Appendice
La teoria di Piaget sullo sviluppo intellettuale

La trattazione principale di questo libro contiene alcuni punti di discussione del lavoro di Jean Piaget, e ho cercato di rendere tale discussione comprensibile anche a un lettore che non abbia conoscenze in proposito. Tuttavia, non ho potuto che fornire un quadro approssimativo delle affermazioni teoriche di Piaget. La sua teoria è una costruzione vasta, e soltanto una parte limitata di essa è attinente a quanto avevo da dire. Questa appendice è un tentativo di compensare lo squilibrio e di offrire un quadro migliore, seppure necessariamente incompleto, del tutto. Non intendo presentare qui le prove sulle quali Piaget appoggia le sue asserzioni, salvo di tanto in tanto, come chiarimento; e non mi occuperò di valutazione critica. Lo scopo è quello di dare un breve e chiaro resoconto sugli aspetti principali della teoria.

1. La natura generale della teoria

Piaget si è inizialmente formato nel campo della zoologia, e quando studia il comportamento umano cerca di collocarlo nel contesto più ampio degli altri esseri viventi. Per lui la questione essenziale è: come si adattano gli animali al proprio ambiente? L'intelligenza umana è quindi considerata come un mezzo di questo adattamento.

È importante notare che l'attenzione non si concentra sui modi in cui le persone differiscono le une dalle altre, quindi non sui "test d'intelligenza" quali generalmente li intendiamo. Piaget vuole scoprire – e spiegare – il corso normale dello sviluppo. Egli crede infatti che vi *sia* un corso normale: una sequenza che noi tutti seguiamo, sebbene a velocità variabili, e in cui qualcuno si spinge più lontano di altri.

Questo concentrarsi su ciò che è comune a noi tutti deriva dal fatto che, oltre a essere uno zoologo, Piaget è un epistemologo: vale a dire che si occupa di questioni di carattere generale sulla natura della conoscenza. Piaget ritiene che a tali problemi non si possa rispondere senza tenere conto di come la conoscenza si sviluppa e cresce. Così, entrambi i suoi interessi, quello biologico e quello epistemologico, convergono nello studio dello sviluppo dell'intelletto umano.

Evidentemente, tale sviluppo può essere studiato quale si manifesta nel corso di vite individuali, oppure può essere studiato quale avviene nella storia delle specie, nello sviluppo di branche del sapere, come la matematica o le scienze. Piaget è interessato a entrambi questi argomenti. Ma qui ci occuperemo soltanto delle sue affermazioni sugli sviluppi che hanno luogo nel corso della vita di un individuo.

Per poter comprendere queste affermazioni, è meglio cominciare prendendo in considerazione ciò che Piaget ha da dire sull'adattamento biologico in generale.

2. Caratteristiche dell'adattamento biologico

2.1 Autoregolazione ed equilibrio

Secondo il punto di vista di Piaget, il tratto essenziale degli organismi viventi è che sono *sistemi che si regolano da soli*. A differenza degli esseri inanimati, essi possono mantenere o riparare le proprie strutture in caso di minaccia o di danno. Per ricorrere a due esempi fisiologici familiari, abbiamo modo di risanare un tessuto danneggiato se ci tagliamo un dito, e di mantenere costante la temperatura corporea entro un ristretto intervallo, anche quando la temperatura circostante cambia considerevolmente.

Quindi gli esseri viventi cercano di raggiungere una certa stabilità nell'organizzazione di fronte al pericolo. Quando non riescono a farlo in alcun modo, muoiono. Poiché alla fine tutti muoiono, l'adattamento perfetto non viene mai raggiunto: qualche nuova minaccia può sempre presentarsi, risultando letale. È chiaro tuttavia che, quanto più ampia sarà la gamma di avvenimenti che un animale potrà fronteggiare, tanto migliori saranno le sue possibilità. Alcuni animali si adattano molto bene a un particolare ambiente circoscritto, ma non sono flessibili: non sono in grado di cambiare il proprio comportamento quando cambia l'ambiente. Gli esseri umani, invece, hanno una straordinaria capacità di reagire al cambiamento in modo flessibile.

