

# Capitolo 5

## Elementi sollecitati da tensioni tangenziali: il taglio

### 5.1 Introduzione

Nei due capitoli precedenti è stato analizzato il comportamento delle travi in cemento armato nei confronti delle azioni che producono solamente tensioni normali. Entro questi limiti è stato possibile sviluppare una teoria analoga a quella di Navier–De Saint Venant per le travi elastiche, opportunamente modificata per tener conto del diverso comportamento del calcestruzzo nei confronti delle sollecitazioni di compressione e di trazione. In questo modello il calcestruzzo è stato assimilato ad un materiale privo di resistenza a trazione; tale semplificazione consente, per gli elementi sollecitati a sforzo normale e flessione, di costruire una teoria coerente e perfettamente adeguata allo scopo di valutare la resistenza delle travi in cemento armato nei confronti di queste azioni.

Tuttavia in realtà solo di rado le travi sono sollecitate a sola flessione o pressoflessione: normalmente queste azioni sono accompagnate dal *taglio*, sollecitazione che, nel solido elastico di De Saint Venant, produce tensioni tangenziali. La presenza della sollecitazione di taglio è dovuta al fatto che ogni variazione lungo l'asse della trave del momento flettente richiede la presenza di una forza di taglio, come risulta dalla ben nota equazione di equilibrio:

$$V = \frac{dM}{dx} \quad (5.1)$$

in cui  $V$  indica la sollecitazione di taglio,  $M$  è il momento ed  $x$  l'ascissa misurata lungo l'asse della trave.

Dall'eq. (5.1) segue che il taglio è nullo solo quando  $M$  è costante. In pratica questa condizione si verifica di rado, quindi la sollecitazione di taglio accompagna quasi sempre quella di flessione. Inoltre, sempre dalla medesima equazione, risulta che il taglio non può esistere, se non in qualche sezione isolata, senza la contemporanea presenza di  $M$ : pertanto sarebbe più corretto parlare della sollecitazione congiunta di flessione e taglio.

La presenza delle tensioni tangenziali rende incoerente il semplice modello del calcestruzzo privo di resistenza a trazione in quanto il trasferimento di queste tensioni dalla parte tesa della sezione (l'armatura) a quella compressa richiede la partecipazione del calcestruzzo presente nella zona tesa che, nella teoria della flessione, era stato trascurato. In effetti la resistenza a trazione del calcestruzzo, anche se modesta, svolge un ruolo essenziale nel funzionamento delle travi sollecitate a flessione e taglio.

In molti casi gli effetti delle sollecitazioni di taglio risultano critici per la resistenza degli elementi in cemento armato, riducendone sensibilmente la capacità portante rispetto a quella valutata mediante la teoria flessionale. Inoltre il collasso dovuto alle forze di taglio, essendo provocato dalla rottura del calcestruzzo teso, è di tipo fragile, cioè improvviso ed accompagnato da piccole deformazioni, quindi estremamente pericoloso: occorre dunque evitare che si verifichi, ossia occorre rendere la resistenza a taglio degli elementi maggiore di quella a flessione. Questo obiettivo si ottiene disponendo, quando necessario, delle armature nel senso trasversale della trave (staffe e barre inclinate) che, come verrà chiarito poi, collaborano con il calcestruzzo nel sostenere queste sollecitazioni.

Come si vedrà, per gli effetti delle azioni di taglio e dei corrispondenti meccanismi resistenti non è possibile sviluppare una teoria relativamente semplice e coerente come è avvenuto fin qui nei riguardi delle azioni normali. Il comportamento delle travi in cemento armato fessurate per l'azione della flessione e del taglio è piuttosto complesso e la stima dell'entità dei contributi forniti dai diversi meccanismi non sempre si può dedurre sulla base della sola legge tensione-deformazione del materiale; spesso si deve ricorrere a formule empiriche, giustificate dai risultati di esperimenti di laboratorio e dal loro utilizzo pratico. Inoltre i modelli di comportamento utilizzati per valutare la resistenza, quali il *traliccio di Morsch*, non sono congruenti con l'ipotesi di comportamento elastico dei materiali, ed in effetti sono utilizzati solo per ricavare delle equazioni di equilibrio: il loro funzionamento pertanto si attiva solo in una fase di avanzata plasticizzazione, quando le esigenze della congruenza divengono secondarie. Per questi motivi, a differenza di quanto fatto in precedenza per la flessione e la pressoflessione, non sarà condotta un'analisi separata del comportamento in campo elastico rispetto a quello allo stato limite ultimo. Le verifiche alle tensioni ammissibili si deducono dagli stessi modelli del calcolo a rottura, semplicemente riducendo contemporaneamente le sollecitazioni e la resistenza dei materiali, in modo da ottenere, con i due metodi, confrontabili livelli di sicurezza.

## 5.2 Il comportamento delle travi sollecitate a taglio

Se si considera una trave realizzata con un materiale a comportamento elastico lineare e reagente a trazione, quale può considerarsi anche il calcestruzzo, per livelli di sollecitazione sufficientemente bassi, le tensioni tangenziali agenti sulle sezioni normali si possono calcolare con la nota relazione, derivata mediante la teoria approssimata di *Jourawski*:

$$\tau(y) = \frac{VS(y)}{Ib(y)} \quad (5.2)$$

in cui  $I$  è il momento di inerzia baricentrico della sezione,  $S(y)$  è il momento statico, relativamente al baricentro, della parte di sezione al disopra della fibra di ascissa  $y$  e  $b(y)$  è la larghezza di detta fibra (fig. 5.1a). Per una sezione rettangolare l'eq. (5.2) fornisce una legge parabolica, come illustrato nella stessa figura. Il valore massimo di  $\tau$  è raggiunto nel baricentro, dove si ha:

$$\tau_{mx} = \frac{V}{zb} \quad (5.3)$$

dove  $z = I/S(0)$  indica il braccio delle forze interne.

Per le sezioni in cemento armato, fessurate in accordo con il modello adottato per l'analisi della flessione, si può pensare di estendere la validità dell'eq. (5.2) alla sezione

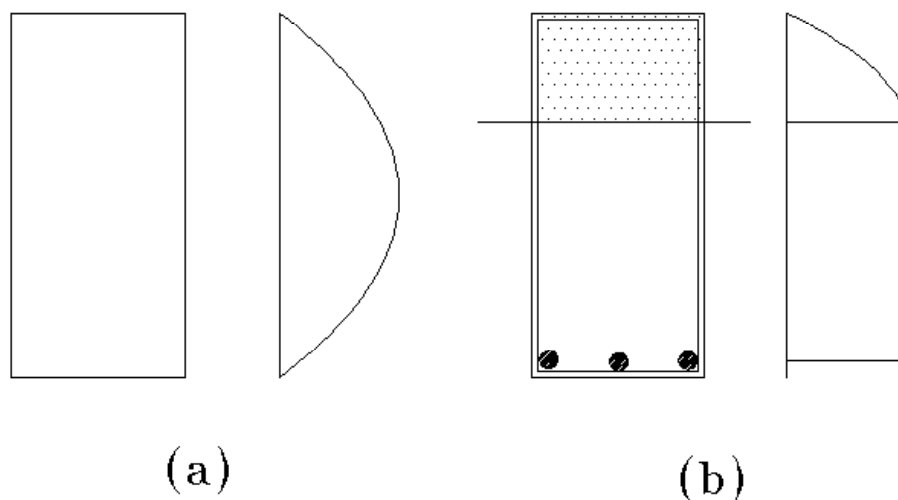


Figura 5.1: Distribuzione delle tensioni tangenziali nella sezione integra (a) e fessurata (b)

reagente omogenizzata, cioè formata dal calcestruzzo compresso e dall'acciaio pesato con il modulo  $n$ . Applicando la teoria di Jourawski a questa sezione si ottiene l'andamento riportato in fig. (5.1b). Il valore massimo della  $\tau$  è raggiunto ancora nel baricentro (asse neutro) della sezione reagente ed è ancora fornito dall'eq. (5.3), ove ora  $z \simeq 0.9d$ . Al disotto dell'asse neutro il valore di  $\tau$  resta costante in quanto  $S(y)$  non cambia, dato che il calcestruzzo teso viene trascurato. Solo in corrispondenza della fibra ove è posta l'armatura tesa si chiude l'equilibrio ed  $S$  e  $\tau$  si annullano.

Da queste considerazioni emerge un'incongruenza: la parte di calcestruzzo sottostante l'asse neutro, "inesistente" ai fini della flessione, deve essere in grado di sopportare la tensione tangenziale  $\tau_{mx}$  che, come risulta usando il cerchio di Mohr, produce una tensione principale di trazione di pari valore. Sebbene, come verrà spiegato più avanti, il trasferimento di tensioni tangenziali attraverso le facce di una fessura sia, entro certi limiti, realmente possibile, le osservazioni precedenti dimostrano che, in presenza della sollecitazione di taglio, non è lecito estendere alle travi in cemento armato la teoria di Navier–De Saint Venant, semplicemente sostituendo la sezione reagente omogenizzata a quella intera.

