{F}L_{79}} + {}^{F}P_{80+,t} \cdot \frac{{}^{F}T_{81}}{{}^{F}T_{80}}$	${}^{F}P_{80+,t+5} = {}^{F}_{5}P_{75,t} \cdot \frac{{}^{F}_{5}L_{80}}{{}^{F}_{5}L_{75}} + {}^{F}P_{80+,t} \cdot \frac{{}^{F}T_{85}}{{}^{F}T_{80}}$
${}^{F}P_{0,t+1} = {}^{F}N_{T} \cdot \frac{{}^{F}L_{0}}{l_{0}}$	${}^{F}_{5}P_{0,t+5} = {}^{F}N_{T-T+4} \cdot \frac{{}^{F}_{5}L_{0}}{5 \cdot l_{0}}$
${}^{F}N_{T} = \frac{1}{1+RSN} \cdot \sum_{x=\alpha}^{\beta-1} \frac{1}{2} \cdot f_{x} \cdot ({}^{F}P_{x,t} + {}^{F}P_{x-1,t} \cdot \frac{{}^{F}L_{x}}{{}^{F}L_{x-1}})$	${}^{F}N_{T-T+4} = \frac{1}{1+RSN} \cdot \sum_{x=\alpha}^{\beta-1} \frac{5}{2} \cdot {}_{5}f_{x} \cdot ({}^{F}_{5}P_{x,t} + {}^{F}_{5}P_{x-5,t} \cdot \frac{{}^{F}_{5}L_{x}}{{}^{F}_{5}L_{x-5}})$
B. Popolazione aperta (saldo migratorio in valore assoluto)	
B1. Classi e periodi annuali	**B2. Classi e periodi quinquennali**
${}^{F}P_{x,t+1} = ({}^{F}P_{x-1,t} + \frac{{}^{F}SM_{x-1,T}}{2}) \cdot \frac{{}^{F}L_{x}}{{}^{F}L_{x-1}} + \frac{{}^{F}SM_{x,T}}{2}$	${}^{F}_{5}P_{x,t+5} = ({}^{F}_{5}P_{x-5,t} + \frac{{}^{F}_{5}SM_{x-5,T-T+4}}{2}) \cdot \frac{{}^{F}_{5}L_{x}}{{}^{F}_{5}L_{x-5}} + \frac{{}^{F}_{5}SM_{x,T-T+4}}{2}$
${}^{F}P_{80+,t+1} = ({}^{F}P_{79,t} + \frac{{}^{F}SM_{79,T}}{2}) \cdot \frac{{}^{F}L_{80}}{{}^{F}L_{79}} + ({}^{F}P_{80+,t} + \frac{{}^{F}SM_{80+,T}}{2}) \cdot \frac{{}^{F}T_{81}}{{}^{F}T_{80}} + \frac{{}^{F}SM_{80+,T}}{2}$	${}^{F}P_{80+,t+5} = ({}^{F}_{5}P_{75,t} + \frac{{}^{F}_{5}SM_{75,T-T+4}}{2}) \cdot \frac{{}^{F}_{5}L_{80}}{{}^{F}_{5}L_{75}} + ({}^{F}P_{80+,t} + \frac{{}^{F}_{\infty}SM_{80,T-T+4}}{2}) \cdot \frac{{}^{F}T_{85}}{{}^{F}T_{80}} + \frac{{}^{F}_{\infty}SM_{80,T-T+4}}{2}$
${}^{F}P_{0,t+1} = {}^{F}N_{T} \cdot \frac{{}^{F}L_{0}}{l_{0}} + \frac{{}^{F}SM_{0,T}}{2}$	${}^{F}_{5}P_{0,t+5} = {}^{F}N_{T-T+4} \cdot \frac{{}^{F}_{5}L_{0}}{5 \cdot l_{0}} + \frac{{}^{F}_{5}SM_{0,T-T+4}}{2}$
$N_{T} = \sum_{x=\alpha}^{\beta-1} f_{x} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot ({}^{F}P_{x,t} + {}^{F}P_{x-1,t} \cdot \frac{{}^{F}L_{x}}{{}^{F}L_{x-1}}) + \frac{1}{2} \cdot (\frac{{}^{F}SM_{x,T}}{2} + \frac{{}^{F}SM_{x-1,T}}{2} \cdot \frac{{}^{F}L_{x}}{{}^{F}L_{x-1}}) \right]$	$N_{T-T+4} = \sum_{x=\alpha}^{\beta-5} 5 \cdot {}_{5}f_{x} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot ({}^{F}_{5}P_{x,t} + {}^{F}_{5}P_{x-5,t} \cdot \frac{{}^{F}_{5}L_{x}}{{}^{F}_{5}L_{x-5}}) + \frac{1}{2} \cdot (\frac{{}^{F}_{5}SM_{x,T-T+4}}{2} + \frac{{}^{F}_{5}SM_{x-5,T-T+5}}{2} \cdot \frac{{}^{F}_{5}L_{x}}{{}^{F}_{5}L_{x-5}}) \right]$