Quando un animale ha raggiunto una certa armonia, o un modello di interazione soddisfacente con il suo ambiente, Piaget dice che è *in equilibrio*. Tale equilibrio, tuttavia, non deve essere interpretato come una condizione di riposo. È una condizione di continua attività, in cui l'organismo compensa, o cancella, gli elementi perturbatori del sistema, presenti o previsti. Vale a dire che la compensazione può consistere nella correzione di qualcosa che è già andato storto, oppure nel prepararsi per qualcosa che si prevede vada storto se nulla viene fatto.

2.2 Assimilazione e accomodamento

Questa enfasi data all'attività si trova in tutto il pensiero di Piaget. Una creatura vivente non si limita a reagire, ma entra anche in *azione*. L'adattamento non è semplicemente una questione di cambiare quando si verifica una pressione che spinge verso un cambiamento passivo, come una palla di impasto per il pane cambia forma quando viene schiacciata. La differenza è che l'essere vivente ha un'organizzazione da preservare. Perciò un aspetto dell'adattamento biologico consiste nello sforzo di interagire con l'ambiente, facendo in modo che corrisponda alle strutture esistenti nell'organismo stesso, in un certo senso "incorporandolo". Una vera e propria "incorporazione" avviene, per esempio, quando l'animale digerisce il cibo. Il termine generale che Piaget dà a questa parte del processo di adattamento è *assimilazione*.

È chiaro, tuttavia, che l'impulso ad assimilare non potrebbe essere efficace, se operasse da solo. Per adattarsi con successo, un animale deve modificare il proprio comportamento in modi che riconoscano le proprietà delle cose con le quali ha a che fare. Può bere liquidi, per esempio, ma deve masticare i cibi solidi se li vuole assimilare. Quindi l'assimilazione non avviene mai in forma pura, ma è sempre bilanciata da almeno qualche componente di *accomodamento*. L'accomodamento è lo sforzo di adeguare il comportamento dell'organismo all'ambiente; quindi i due processi sono opposti, ma complementari.

Se assimilazione e accomodamento possono essere immaginati separatamente, in realtà non si possono distinguere l'uno dall'altro in un atto adattivo. Non è possibile osservare il comportamento e dire: "Ah, ecco che ora l'animale sta assimilando, e ora invece si adatta". Entrambi i processi avvengono contemporaneamente, e sono legati in modo indissolubile. È attraverso la loro azione congiunta che l'animale può conquistare continuità e novità. L'assimilazione agisce per preservare le strutture; l'accomodamento lavora per modificarle, svilupparle e cambiarle.

Il comportamento adattivo contiene sempre una parte di queste due componenti. Tuttavia, queste possono verificarsi in proporzioni variabili. Piaget cita spesso il gioco del "facciamo finta" dei bambini piccoli come esempio di comportamento ricco di tendenze assimilative, in quanto nel corso di questo gioco il bambino non è molto interessato alle caratteristiche oggettive delle cose con cui gioca. Un vecchio pezzo di legno può servire da bambola, da nave o da aeroplano, secondo i bisogni e gli interessi del momento. Per contrasto, l'imitazione offre un esempio di comportamento che è soprattutto (ma mai esclusivamente) di accomodamento, perché è un tentativo di agire in una maniera regolata dalle caratteristiche del mondo esterno.

Sebbene si verifichino estremi di questo tipo, l'adattamento raggiungerà la sua massima efficacia quando vi sarà il giusto bilanciamento tra le due tendenze. Per descrivere questo bilanciamento, Piaget ricorre di nuovo alla parola "equilibrio". E, pur riconoscendo che un certo tipo di equilibrio fra assimilazione e accomodamento può essere raggiunto a ogni livello di sviluppo, sostiene che, con la crescita, il bambino raggiunge forme di equilibrio più soddisfacenti tra le due cose. (Per Piaget questo risultato è connesso al miglioramento della capacità di "decentrare" – vedere paragrafo 4.5.)

3. Intelligenza umana: la linea di sviluppo

3.1 La conquista di un ambiente allargato

Ogni adattamento tende verso lo sviluppo della capacità di interagire con un ambiente sempre più vasto. Ma l'intelligenza umana è unica per le dimensioni che raggiunge in questo campo. La maggior parte degli animali si adatta soltanto alle cose vicine nel tempo e nello spazio. E questo è vero anche per i bambini. Ma, con lo sviluppo, i bambini diventano capaci di acquisire conoscenza di oggetti ed eventi lontanissimi da loro, e a riflettere su queste cose. Uno dei principali interessi di Piaget sta nel dimostrare come avvenga questo cambiamento.