Per comprendere cosa avvenga in una trave in cemento armato sollecitata a flessione e taglio si deve rinunciare all'analisi della sola sezione ed esaminare la trave nella sua estensione spaziale. A questo scopo si consideri il comportamento di una trave appoggiata, caricata uniformemente, al crescere dell'intensità del carico. Inizialmente, per piccoli valori delle sollecitazioni, il comportamento è elastico lineare e la distribuzione delle tensioni segue le leggi della teoria delle travi elastiche. In tal caso l'andamento delle linee isostatiche delle tensioni principali è del tipo illustrato in fig. 5.2.

Normalmente il valore massimo della tensione principale di trazione viene raggiunto al lembo inferiore (teso): in qualche punto, superata la resistenza a trazione, si innesca una fessura che, essendo perpendicolare alle isostatiche di trazione, inizialmente risulta normale all'asse della trave. Al crescere del carico la fessura si propaga e, per effetto delle tensioni tangenziali, si inclina verso l'asse. Schematicamente si può assumere che le fessure seguano un percorso perpendicolare alle isostatiche di trazione, ossia che seguano

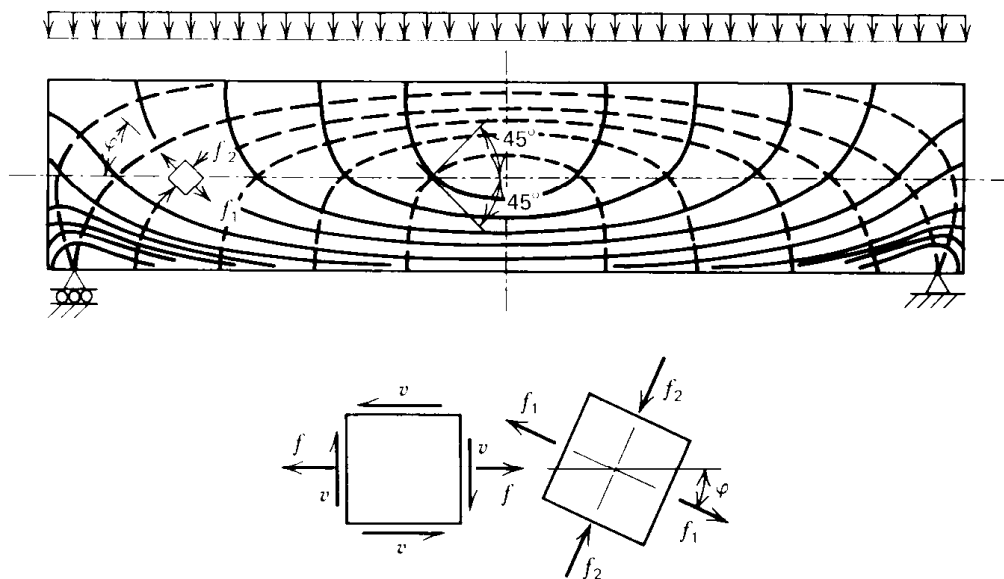


Figura 5.2: Linee isostatiche in una trave appoggiata; comportamento elastico ed isotropo del materiale

l'andamento delle isostatiche di compressione: nascono ortogonali all'asse della trave e quindi via via si inclinano fino a divenirne quasi parallele quando giungono in prossimità del corrente compresso. Questo comportamento è, almeno qualitativamente, confermato dalle esperienze sulla rottura delle travi condotte nei laboratori (si veda la fig. 5.3).

Da queste considerazioni si deduce un risultato fondamentale: nell'analisi del comportamento delle travi in cemento armato sollecitate a flessione e taglio si deve rinunciare al semplice schema della sezione fessurata normalmente all'asse ed esaminare dei conci di lunghezza finita entro cui, nella parte tesa, si estendono delle fessure inclinate.

Si torni ora all'eq. (5.1), che deriva dall'equilibrio di un cono di trave. Per una trave in cemento armato sollecitata a flessione e taglio, come è stato dimostrato nella sez. 3.2.2, si può porre  $M = Tz$ , dove  $T$  è la forza di trazione portata dall'armatura e  $z$  è il braccio delle forze interne. Sostituendo tale espressione di  $M$  nell'eq. (5.1) si ottiene:

$$V = z \frac{dT}{dx} + \frac{dz}{dx} T \quad (5.4)$$

da cui risulta evidente che all'equilibrio della forza di taglio  $V$  possono concorrere due termini: il primo dipendente dalla variazione della forza di trazione nell'acciaio, il secondo dalla variazione del braccio delle forze interne  $z$ .

In una trave snella, cioè con un rapporto tra luce e altezza elevato, di sezione costante e nelle zone distanti dagli appoggi, come risulta dallo studio del comportamento a flessione, il braccio  $z$  è praticamente costante, per cui si può assumere che  $dz/dx \approx 0$ . In tal caso il secondo termine dell'eq. (5.4) risulta trascurabile ed il solo meccanismo di equilibrio possibile è legato alla variazione di  $T$ . Perché questo avvenga occorre che l'aderenza tra acciaio e calcestruzzo sia in grado di trasferire la quantità necessaria di forza tra l'acciaio ed il calcestruzzo, ed il calcestruzzo nella parte tesa della sezione sia quindi in

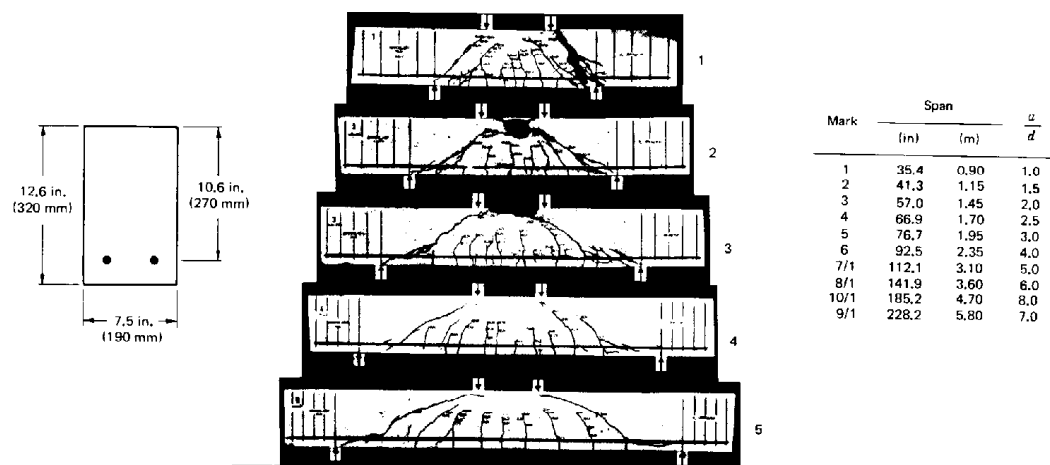


Figura 5.3: Meccanismi di rottura in travi in cemento armato prive di armatura di taglio al variare del rapporto  $M/V$

grado sopportarla e trasmetterla al corrente compresso, in modo da soddisfare l'equilibrio globale del concio. Questo meccanismo resistente viene detto *comportamento a trave*.

Il caso opposto si verifica quando, per qualche ragione, viene a mancare l'aderenza tra acciaio e calcestruzzo, in modo che  $T$  non può variare; in tal caso  $dT/dx = 0$  e nell'eq. (5.1) viene a mancare il primo termine quindi la sola possibilità di soddisfare l'equilibrio è affidata alla variazione di  $z$ . Perché questo possa realizzarsi occorre che la linea d'asse del corrente compresso risulti inclinata in modo tale che  $z$  vari con  $x$  secondo la stessa legge del momento  $M$ ; ciò è possibile solo nelle zone prossime agli appoggi dove, come è mostrato dalla fig. (5.2), le isostatiche di compressione convergono verso la base dell'appoggio, disegnando all'interno della trave un arco per il quale l'armatura funge da catena. Il meccanismo resistente che viene così a formarsi viene detto appunto *effetto arco*: esso può divenire significativo, dopo che il "comportamento a trave" ha perso efficacia, solo nelle travi tozze, ossia con un rapporto luce-altezza relativamente piccolo, o comunque nelle zone prossime agli appoggi. La presenza del "meccanismo ad arco" spiega il fatto che nelle travi che collassano per taglio la crisi solitamente non avviene in prossimità degli appoggi, dove il taglio è massimo, ma in zone più vicine al centro della trave, dove l'effetto arco non può essere efficace. Il collasso può avvenire però in prossimità dell'appoggio se l'armatura è insufficiente o male ancorata, ovvero se l'anima è così sottile da schiacciarsi per effetto dell'elevata forza di compressione che si sviluppa nell'arco.

### 5.3 Il comportamento delle travi prive di armatura di taglio

Quando all'interno di un elemento di calcestruzzo si apre una fessura le due facce contigue non sono superfici lisce. Infatti la fessura non attraversa gli inerti grossi, che formano lo scheletro più resistente dell'impasto, ma ne segue i contorni, dove la resistenza è dovuta all'azione legante del cemento; così, dopo l'apertura della fessura, le protuberanze di queste superfici scabre rimangono ingranate con le corrispondenti cavità rendendo ancora

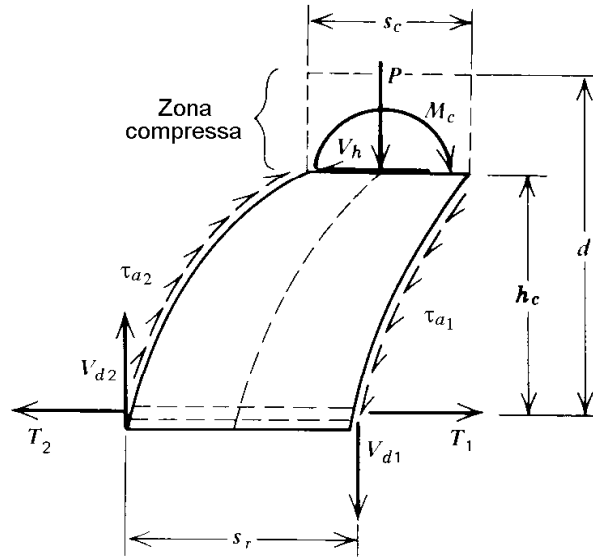


Figura 5.4: Forze agenti su di un “dente” di calcestruzzo compresso tra due fessure

possibile la trasmissione di forze tangenziali, almeno fin quando l’ampiezza della fessura non diviene tanto grande da separare completamente le facce. Questo meccanismo, detto di *ingranamento degli inerti* (aggregate interlock), è il più importante tra quelli che permettono il trasferimento delle forze di taglio nelle travi fessurate prive dell’armatura d’anima.

Le fessure che attraversano la zona tesa della trave la separano in tanti blocchi di calcestruzzo che si comportano come mensole incastrate nella parte superiore compressa dell’elemento. Esaminando una di queste (fig. 5.4) si nota che, quando agisce il meccanismo resistente del comportamento a trave, la mensola è sollecitata dalla forza  $\Delta T = T_1 - T_2$ , prodotta dalla variazione della forza di trazione dell’armatura. A questa sollecitazione si oppongono le seguenti azioni resistenti:

1. Le tensioni tangenziali  $\tau_a$  che agiscono sulle superfici delle fessure, dovute all’ingranamento degli inerti.
2. Le forze di taglio  $V_d$ , prodotte dall’*effetto spinotto* (dowel action) delle armature longitudinali.
3. Il momento  $M_c$  agente nella sezione di incastro della mensola di calcestruzzo nel corrente compresso.

Dell’ingranamento degli inerti si è già parlato in precedenza. L’*effetto spinotto* si sviluppa grazie all’elevata rigidità delle barre longitudinali, considerate come travi incastrate nei due blocchi contigui separati dalla fessura e quindi di piccolissima luce. Perché questo meccanismo sia efficace occorre che il calcestruzzo vincoli effettivamente le barre: in assenza di staffe questo è affidato alla sola resistenza del calcestruzzo di copriferro, generalmente modesta. Quando essa viene superata la barra si deforma distaccando il calcestruzzo che la ricopre. Per questo motivo il contributo dell’effetto spinotto, specialmente nelle travi prive di staffe, è modesto.

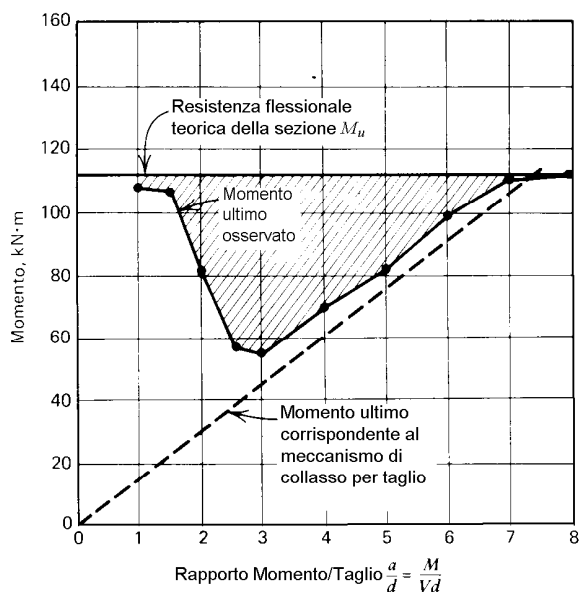


Figura 5.5: Momento ultimo sperimentale di travi prive di armatura di taglio, in funzione del rapporto  $a/d$ .

Il momento  $M_c$  è dovuto alla resistenza a flessione dei denti di calcestruzzo e pertanto dipende principalmente dall'altezza  $s_c$  delle sezioni di incastro delle mensole che, al crescere della sollecitazione, si riduce notevolmente a causa dell'estendersi delle fessure verso la zona compressa: ne consegue una proporzionale riduzione del contributo di questo termine all'equilibrio dei "denti" di calcestruzzo. In certi casi la riduzione della sezione di incastro delle mensole permette a due blocchi contigui di subire una forte rotazione relativa: l'incremento nell'apertura della fessura porta alla perdita dell'ingranamento degli inerti con conseguente impossibilità di ripristinare l'equilibrio e quindi al collasso della trave.

Lo schema sperimentale generalmente adottato nei laboratori consiste in travi semplicemente appoggiate, caricate simmetricamente con due forze di intensità  $P$ , poste alla distanza  $a$  dagli appoggi. Così, nei tratti compresi tra gli appoggi ed i carichi, la trave risulta sollecitata a taglio costante e momento linearmente variabile, mentre nella parte centrale il momento, costante, prende il valore massimo  $M = Pa$ , mentre il taglio è ovviamente nullo.

Il meccanismo di collasso per queste travi (senza armatura per il taglio) dipende essenzialmente dal rapporto adimensionale  $M/Vd$  che, per lo schema di carico precedentemente descritto, coincide con il rapporto  $a/d$  tra la distanza del carico dall'appoggio e l'altezza utile della sezione.

In fig. 5.5 sono riportati i risultati di prove di laboratorio su travi, tutte di uguale sezione ed armatura, al variare della distanza  $a$  tra il carico e l'appoggio. Nel grafico è riportato il valore del momento ultimo raggiunto in funzione del rapporto  $a/d$ ; la linea orizzontale corrisponde al valore della resistenza flessionale della sezione, derivata dalla teoria della flessione. Per valori di  $a/d$  maggiori di 7 il momento ultimo sperimentale praticamente coincide con quello teorico, segno che la trave ha potuto raggiungere la sua resistenza fles-

sionale perché la resistenza a taglio è in tal caso maggiore; come previsto questo si verifica nelle travi molto snelle per le quali è possibile omettere l'utilizzo dell'armatura di taglio.

Quando  $a/d$  prende valori inferiori la resistenza della trave si riduce rispetto a quanto previsto dalla sola flessione. I risultati sperimentali seguono da vicino la retta tratteggiata passante per l'origine, che corrisponde alla previsione teorica di un sistema che collassa al raggiungimento di una fissata soglia di taglio. Per  $7 > a/d > 3$  la rottura è prodotta dal cedimento dei denti di calcestruzzo e la conseguente perdita di efficacia del “meccanismo a trave”. Per valori di  $a/d$  inferiori a 3 i risultati sperimentali si discostano da questo andamento e la resistenza cresce al diminuire di  $a/d$  fino a che, per  $a/d \leq 1.5$ , viene nuovamente raggiunta la piena resistenza flessionale della sezione, segno che il collasso torna ad essere determinato dalla flessione e non dal taglio. Questo è dovuto all'insorgere del meccanismo ad arco; nella zona di transizione, per  $1.5 < a/d < 3$ , dopo il cedimento del “meccanismo a trave” si innesca il “meccanismo ad arco” che permette di portare un'ulteriore quota di carico. Quando l'angolo formato dalla biella con l'asse della trave è piccolo, il contributo è modesto; man mano che il carico si avvicina all'appoggio quest'angolo aumenta ed il meccanismo ad arco diviene più efficace, fino a permettere il raggiungimento della resistenza flessionale dell'elemento.