3.2 Continuità e cambiamento

Pur insistendo sul fatto che lo sviluppo è continuo, Piaget ammette l'esistenza di *stadi*. Durante ognuno di questi stadi si può naturalmente osservare lo sviluppo di vari schemi di comportamento, che in superficie appaiono diversi. Tuttavia, alla loro base vi sarebbe qualche struttura comune che li spiega e conferisce allo stadio la sua unità. Perciò il passaggio a un nuovo stadio indica che sta avvenendo un processo piuttosto fondamentale di riorganizzazione. Non c'è, però, una frattura netta tra gli stadi, né esistono inizi completamente nuovi.

3.3 Ordine e velocità

Gli stadi principali si susseguono l'uno all'altro in un ordine che ritenuto uguale per tutti i bambini. Ma non significa che i bambini siano "pre-programmati" o totalmente definiti dalla maturazione (vedere paragrafo 4.2). È perché ogni stadio si basa su quello che lo precede, e così la costruzione precedente è necessaria per la successiva. Mentre l'ordine degli stadi è lo stesso per tutti i bambini, la velocità del movimento certamente non lo è. Quando parla delle varie età, Piaget si riferisce a delle medie, e riconosce che vi possono essere grandi scostamenti da esse. Si reputa che vi siano tre stadi (o periodi) principali con determinate suddivisioni.

3.4 Il periodo sensomotorio (dalla nascita ai diciotto mesi circa)

Al momento della nascita il bambino è in grado di fare una gamma molto limitata di cose; e all'apparenza la sua dotazione sembra scarsa. Le sue capacità comprendono soltanto un numero ristretto di reazioni riflesse, succhiare, inghiottire e via dicendo. Tuttavia, non si deve credere che i riflessi siano risposte isolate, in quanto sono immerse in uno schema più ampio di attività ritmica spontanea; e il bambino piccolo ha già la capacità di mettere in moto i complessi processi di assimilazione e accomodamento che trasformeranno i rigidi riflessi in modelli di comportamento sorprendentemente flessibili prima delle fine di questo primo periodo.

In questa fase, i riflessi si sviluppano attraverso una serie di sotto-stadi (Piaget ne riconosce sei) per diventare modelli (o schemi) di comportamento organizzati che possono essere usati intenzionalmente. Il bambino diventa capace di inventare nuovi mezzi per fare le cose. Può quindi risolvere certi problemi a livello pratico. Per esempio, può escogitare modi per raggiungere cose che sono fuori dalla sua portata, servendosi di semplici strumenti.

Questi cambiamenti si notano abbastanza presto nel comportamento. Ma, allo stesso tempo, Piaget sostiene che avviene una trasformazione della massima importanza che non può essere osservata in modo così diretto. Egli afferma che, all'inizio, il bambino è incapace di fare qualsiasi distinzione tra sé stesso e il resto del mondo. Inizialmente il bimbo non sa che esistono le altre cose; e per lo stesso motivo non sa nemmeno di esistere. È profondamente egocentrico.

Per comprendere che cosa Piaget intenda con questo, è essenziale capire che l'egocentrismo di cui parla, in questa fase, è totalmente inconscio. In esso non vi può essere coscienza di sé. Un simile egocentrismo è quindi ben lontano da concetti quali "preoccupazione per il sé" o "egoismo".

Nel corso del periodo sensomotorio, il bambino riesce a ridurre lentamente la propria profonda inconsapevolezza originaria. Comincia a distinguere sé stesso dal resto del mondo. Alla fine del periodo, si è costruito la nozione di un mondo di oggetti che sono indipendenti da lui e dalle sue azioni. Sa che le cose continuano a esistere anche quando non le può vedere o avvertire in qualche modo.

La prova che questo fondamentale cambiamento avviene durante il periodo sensomotorio sarebbe fornita dal comportamento del bambino quando un oggetto con cui sta giocando viene nascosto alla sua vista, per esempio da un panno posto sull'oggetto stesso. Fino all'età di sei mesi circa, il bambino non farà alcun tentativo di recuperare l'oggetto. Nel pensiero di Piaget ciò significa che il bambino non ha ancora sviluppato il *concetto dell'oggetto*, non ha nessuna idea dell'esistenza indipendente di altre cose. L'argomentazione è quindi che il graduale processo di costruzione di tale concetto si rifletta nella crescente capacità del bimbo di comprendere dove sia andato a finire un oggetto, prima nel semplice caso già descritto, poi in situazioni più complesse, in cui l'oggetto viene spostato da un posto all'altro.