## 5.4 Travi con armatura a taglio

La resistenza al taglio delle travi prive di armatura d'anima è generalmente modesta e, come si è visto, in molti casi è tale da ridurre la capacità portante rispetto a quella prevista dalla teoria flessionale. La necessità di garantire che le travi raggiungano la loro piena capacità portante richiede che la resistenza al taglio deve essere aumentata fino a raggiungere, e possibilmente superare, quella flessionale; ciò anche in considerazione della natura fragile, e quindi particolarmente pericolosa, del collasso per taglio.

Per aumentare la resistenza a taglio, nelle travi in cemento armato si dispone un'*armatura d'anima*, cioè un'armatura disposta trasversalmente all'asse della trave e che congiunge la parte compressa (il corrente in calcestruzzo) a quella tesa (l'armatura longitudinale). Le armature utilizzate a questo scopo sono di due tipi: *le staffe* e *le barre piegate*.

Le staffe sono armature chiuse, e generalmente seguono il perimetro della sezione circondando le armature longitudinali (fig. 5.6a e b); di solito sono disposte ortogonalmente all'asse della trave ma, in linea di principio, potrebbero anche essere inclinate di un'angolo minore. Le barre piegate invece sono normalmente realizzate mediante le stesse armature longitudinali che vengono piegate in modo da attraversare l'anima fino a raggiungere il lembo opposto, dove proseguono per un certo tratto (fig. 5.6c). L'angolo  $\beta$  formato dalle barre con l'asse della trave è normalmente compreso tra i  $45^\circ$  ed i  $60^\circ$ ; il valore usato più di frequente è  $\beta = 45^\circ$ . Per diversi motivi che saranno chiariti nel seguito le staffe risultano più efficaci delle barre piegate nel prevenire i meccanismi di rottura per taglio: pertanto il loro uso è generalmente consigliato; in ogni caso è necessario che almeno una parte dell'armatura d'anima sia realizzata mediante staffe.

### 5.4.1 Determinazione delle sollecitazioni nell'armatura di taglio

La presenza delle armature d'anima non altera sensibilmente i meccanismi di formazione delle fessure: pertanto lo schema della trave fessurata per effetto della flessione e del taglio resta lo stesso descritto nella sezione precedente. Dopo la fessurazione agiscono ancora gli stessi meccanismi analizzati per le travi non armate: ingranamento degli inerti,

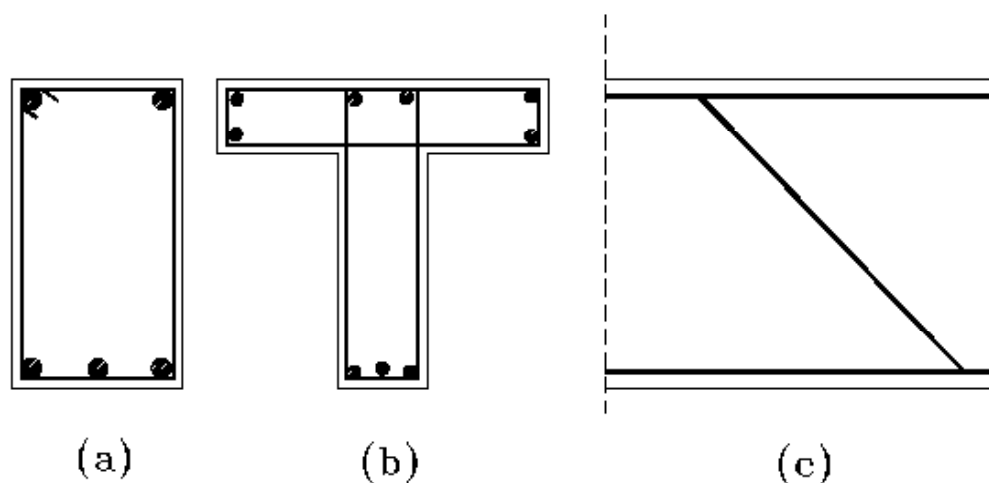


Figura 5.6: Schemi dell'armatura d'anima di travi in c. a.

effetto spinotto, resistenza flessionale delle mensole, nelle zone dove prevale il meccanismo di trave, l'effetto arco in prossimità degli appoggi. Anzi l'efficacia di questi meccanismi aumenta, specialmente se l'armatura è realizzata con staffe, per i seguenti motivi:

1. *L'effetto spinotto* migliora perché le staffe, se abbastanza vicine tra loro, possono impedire, o almeno ritardare, la deformazione delle armature longitudinali ed il conseguente distacco del copriferro.
2. *L'ingranamento degli inerti* migliora perché le armature d'anima, in particolare prima che siano plasticizzate, ostacolano l'aprirsi delle fessure consentendo un ingranamento efficace.
3. *La resistenza flessionale* delle mensole di calcestruzzo aumenta perché l'armatura provoca la compressione di queste bielle, con conseguente riduzione delle tensioni di trazione. Inoltre limitando l'estendersi delle fessure impediscono l'eccessiva riduzione delle sezioni di incastro delle mensole al corrente compresso.
4. Il pericolo della *perdita di aderenza* dovuto alle fessure che si propagano longitudinalmente lungo il percorso dell'armatura tesa e che provoca il distacco del copriferro, viene sensibilmente ridotto.

Accanto a questi benefici sui meccanismi resistenti presenti anche in sua assenza, l'armatura d'anima contribuisce direttamente a sopportare una parte delle forze di taglio. Secondo un modello dovuto a *Mörsch*, molto schematico ma che coglie i caratteri essenziali del fenomeno, la trave fessurata viene assimilata ad una trave reticolare in cui il calcestruzzo compresso e l'armatura tesa fungono da correnti, le bielle di calcestruzzo sono le aste di parete compresse, le armature d'anima le aste tese, come illustrato nella fig. 5.7.

Per analizzare il comportamento delle travi armate per il taglio si adottano alcune schematizzazioni. Le fessure vengono considerate rettilinee, inclinate di un'angolo  $\alpha$  rispetto

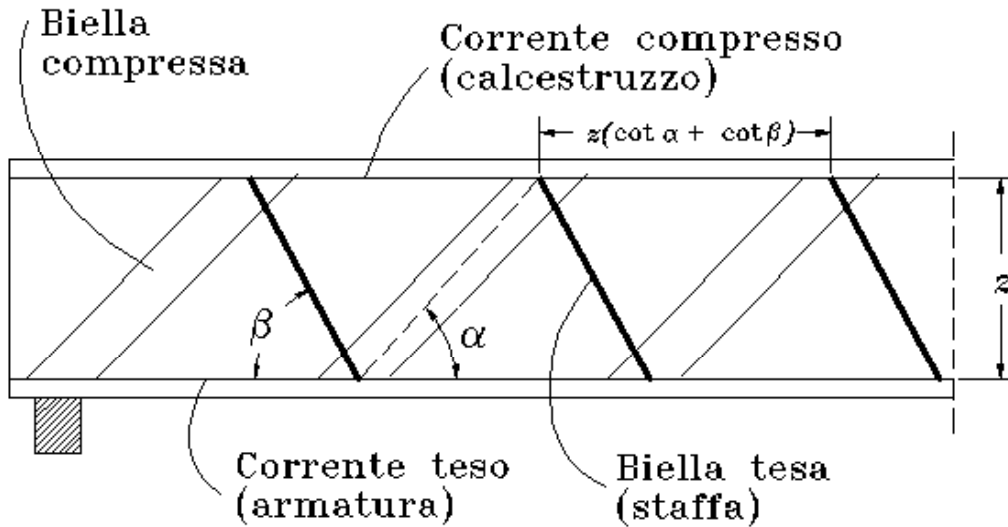


Figura 5.7: Rappresentazione schematica del meccanismo resistente al taglio delle travi in c. a. (traliccio di Mörsh)

all'asse della trave; indicando con  $\beta$  l'inclinazione dell'armatura d'anima, l'equazione di equilibrio dei momenti di una mensola di calcestruzzo compresa tra due fessure successive distanti  $s$  tra loro si scrive quindi (si veda la fig. 5.8):

$$\Delta T z = (V_d + V_a)s + M_c + F_s \sin \beta z \cot \alpha + F_s \cos \beta z \quad (5.5)$$

in cui  $\Delta T = T_2 - T_1$  è la variazione della forza di trazione nell'acciaio dovuta alla variazione del momento flettente,  $z$  è il braccio delle forze interne,  $V_d$  è il taglio portato dall'armatura longitudinale per effetto spinotto,  $V_a$  è la componente tangenziale della forza trasmessa per ingranamento degli inerti,  $M_c$  è il momento sopportato dalla sezione di incastro della mensola di calcestruzzo,  $F_s$  è la forza agente nell'armatura d'anima,  $\alpha$  e  $\beta$  sono gli angoli formati dalle bielle compresse di calcestruzzo e da quelle tese (armatura) con l'asse della trave.