Perciò lo sviluppo del concetto dell'oggetto è considerato strettamente collegato alla progressiva organizzazione dei movimenti nello spazio, sia gli spostamenti di oggetti, sia i movimenti del bambino stesso da un punto all'altro. Quando lo sviluppo è completo, il bambino è in grado di seguire un oggetto attraverso una successione di movimenti anche se non è a lui sempre visibile; e riesce a trovare il modo di muoversi intorno, facendo deviazioni e ritornando al posto da cui era partito. Piaget sostiene che queste capacità dipendono dalla formazione di una struttura fondamentale, che egli chiama il "gruppo di spostamenti".

Il termine "gruppo" verrà definito e illustrato nel prossimo paragrafo (3.5). Nel frattempo possiamo dire che la caratteristica più importante dell'organizzazione in gruppo, per quanto concerne la teoria di Piaget, è la *reversibilità*. Una volta stabilito il gruppo di spostamenti, il bambino può invertire un movimento da A a B, così da ritornare di nuovo ad A. Il pieno significato di questo diventerà più chiaro quando saranno discussi gli sviluppi del periodo operatorio concreto.

3.5 Il periodo operatorio concreto (da diciotto mesi a undici anni circa)

Questo lungo stadio è diviso in due sottoperiodi. Durante il primo di questi, che è chiamato periodo "preoperatorio" e che dura fino all'età di sette anni circa, ci si prepara alle "operazioni concrete"; durante il secondo queste vengono definite e consolidate.

La prova che le operazioni sono in atto è fornita, secondo la teoria, dalla risposta del bambino a compiti come la conservazione (vedere pag. 40) e l'inclusione in classi (vedere pag. 24). Quando un bambino, per esempio, ragiona e riconosce che il numero di una serie di oggetti deve rimanere lo stesso anche se la disposizione nello spazio è stata alterata, Piaget dice che fa così perché ha capito che la prima disposizione si può ottenere di nuovo, semplicemente invertendo i movimenti che l'hanno cambiata. Il suo pensiero, quindi, è reversibile.

Questo tipo di flessibilità mentale è strettamente correlato a un ipotetico aumento della capacità di "decentrare" (paragrafo 4.5) e dipenderebbe dallo sviluppo delle strutture operatorie. Ma che cosa *sono* queste strutture?

Nella teoria di Piaget la parola "operazione" ha un significato preciso. Per intendere questo significato, bisogna capire tre cose.

Primo, le operazioni sono azioni. È vero che non sono manipolazioni fisiche, perché vengono compiute soltanto "nella mente". Sono nondimeno azioni, che trovano la loro origine negli atti fisici del periodo sensomotorio.

Secondo, gli atti da cui partono non sono atti di qualsiasi genere. Sono piuttosto atti come combinare, ordinare, separare e ricombinare le cose. Sono perciò atti molto generali.

Terzo, un'operazione non può esistere da sola, ma soltanto entro un sistema organizzato di operazioni. E l'organizzazione assume sempre la forma di un "gruppo" o di un "raggruppamento".

La natura dell'organizzazione in gruppo è facile da capire se ricorriamo a un esempio familiare. In ogni gruppo ci deve essere un insieme di elementi: prendiamo quindi come esempio l'insieme dei numeri interi positivi e negativi. Inoltre deve esserci un'operazione che possa essere effettuata sugli elementi: consideriamo l'operazione di addizione. Le seguenti quattro condizioni devono essere soddisfatte.

(1) Composizione
Se l'operazione viene effettuata con due elementi qualsiasi, anche il risultato è un elemento – vale a dire che non si esce mai dal sistema. (Se si aggiunge un numero a un altro numero, si ottiene un terzo numero.)

(2) Proprietà associativa
L'ordine con cui si effettuano due operazioni successive non ha importanza. (Se sommate *tre* a *quattro*, e poi aggiungete ancora *due*, otterrete lo stesso risultato che avreste avuto sommando *quattro* a *due*, e poi aggiungendo *tre*.)

(3) Identità
Tra gli elementi c'è sempre un elemento identità – e uno soltanto. L'elemento identità non altera nessuno degli altri elementi con cui è combinato. (L'elemento identità in una somma di numeri è lo *zero*. Se si aggiunge lo *zero* a un dato numero, il risultato non è altro che quel numero.)