Ponendo  $\Delta T \simeq (dT/dx)s$  ed assumendo  $z \simeq \text{cost}$ , si ha:

$$\Delta T \simeq \frac{d(M/z)}{dx} s \simeq \frac{V}{z} s$$

dove si è tenuto conto che  $V = dM/dx$ . Sostituendo l'espressione precedente nell'eq. (5.5) e risolvendo l'equazione così ottenuta rispetto ad  $F_s$  si ottiene:

$$\frac{F_s}{s} = \frac{V - V_c}{z \sin \beta (\cot \alpha + \cot \beta)} = \frac{V_s}{z \sin \beta (\cot \alpha + \cot \beta)} \quad (5.6)$$

in cui  $V_c = V_d + V_a + M_c/s$  raccoglie il contributo di tutti i termini che prescindono dalla presenza dell'armatura. Se  $V_c > V$  l'eq. (5.6) perde senso: in questo caso la trave è in grado di sopportare l'azione del taglio senza bisogno dell'armatura d'anima. Nel caso contrario  $V_s = V - V_c$  indica il quantitativo eccedente, che non potrebbe essere equilibrato in assenza dell'armatura.

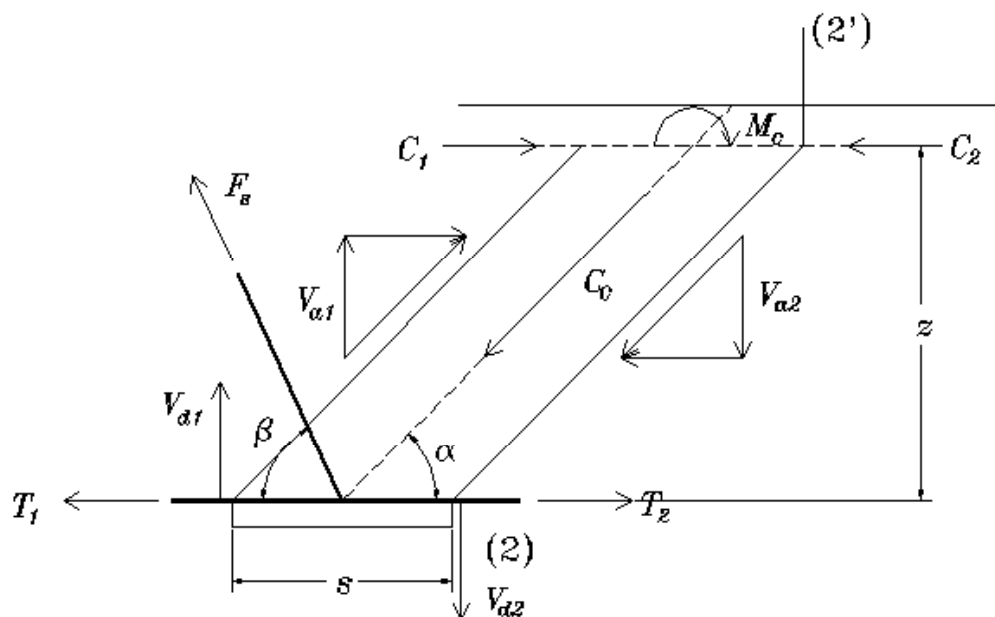


Figura 5.8: Schema del meccanismo resistente al taglio nelle travi con armatura d'anima ed equilibrio delle forze

Per l'equilibrio, alla forza di trazione nell'armatura  $F_s$  deve corrispondere una compressione  $C$  nella biella compressa. Imponendo l'equilibrio nella direzione ortogonale all'asse si ottiene:

$$F_s \sin \beta = C \sin \alpha$$

da cui, tenendo conto dell'eq. (5.6), si ha:

$$C = F_s \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{V_s s}{z \sin \alpha (\cot \alpha + \cot \beta)} \quad (5.7)$$

Se la forza  $C$  viene considerata centrata lungo l'asse della biella di calcestruzzo, essa provoca una compressione uniforme il cui valore si calcola dividendo  $C$  per l'area della sezione normale della biella:  $bs \sin \alpha$ ,  $b$  essendo la larghezza dell'anima della trave:

$$\sigma_c = \frac{C}{bs \sin \alpha} = \frac{V_s}{bz \sin^2 \alpha (\cot \alpha + \cot \beta)} = \frac{\tau_s}{\sin^2 \alpha (\cot \alpha + \cot \beta)} \quad (5.8)$$

in cui con  $\tau_s = V_s/bz$  si è indicato il massimo della tensione tangenziale che corrisponde alla forza di taglio  $V_s$ , calcolata secondo la teoria di Jourawski, con riferimento alla sezione parzializzata.

Le equazioni (5.7) e (5.8) forniscono i valori delle sollecitazioni nelle armature d'anima e nelle bielle di calcestruzzo di una trave fessurata in accordo con lo schema di funzionamento del traliccio di Morsch. Esse sono state derivate sulla base di sole considerazioni di equilibrio, senza porre alcuna attenzione alla congruenza: pertanto i risultati che ne derivano saranno attendibili solo in prossimità della condizione di collasso, quando la plasticizzazione dei materiali rende secondaria (in certa misura) la congruenza, mentre la trave è costretta a ricorrere a tutte le sue risorse per equilibrare le forze esterne. Per tale

motivo l'analisi del comportamento a taglio, contrariamente a quanto fatto in precedenza per la flessione e lo sforzo normale, non è stata condotta separatamente per il caso elastico, da utilizzare nel metodo delle tensioni ammissibili, e quello nello stato limite ultimo. Per le verifiche con il metodo delle tensioni ammissibili si utilizzano le stesse relazioni derivate in precedenza, semplicemente scalando i valori sia delle forze sia delle resistenze in modo opportuno, per rendere confrontabili le azioni di esercizio con delle tensioni ammissibili.

In ogni caso perché le equazioni (5.6) e (5.8) siano utilizzabili occorre determinare il termine  $V_c$ , ossia la quota parte del taglio portata dalla trave prescindendo dal contributo dell'armatura. La valutazione teorica di questa quantità è un'impresa ardua, perché essa dipende da fenomeni complessi, difficili da inquadrare in una teoria schematica, fondamentalmente basata sul modello della trave di Navier–De Saint Venant. La via più diretta è quella che passa per la sperimentazione in laboratorio, dai cui risultati si possono desumere delle formule empiriche che forniscono delle valutazioni forfettarie e cautelative di  $V_c$ . La maggior parte delle normative adottano qualcuna di queste relazioni, opportunamente tarate con prudenziali coefficienti di sicurezza. Determinato  $V_c$  la sollecitazione nell'armatura e nei denti di calcestruzzo si calcola poi facilmente mediante le precedenti equazioni, basate sullo schema di Mörsch.

Le eq. (5.6) e (5.8) sono state ricavate lasciando indeterminati i valori dell'angolo  $\alpha$  formato dalle fessure idealizzate con l'asse della trave e dell'angolo  $\beta$  di inclinazione delle armature. Mentre quest'ultimo è un parametro di progetto il primo dipende dalla fisica del fenomeno della fessurazione. In assenza di rilevanti compressioni assiali si è soliti assumere per  $\alpha$  il valore baricentrico dell'inclinazione delle isostatiche di compressione, per cui si pone  $\alpha = \pi/4$ . Con questa posizione le precedenti equazioni si semplificano, per cui si ha:

$$\frac{F_s}{s} = \frac{V_s}{z(\sin \beta + \cos \beta)} \quad \sigma_c = \frac{2\tau_s}{1 + \cot \beta} \quad (5.9)$$

Quando l'armatura d'anima è realizzata mediante staffe poste ortogonalmente all'asse ( $\beta = \pi/2$ ), l'eq. 5.9 diviene:

$$\frac{F_s}{s} = \frac{V_s}{z} \quad \sigma_c = 2\tau_s \quad (5.10)$$

mentre per le barre piegate, per le quali il valore usuale dell'angolo di inclinazione è  $\pi/4$ , corrisponde:

$$\frac{F_s}{s} = \frac{V_s}{z\sqrt{2}} \quad \sigma_c = \tau_s \quad (5.11)$$

Dal confronto delle eq. (5.10) e (5.11) appare che le armature inclinate a  $45^\circ$  funzionano meglio di quelle verticali in quanto, a parità di taglio, risultano meno sollecitate (per un fattore  $1/\sqrt{2}$ ) e producono nel calcestruzzo una compressione inferiore (la metà). Questo è vero quando il confronto viene fatto tra staffe verticali ed inclinate, meno quando le staffe vengono confrontate con le barre piegate, perché quest'ultime sono in realtà meno efficaci nel migliorare il comportamento globale della trave. Per quanto riguarda poi l'aspetto economico, espresso dal quantitativo di armatura necessario per sopportare una assegnata sollecitazione, il vantaggio offerto dalle armature inclinate è solo apparente, poiché se la sezione richiesta è inferiore, la loro lunghezza aumenta e quindi il volume complessivo è praticamente lo stesso.