(4) Reversibilità
A ogni elemento corrisponde un altro elemento chiamato il suo inverso. Quando un elemento è combinato con il suo inverso, il risultato è l'elemento

identità. (I numeri positivi e negativi sono gli uni gli inversi[49] degli altri. *Tre* sommato a *meno tre* dà come risultato zero.)

Un gruppo è una struttura matematica. Ma Piaget ritiene che abbia una grande importanza psicologica perché può essere usato per specificare la natura di alcune delle strutture fondamentali dell'intelligenza umana, che variano dalla prima organizzazione di quell'intelligenza a livello pratico (paragrafo 3.4) fino alla sua organizzazione definitiva su un piano simbolico altamente astratto (paragrafo 3.6). Nel periodo intermedio, tuttavia, nella fase operatoria concreta, risulta che la struttura di gruppo non si "adatta" o non corrisponde propriamente alle strutture della mente. Per esempio, non corrisponde perfettamente alla struttura di una gerarchia di classi o sottoclassi; perché se uno pensa di cercare di sommare una classe a sé stessa, scopre che questo non produce una nuova classe, come accadrebbe con i numeri. (Tre più tre fa sei, ma la classe dei cani più la classe dei cani non fa altro che la classe dei cani.)

A causa di questa difficoltà, Piaget introduce il concetto di "raggruppamento". Un raggruppamento è una specie di variante del gruppo, particolarmente adatta per tenere conto delle strutture della classificazione, seriazione e simili.[50] La cosa importante da notare è che, nonostante le differenze tra "gruppo" e "raggruppamento", la condizione di reversibilità viene sempre mantenuta in qualche forma; e per la teoria di Piaget questa è una caratteristica essenziale. Quindi, se due sottoclassi vengono sommate per formare una classe intera, è sempre possibile togliere nuovamente una di esse. E quando il pensiero è diventato operatorio, è possibile fare ciò "nella mente".

■

Il lavoro preparatorio che deve avere luogo durante il periodo preoperatorio, prima che appaiano le operazioni, consiste principalmente nello sviluppo della capacità del bambino di rappresentare le cose a sé stesso. Come abbiamo visto, la struttura di gruppo esiste già alla fine del periodo sensomotorio (paragrafo 3.4), ma soltanto a livello pratico. Il passo successivo sta nell'"interiorizzarla". Ma Piaget insiste continuamente sul fatto che interiorizzare una struttura non è semplicemente una questione di prenderla in un certo senso nel suo complesso, proprio come la conoscenza in generale non è una questione di ricevere una "copia" della realtà pronta all'uso. Interiorizzare significa ricostruire su un piano nuovo. Il lavoro del periodo sensomotorio deve essere rifatto da capo. Ma ora i mattoni sono simboli nella mente: atti di pensiero piuttosto che atti del corpo. Un bambino di due-tre anni riesce a met-

---

[49] Nel caso dell'addizione per indicare l'inverso di un numero si usa in genere il termine "opposto" (n.d.C.).
[50] Per i particolari, il lettore consulti la spiegazione dello stesso Piaget in *Logic and Psychology*, Manchester University Press, Manchester, 1953.

tere degli oggetti in fila, distanziarli l'uno dall'altro, e poi rimetterli di nuovo insieme. Un bambino di sette-otto anni può *pensare* di fare queste cose.

Tuttavia, i nuovi atti simbolici sono ancora strettamente legati alle cose concrete con le quali gli atti fisici originari venivano compiuti. Il bambino, principalmente, pensa ancora a fare le cose con oggetti fisici: ordinarli, classificarli, disporli in serie, e così via. Da cui il nome di periodo operatorio *concreto*.

Quando paragona l'intelligenza del periodo sensomotorio con l'intelligenza del periodo operatorio concreto, Piaget parla di tre principali modi in cui quest'ultimo rappresenta un progresso rispetto al primo.

In primo luogo, l'intelligenza sensomotoria è più statica, meno mobile. Prende in considerazione le cose una dopo l'altra, senza riuscire ad avere una veduta d'insieme. È come un film visto al rallentatore, quasi una successione di fotogrammi. L'intelligenza operatoria riesce ad affrontare molto meglio le trasformazioni tra i diversi stati e a capire come si collegano tra loro.

In secondo luogo, l'intelligenza sensomotoria mira soltanto al successo pratico. Il soggetto dotato di pensiero operatorio è molto più interessato a spiegare e a capire. Questo cambiamento è in rapporto con gli sviluppi della coscienza, che determina un aumento della consapevolezza di come si raggiungono gli scopi.

In terzo luogo, siccome l'intelligenza sensomotoria è limitata ad azioni reali compiute su oggetti reali, ha un'estensione ristretta nello spazio e nel tempo. Le azioni simboliche possono spaziare maggiormente.

In teoria, naturalmente, la portata di tali atti non ha limiti, e può raggiungere l'infinito e l'eternità. Nella pratica, questa portata continua a essere notevolmente ridotta finché il pensiero è ancora nel periodo concreto.

3.6 Il periodo operatorio formale

Il pensiero di questo periodo, una volta che si è consolidato, è il pensiero di un adulto intelligente. La sua caratteristica più marcata è l'abilità di ragionare logicamente, partendo da premesse e traendo le conclusioni che necessariamente ne conseguono. E a questo punto non importa più, secondo la teoria, che le premesse siano vere o false: esse possono essere accettate come semplici postulati.

Questa capacità di lavorare partendo da postulati, o ipotesi, presuppone non soltanto un pensiero logico e matematico, ma anche il genere di attività che è caratteristico della scienza. L'individuo nel periodo operatorio formale può concepire ipotesi, dedurre conseguenze, e usare tali deduzioni per mettere alla prova le ipotesi. Inoltre, potrà farlo programmando esperimenti sistematici in cui capirà, per esempio, il valore di mantenere una cosa costante, lasciando che altre cose cambino. E poi può proseguire formulando regole generali basate sui risultati sperimentali.

Piaget tenta in vari modi di cogliere l'essenza del cambiamento dal periodo concreto a quello formale. Per esempio, egli afferma che, mentre nel periodo operatorio concreto il soggetto si preoccupa ancora di maneggiare *cose*, anche se lo fa “nella mente”, nel periodo operatorio formale è diventato capace di maneggiare *proposizioni*, o idee. Può ragionare sulla base di affermazioni verbali. Piaget cita come esempio il seguente problema:

> Edith è più bionda di Susan. Edith è più scura di Lily. Chi è la più scura?

Questo problema presenta considerevoli difficoltà per molti bambini di dieci anni. Eppure, se si trattasse di disporre tre bambole in fila, il compito sarebbe facile per loro.

Piaget si serve di questo tipo di differenza per sostenere l’argomentazione che, ancora una volta, lo sviluppo del periodo formale consiste nel ricostruire su un nuovo piano ciò che era stato raggiunto al livello precedente.

In questo caso, il processo di ricostruzione porta a un ulteriore esito importante, che forse si può esprimere meglio come uno spostamento nel rapporto tra ciò che è reale e ciò che è possibile. Il soggetto nello stadio operatorio formale tende a cominciare da ciò che è possibile. Questo significa che, quando affronta un problema, è probabile che cominci prendendo in considerazione le possibilità in maniera sistematica. Così, “i fatti” sono collocati in un contesto più vasto. Vengono concepiti come una specie di parte realizzata di un universo più ampio che consiste in ciò che potrebbe essere.

Forse il modo migliore di illustrare l’effetto di tale spostamento è dato da un compito che consiste nel cercare di scoprire il modo di combinare sostanze chimiche incolori allo scopo di ottenere un liquido giallo. Il bambino del periodo operatorio formale è quello che tenta sistematicamente tutte le combinazioni possibili. E di solito, a differenza del bambino del periodo concreto, non si ferma quando ha trovato un metodo che funziona. Continua finché non ha esplorato l’intero sistema.

Infine, Piaget usa ancora una volta il concetto di gruppo quando descrive le strutture su cui si basa il pensiero operatorio formale. E ora avanza la teoria che i vari “raggruppamenti” elementari del periodo operatorio concreto siano sostituiti da un gruppo unificato detto “gruppo delle quattro trasformazioni”, o gruppo INCR. Purtroppo non è possibile fornire un’adeguata descrizione di questo gruppo senza addentrarci in aspetti notevolmente complessi. I lettori che volessero saperne di più potranno consultare la spiegazione dello stesso Piaget contenuta in *Logic and Psychology*.