## 5.5 Interazione tra flessione e taglio

Se le travi sono adeguatamente armate nei confronti della sollecitazione di taglio la resistenza flessionale non è sensibilmente influenzata dalla presenza della sollecitazione tagliante: questo consente di progettare le travi analizzando separatamente la sollecitazione flessionale ed il taglio.

In realtà, come è stato spiegato descrivendo il funzionamento delle travi sotto l'azione di flessione e taglio, vi è una forte interazione tra le due azioni: la presenza del taglio provoca che lo sviluppo delle fessure avviene secondo linee inclinate; pertanto il concetto di sezione retta, fondamentale nella teoria della trave elastica ed utilizzato anche per l'analisi delle travi inflesse di cemento armato, perde notevolmente di significato.

L'inclinazione delle fessure comporta che la forza di sollecitazione  $T$  dell'armatura tesa non coincide esattamente con quella prevista dalla teoria della flessione. La ragione si comprende osservando la fig. 5.8: in assenza di armatura d'anima ( $F_s = 0$ ), imponendo l'equilibrio del blocco di trave delimitato da una fessura e prendendo come polo dei momenti il punto di applicazione della risultante delle compressioni, si ha:

$$M'_2 = T_2 z$$

dove  $M'_2$  indica il momento risultante agente nella sezione (2'), corrispondente all'ascissa della zona compressa del blocco di calcestruzzo, mentre nella sezione (2), corrispondente alla posizione dell'armatura esaminata, agisce il momento

$$M_2 \simeq M'_2 - V_2 z \cot \alpha$$

Secondo la teoria della flessione, nella sezione (2) l'armatura dovrebbe essere sollecitata dalla forza:

$$T_{2f} = \frac{M_2}{z} = \frac{M'_2}{z} - V \cot \alpha$$

da cui segue che la sollecitazione effettiva dell'armatura differisce da quella prevista dalla teoria flessionale secondo la relazione:

$$T_2 = T_{2f} + V_2 \cot \alpha \quad (5.12)$$

Pertanto la sollecitazione di taglio produce, nella trave fessurata, un incremento della sollecitazione dell'armatura pari a  $V \cot \alpha$ .<sup>1</sup> Di questo si può tener conto semplicemente facendo scorrere il diagramma dei momenti con cui si progettano le armature della quantità  $z \cot \alpha \simeq 0.9d \cot \alpha$ , dalla parte dei momenti decrescenti, in modo tale che in ogni sezione il momento considerato sia maggiore di quello corrispondente all'equilibrio della parte di trave individuata da una sezione retta.

Se la trave è dotata di armatura di taglio l'equazione di equilibrio del tronco di trave separato da una fessura diagonale diviene:

$$M'_2 = T_2 z + F_s \sin \beta \frac{s}{2} \quad (5.13)$$

dove  $F_s$  indica la risultante delle forze sopportate dalle armature di taglio, considerate uniformemente distribuite, nel tratto di lunghezza  $s$ . La lunghezza  $s$  da prendere in conto

<sup>1</sup>Si deve osservare tuttavia che la sollecitazione massima non aumenta, in quanto nella sezione di momento massimo si ha  $V = 0$ .

è la distanza, misurata parallelamente all'asse della trave, tra la prima e l'ultima delle barre che attraversano la fessura; con le solite ipotesi semplificatrici si ha:

$$s = z(\cot \alpha + \cot \beta)$$

Quindi dall'eq. (5.6) si ottiene:

$$F_s = \frac{V_s}{\sin \beta}$$

Sostituendo queste due espressioni nell'eq. (5.13) risulta:

$$M_2' = T_2 z + V_s z \frac{z}{2} (\cot \alpha + \cot \beta)$$

da cui, esprimendo il momento  $M_2'$  in funzione di quello  $M_2$  agente sulla sezione retta ove è applicata la forza  $T_2$ , si ha:

$$M_2 = T_2 z + V_s z \frac{z}{2} (\cot \alpha + \cot \beta) - V_2 z \cot \alpha$$

che, risolta rispetto a  $T_2$  e tenendo conto che  $V = V_c + V_s$ , fornisce l'espressione:

$$T_2 = T_{2f} + V_{c2} \cot \alpha + \frac{1}{2} V_{s2} (\cot \alpha - \cot \beta) \quad (5.14)$$

Ove si trascuri il contributo del taglio portato dal calcestruzzo ( $V_c = 0$ ,  $V_s = V$ ), l'eq. (5.14) viene soddisfatta calcolando l'armatura con il momento ottenuto traslando il digramma della quantità:

$$a_1 = \frac{z}{2} (\cot \alpha - \cot \beta) \quad (5.15)$$

## 5.6 Progetto secondo le normative

### 5.6.1 Metodo delle tensioni ammissibili

Come è stato più volte sottolineato, si ricorda che la verifica con il metodo delle tensioni ammissibili non deriva da un'analisi del comportamento in fase elastica, ma dalle stesse relazioni viste in precedenza a proposito del comportamento in fase ultima, opportunamente adattate.

Per la vigente normativa italiana, quando le verifiche vengono condotte con riferimento al metodo delle tensioni ammissibili, lo stato di sollecitazione del calcestruzzo è misurato dalla tensione tangenziale massima  $\tau_{cm}$  calcolata in accordo alla teoria della sezione elastica fessurata, mediante l'eq. (5.3).

Se risulta  $\tau_{cm} \leq \bar{\tau}_{c0}$  [dove  $\bar{\tau}_{c0}$  è un valore ammissibile che dipende dalla resistenza caratteristica del calcestruzzo mediante l'eq. (2.26)], non è richiesta la verifica dell'armatura di taglio: questo significa che l'elemento deve considerarsi non armato a taglio anche se, per le prescrizioni di cui si dirà nel seguito, è comunque necessario prevedere un quantitativo minimo di armatura.

Se invece risulta  $\bar{\tau}_{c0} < \tau_{cm} \leq \bar{\tau}_{c1}$  [eq. (2.27)] la trave deve essere provvista di opportuna armatura: secondo la normativa italiana in questo caso *tutta* la sollecitazione di taglio deve essere sopportata dall'armatura. Il dimensionamento è basato sull'eq. (5.6) assumendo l'inclinazione delle bielle  $\alpha = 45^\circ$  [eq. (5.9)] e con la condizione che la tensione nell'armatura non superi quella ammissibile dell'acciaio.

Se con  $s$  si indica l'interasse tra le armature (staffe o piegati)  $F_s$  è la forza sopportata da ciascuna, per cui l'area necessaria risulta:

$$A_{sw} = \frac{F_s}{\bar{\sigma}_s} = \frac{V_s}{z(\sin \beta + \cos \beta)\bar{\sigma}_s} \quad (5.16)$$

In particolare per  $\beta = \pi/2$  (staffe) e  $\beta = \pi/4$  (barre piegate) si ha:

$$A_{sw} = \frac{V_s}{z\bar{\sigma}_s} \quad (\text{staffe}) \quad A_{sw} = \frac{V_s}{\sqrt{2}z\bar{\sigma}_a} \quad (\text{piegati}) \quad (5.17)$$

dove, poiché si è ipotizzato che  $V_c = 0$ ,  $V_s = V$  è l'intera sollecitazione di taglio.

L'area  $A_{sw}$  è quella delle armature che, in una sezione, attraversano il piano medio della trave. Per le staffe essa è pari all'area della barra con cui la staffa è realizzata moltiplicata per il numero dei suoi bracci ( $\geq 2$ ).

La normativa italiana prescrive che almeno il 40% della forza totale di scorrimento sia assorbita da staffe; questa forza è la risultante delle tensioni tangenziali  $\tau_{cm}$  agenti sul piano neutro della trave:

$$S = \int \tau_{cm} b dx = \int \frac{V}{z} dx$$

dove l'integrale deve essere calcolato su tratti in cui  $V$  ha segno costante. Se si assume  $z \simeq \text{cost}$  dall'equazione precedente risulta:

$$S = \frac{1}{z} \int V dx = \frac{M_2 - M_1}{z}$$

dove  $M_1$  ed  $M_2$  sono i momenti che agiscono sulle sezioni di estremità del concio di trave per cui si è calcolato  $S$ .

## 5.6.2 Calcolo allo stato limite ultimo

### Elementi sprovvisti di armatura d'anima

Per gli elementi privi di armatura di taglio (o armati solo con il minimo regolamentare) la verifica richiede che la sollecitazione di taglio di calcolo  $V_d$  non superi il taglio resistente  $V_{cu}$  portato dal calcestruzzo mediante i meccanismi descritti nei paragrafi precedenti. Secondo le norme italiane questo è dato dalla relazione:

$$V_{cu} = 0.25 f_{ctd} r (1 + 50 \rho_l) b d \delta \quad (5.18)$$

in cui i simboli hanno il seguente significato:

$f_{ctd}$  resistenza a trazione di calcolo del calcestruzzo =  $f_{ctk}/\gamma_c$ ;  $f_{ctk}$  è dato dall'eq. (2.31).

$r = \max\{(1.6 - d), 1\}$ , con  $d$ , altezza utile della sezione, espressa in metri.

$\rho_l = \min\{A_s/bd, 0.02\}$ , percentuale geometrica dell'armatura longitudinale tesa.

$b$  larghezza della membratura resistente al taglio.

$\delta$  fattore che tiene conto degli effetti delle forze normali. Nel caso di flessione semplice ( $N = 0$ ) si assume  $\delta = 1$ . Nel caso sia presente una significativa forza di trazione  $\delta = 0$  (quindi in questo caso il taglio portato dal calcestruzzo è nullo e la trave deve

essere necessariamente armata). Quando è presente una forza di compressione si pone:

$$\delta = 1 + M_0/M_d$$

in cui  $M_0$  è il momento di decompressione, ossia il valore per cui, nella fibra meno compressa, si raggiunge una tensione nulla.

$A_s$  area dell'armatura longitudinale tesa. Per quanto visto in precedenza l'area da considerare è quella intersecata da una fessura inclinata a  $45^\circ$ , cioè posta alla distanza  $0.9d$  dalla sezione dove agisce il taglio  $V_d$ . Per essere presa in conto l'armatura deve essere efficacemente ancorata oltre il punto di intersezione con la fessura.

La bozza delle norme europee (EC2) propone per il calcolo di  $V_{cu}$  un'espressione poco diversa:

$$V_{cu} = [0.25f_{ctd}r(1.2 + 40\rho_l) + 0.15\sigma_{cm}]bd \quad (5.19)$$

dove si deve assumere  $r = 1$  per gli elementi in cui più del 50% dell'armatura è interrotta (cioè non è prolungata fino agli appoggi e quindi ancorata), altrimenti si assume  $r = \max\{(1.6 - d), 1\}$ , come nelle norme italiane;  $\sigma_{cm} = N_d/A_c$  è la tensione media nella sezione di calcestruzzo, positiva se di compressione. Gli altri simboli hanno il significato illustrato prima.

Per tener conto dei benefici dell'effetto arco, le norme europee consentono, per il taglio prodotto da carichi applicati ad una distanza dagli appoggi minore di  $2.5d$ , di amplificare la resistenza a trazione del calcestruzzo  $f_{ctd}$  del fattore  $\beta = 2.5d/x \leq 5$ , dove  $x$  è la distanza del carico dall'appoggio. Per poter utilizzare questo incremento di resistenza occorre verificare che la modalità di applicazione del carico ed il funzionamento dell'appoggio siano tali da consentire lo sviluppo di una biella di calcestruzzo tra carico ed appoggio. Inoltre, in presenza di carichi distribuiti, il taglio massimo da considerare nelle verifiche è quello agente alla distanza  $d$  dall'appoggio. Analogamente le norme italiane prevedono che il taglio prodotto dai carichi distanti  $x < 2d$  dagli appoggi sia ridotto del fattore  $x/2d$ .

### Elementi provvisti di armatura d'anima

**Norme italiane** Per la verifica del calcestruzzo compresso si richiede che la tensione media nelle bielle non superi il valore  $\epsilon f_{cd}$ , dove  $\epsilon$  è un fattore di riduzione della resistenza che tiene conto della schematicità del modello. Nelle norme italiane  $\sigma_c$  si calcola a partire dall'intera forza di taglio  $V$  e non dalla sola quota portata dall'armatura. Dall'eq. (5.9), ponendo  $V_s = V$  e ricordando l'espressione di  $\tau_{cm}$ , la condizione  $\sigma_c \leq \epsilon f_{cd}$  implica:

$$V_d \leq \frac{1}{2}\epsilon f_{cd}(1 + \cot \beta)bz$$

Ponendo  $z = 0.9d$  ed  $\epsilon = 2/3$  si ottiene:

$$V_d \leq 0.3f_{cd}(1 + \cot \beta)bd \quad (5.20)$$

L'aumento di resistenza conseguente all'inclinazione dell'armatura ( $45^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ ) è consentito solo nel caso che si impieghino staffe inclinate. Per le barre piegate non se ne deve tener conto; pertanto, come nel caso di staffe rette, si deve assumere:

$$V_d \leq 0.3f_{cd}bd$$

L'armatura deve essere progettata in modo da sopportare le forze di taglio eccedenti quelle equilibrate dal calcestruzzo; pertanto:

$$V_d \leq V_{cu} + V_{su} \quad (5.21)$$

in cui  $V_{cu}$  e  $V_{su}$  sono i tagli portati rispettivamente dal calcestruzzo e dall'armatura. Per la normativa italiana, in presenza di armatura d'anima,  $V_{cu}$  si calcola con una relazione diversa dall'eq. (5.18), valida per le travi non armate a taglio:

$$V_{cu} = 0.60 f_{ctd} b d \delta \quad (5.22)$$

in cui i simboli hanno lo stesso significato di quelli usati nell'eq. (5.18).

L'incremento del taglio resistente dovuto alle armature viene quindi calcolato con l'eq. (5.6) [o meglio, poiché si assume  $\alpha = 45^\circ$ , con la prima delle eq. (5.9)]. Indicando con  $s$  l'interasse tra le armature e ponendo  $F_s = F_{su} = A_{sw} f_{yd}$ , si ottiene:

$$V_{su} = A_{sw} f_{yd} \frac{0.9d}{s} (\sin \beta + \cos \beta) \quad (5.23)$$

avendo sostituito a  $z$  il valore approssimato  $0.9d$ .

Nei casi particolari di staffe rette ( $\beta = 90^\circ$ ) e di barre piegate ( $\beta = 45^\circ$ ), si ha rispettivamente:

$$V_{su} = A_{sw} f_{yd} \frac{0.9d}{s} \quad (\text{staffe}) \quad V_{su} = \sqrt{2} A_{sw} f_{yd} \frac{0.9d}{s} \quad (\text{piegati})$$

Le stesse norme suggeriscono, nel caso di barre piegate, di limitare la tensione di calcolo al valore  $0.8 f_{yd}$ .

**Norme europee (EC2)** Le bielle di calcestruzzo sono verificate a compressione se la tensione media, calcolata con l'eq. (5.9) ponendo  $\alpha = 45^\circ$ , non supera la resistenza di calcolo ridotta  $\epsilon f_{cd}$ . Da questa condizione, ponendo  $V_s = V$ , si trae:

$$V_d \leq \frac{1}{2} \epsilon f_{cd} (1 + \cot \beta) z b \quad (5.24)$$

dove  $z$  può essere approssimato con  $0.9d$  ed  $\epsilon$  è un coefficiente di riduzione della resistenza dato dalla relazione:

$$\epsilon = \max\{(0.7 - f_{ck}/200), 0.5\} \quad (f_{ck} \text{ in N/mm}^2)$$

In presenza di sforzo normale la resistenza delle bielle compresse deve essere ridotta del fattore:

$$\min\{1.67(1 - \sigma_{cp}/f_{cd}), 1\}$$

in cui  $\sigma_{cp} = (N_d - f_{yd} A'_s)/A_c$ ;  $A'_s$  essendo l'area dell'armatura compressa ed  $A_c$  quella dell'intera sezione di calcestruzzo.

La condizione che limita la sollecitazione delle bielle compresse [eq. (5.24)] deve essere sempre verificata, anche in assenza di armatura a taglio; tuttavia in quest'ultimo caso la condizione  $V_d \leq V_{cu}$  è normalmente la più vincolante.

La resistenza a taglio è data come somma dei contributi del solo calcestruzzo e dell'armatura [eq. (5.21)]. Per l'EC2 il termine  $V_{cu}$  è dato dalla stessa espressione (5.19) valida in assenza di armatura d'anima; il secondo si calcola con la stessa equazione (5.23) utilizzata dalla normativa italiana.

### 5.6.3 Armatura longitudinale

Per i motivi illustrati nella sezione 5.5 l'armatura longitudinale deve essere calcolata sulla base di una sollecitazione flessionale incrementata per tener conto degli effetti dell'inclinazione delle fessure.

Questo si ottiene progettando l'armatura longitudinale per il momento:

$$M'_d = M_d + V_d a_1$$

ovvero, ciò che è in pratica equivalente, traslando il diagramma dei momenti della quantità  $a_1$ .

Per le norme italiane si deve assumere:

$$a_1 = \max\{z(1 - \cot \beta), 0.2d\} \quad (5.25)$$

mentre secondo l'EC2, in accordo con l'eq. (5.15), si ha:

$$a_1 = \max\{z(1 - \cot \beta)/2, 0\} \quad (5.26)$$

Quest'ultima espressione appare poco cautelativa in quanto dedotta dalla condizione  $V_s = V$ . In particolare in assenza di armatura si dovrebbe assumere  $a_1 = z$ , come si ottiene dalle norme italiane, mentre dall'eq. (5.26) si ricava  $a_1 = z/2$ .

### 5.6.4 Quantitativi minimi di armatura

Per le norme italiane se risulta  $\tau_{cm} < \bar{\tau}_{c0}$ , ovvero  $V_d < V_{cu}$ , nelle travi si deve porre una quantità minima di armatura che deve rispettare le seguenti limitazioni:

$$\frac{A_{sw}}{s} \geq 0.1b^* \quad (\text{cm}^2/\text{m}) \quad (5.27)$$

dove  $b^*$  (in cm) indica la larghezza della sezione a cui corrisponderebbe la tensione tangenziale massima di  $\bar{\tau}_{c0}$ :

$$b^* = \frac{V_e}{0.9d\bar{\tau}_{c0}}$$

dove  $V_e$  indica la sollecitazione di taglio in condizioni di esercizio.

Inoltre deve essere rispettata la condizione:

$$s \leq \min\{0.8d, 0.33 \text{ m}\} \quad (5.28)$$

Nel caso di calcolo alle tensioni ammissibili, quando la tensione tangenziale supera il valore  $\bar{\tau}_{c0}$ , l'intera forza di taglio deve essere portata dall'armatura ed almeno il 40% della forza di scorrimento deve essere affidato alle staffe. Nel caso di calcolo agli stati limite se  $V_d > V_{cu}$  almeno il 50% della forza di taglio deve essere equilibrata dalle armature.

Per la bozza delle norme EC2 il minimo quantitativo dell'armatura d'anima richiesto nelle travi è dato dalla percentuale:

$$\rho_w = \frac{A_{sw}}{sb \sin \beta}$$

I valori minimi richiesti di  $\rho_w$  sono riportati dalle norme stesse in una tabella in funzione delle classi del calcestruzzo e dell'acciaio. Ad esempio, per l'acciaio tipo S400 ed il calcestruzzo tipo C25/30, si ha  $\rho_{min} = 0.0013$ .

Almeno il 50% dell'armatura a taglio necessaria deve essere realizzata mediante staffe.

**Esempio 5.1** Verificare nei confronti della sollecitazione di taglio e, se necessario, progettare l'armatura la sezione rettangolare con base  $b = 30$  cm, altezza  $h = 60$  cm, armatura longitudinale  $A_{sl} = 5\phi 20 = 15.7$  cm<sup>2</sup>, soggetta alla forza di taglio  $V_e = 75$  kN. Si assume che i materiali abbiano le seguenti caratteristiche:

Calcestruzzo  $R_{ck} = 30$  N/mm<sup>2</sup>  
 Acciaio Fe B 44 k

**Metodo delle tensioni ammissibili.** Per il calcestruzzo le tensioni tangenziali ammissibili si calcolano mediante le eq. (2.26) e (2.27):

$$\bar{\tau}_{c0} = 0.4 + \frac{R_{ck} - 15}{75} = 0.4 + \frac{30 - 15}{75} = 0.6 \text{ N/mm}^2$$

$$\bar{\tau}_{c1} = 1.4 + \frac{R_{ck} - 15}{35} = 0.4 + \frac{30 - 15}{35} = 1.83 \text{ N/mm}^2$$

mentre per l'acciaio si ha  $\bar{\sigma}_s = 255$  N/mm<sup>2</sup>.

La tensione tangenziale massima nel calcestruzzo risulta [eq. (5.3)]:

$$\tau_{cm} = \frac{75000}{0.9 \times 570 \times 300} = 0.49 \text{ N/mm}^2 < \bar{\tau}_{c0}$$

Pertanto non è necessario prevedere un'armatura d'anima, eccetto quella minima richiesta dalla normativa. Per il calcolo di quest'ultima si ha:

$$b^* = \frac{V_e}{0.9d\bar{\tau}_{c0}} = \frac{75000}{0.9 \times 570 \times 0.6} = 244 \text{ mm} = 24.4 \text{ cm}$$

e dunque, applicando l'eq. (5.27):

$$\frac{A_{sw}}{s} = 0.1b^* = 2.44 \text{ cm}^2/\text{m}$$

**Calcolo allo stato limite ultimo.** La sollecitazione di progetto si ottiene moltiplicando quella di esercizio per il coefficiente di sicurezza dei carichi ( $\gamma = 1.5$ ); quindi  $V_d = 1.5 \times 75 = 112.5$  kN. Le resistenze di calcolo a compressione e trazione del calcestruzzo sono date dalle eq. (2.29)–(2.31), in base alle quali risulta:

$$f_{cd} = 15.56 \text{ N/mm}^2 \quad f_{ctd} = 1.14 \text{ N/mm}^2$$

mentre la resistenza di calcolo dell'acciaio è:  $f_{yd} = 374$  N/mm<sup>2</sup>.

Normalmente solo solette e solai possono essere progettati privi delle armature di taglio; tuttavia anche le travi, *se su luce modesta*, si possono progettare senza l'armatura a taglio (Punto B5.7 delle *Istruzioni per l'applicazione delle Norme Tecniche...* Cir. Min. LL.PP.15/10/96). In assenza di armatura deve essere verificata l'eq. (5.18). Ritenendo che l'armatura longitudinale indicata nei dati dell'esempio sia prolungata per la lunghezza  $0.9d$  dalla parte dei momenti decrescenti, si ha:

$$r = (1.6 - 0.57) = 1.03$$

$$\rho_l = 15.7/30 \times 57 = 0.0092 < 0.02$$

$$\delta = 1 \quad (N = 0)$$

e quindi:

$$V_{cu} = 0.25 \times 1.14 \times 1.03(1 + 50 \times 0.0092)300 \times 570 = 73240 \text{ N} < V_d$$

Pertanto la trave deve, in ogni caso, essere armata per il taglio.

Resistenza delle bielle compresse [eq. (5.20)]:

$$0.3f_{cd}bd = 0.3 \times 15.56 \times 570 \times 300 = 798228 \text{ N}$$

$\gg V_d$ . Pertanto la verifica del calcestruzzo compresso è largamente soddisfatta.

Il taglio portato dal calcestruzzo si calcola con l'eq. (5.22):

$$V_{cu} = 0.60 f_{ctd} b d \delta = 0.60 \times 1.14 \times 300 \times 570 \times 1 = 116974 \text{ N}$$

Poiché risulta  $V_{cu} > V_d$  si deve assumere  $V_{su} = V_d/2 = 56.3 \text{ kN}$ . Quindi per l'eq. (5.23) con  $\beta = 90^\circ$  (staffe) si ha:

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{su}}{0.9 d f_{yd}} = \frac{56300}{0.9 \times 570 \times 374} = 0.293 \text{ mm}^2/\text{mm} = 2.93 \text{ cm}^2/\text{m}$$

L'armatura minima richiesta è:  $A_{sw_{\min}} = 0.1 \left(1 + 0.15 \times \frac{d}{b}\right) b = 0.1 \left(1 + 0.15 \times \frac{57}{30}\right) 30 = 3.855 \text{ cm}^2/\text{m}$ . Poiché questa supera il valore calcolato in precedenza, in progetto sarà adottato  $A_{sw}/s = 3.855 \text{ cm}^2/\text{m}$ .  $\square$

**Esempio 5.2** Per la stessa sezione dell'esempio precedente si verifichi il caso in cui  $V_e = 200 \text{ kN}$ . **Tensioni ammissibili.** La tensione massima nel calcestruzzo è:

$$\tau_{cm} = \frac{200000}{0.9 \times 570 \times 300} = 1.3 \text{ N/mm}^2$$

e quindi risulta  $\bar{\tau}_{c0} < \tau_{cm} < \bar{\tau}_{c1}$ : quindi la trave deve essere armata per il taglio. Per la prima delle eq. (5.17) si ha:

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{200000}{0.9 \times 570 \times 255} = 1.53 \text{ mm}^2/\text{mm} = 15.3 \text{ cm}^2/\text{m}$$

**Verifica allo stato limite ultimo.** La sollecitazione di progetto è  $V_d = 1.5 \times 200 = 300 \text{ kN}$ . La verifica a compressione delle bielle è soddisfatta poiché  $V_d < 798 \text{ kN}$ . Per il calcolo dell'armatura si ha:

$$V_{su} = V_d - V_{cu} = 300 - 117 = 183 \text{ kN} > V_d/2$$

quindi:

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{su}}{0.9 d f_{yd}} = \frac{183000}{0.9 \times 570 \times 374} = 0.95 \text{ mm}^2/\text{mm} = 9.5 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$\square$