4. Intelligenza umana: nozioni teoriche

4.1 Il ruolo dell’azione

Piaget afferma che non vi è discontinuità tra i più semplici tipi di comportamento adattivo e le forme d’intelligenza maggiormente evolute. Una cosa si sviluppa dall’altra. Perciò, anche quando l’intelligenza ha raggiunto il punto in cui fa grande uso di una conoscenza altamente astratta, dobbiamo cercare le origini di quella conoscenza nell’*azione*.

Piaget ci dice continuamente che la conoscenza non ci viene dall'esterno, "pronta all'uso". Non è una "copia" della realtà – non si tratta semplicemente di ricevere impressioni, come se le nostre menti fossero lastre fotografiche. Né la conoscenza è una cosa con cui nasciamo. Dobbiamo *costruirla*. E lo facciamo lentamente, nel corso di molti anni.

4.2 Il ruolo della maturazione

La teoria di Piaget non è quindi una teoria maturazionista. Non si diventa capaci di pensiero intelligente aspettando meramente che il tempo passi. È vero che Piaget riconosce un certo ruolo alla maturazione del sistema nervoso. Ma questo non fa altro che "aprire possibilità", o limitarle temporaneamente. Le possibilità devono essere trasformate in realtà con altri mezzi.

4.3 Il ruolo della funzione simbolica in generale e del linguaggio in particolare

Piaget insiste nell'affermare che il linguaggio non crea pensiero intelligente.

Egli vede il linguaggio soltanto come una manifestazione di quella che definisce la "funzione simbolica generale". Quando questa funzione comincia ad apparire (normalmente durante il secondo anno di vita), il bambino diventa capace di rappresentare oggetti assenti o eventi per mezzo di simboli o segni. Piaget distingue i simboli, che somigliano alle cose che rappresentano, dai segni, che indicano le cose in una maniera alquanto arbitraria. I simboli possono essere privati e personali, mentre i segni sono convenzionali e "collettivi". La lingua è un sistema di segni.

L'avvento della funzione simbolica generale si manifesta, quindi, non soltanto con gli inizi della lingua, ma anche con la comparsa del gioco simbolico e dell'"imitazione differita" (imitazione quando il modello non è più presente). Piaget crede che l'imitazione interiorizzata sia la fonte delle immagini mentali.

La capacità generale di rappresentare la realtà a sé stessi è evidentemente di grande importanza per lo sviluppo del pensiero. Gran parte della differenza tra l'intelligenza sensomotoria e quella operatoria, per esempio, sta nel fatto che quest'ultima è interiorizzata, cioè funziona a un livello di rappresentazione. E Piaget ammette che quanto più si sviluppa l'intelligenza, tanto più grande diventa l'importanza del linguaggio appropriato, vale a dire del linguaggio distinto da altre manifestazioni della funzione simbolica. Ma egli non è mai disposto ad ammettere che il linguaggio sia la fonte del pensiero. Per lui, le origini del pensiero vanno ricercate nell'azione.

4.4 Il ruolo dell'ambiente sociale

Piaget riconosce che la velocità del passaggio da un periodo di sviluppo al successivo è influenzata dall'ambiente sociale e culturale (sebbene l'ordine degli stadi rimanga inalterato). Tutto dipende, tuttavia, dal fatto che il bambino riesca ad assimilare o meno ciò che l'ambiente gli offre. E a sua volta questo dipende, secondo Piaget, dagli sforzi costruttivi del bambino stesso. (Vedere anche il paragrafo 4.8 su equilibrazione e apprendimento.)

Allo stesso tempo, Piaget riconosce l'importanza dello scambio di idee per lo sviluppo del pensiero, e in particolare per il rafforzamento della consapevolezza dell'esistenza di altri punti di vista.

4.5 Decentramento[51]

I concetti di "decentramento" e di "egocentrismo" sono strettamente legati nel pensiero di Piaget. La diminuzione dell'egocentrismo comporta l'aumento della capacità di "decentrare", vale a dire di muoversi liberamente da un punto di vista a un altro, sia in senso letterale che in senso metaforico.

Nei suoi primi lavori, Piaget descriveva questo processo soprattutto in termini di diminuzione dell'egocentrismo. Più tardi, spesso preferisce parlare di "centramento" e "decentramento". Ma questo non indica alcun cambiamento radicale di pensiero da parte sua, e certo non significa che egli attribuisca una minor importanza al concetto di base. Se mai, Piaget gli dà un maggior peso nelle sue successive teorizzazioni. L'idea dell'egocentrismo in diminuzione, come egli la declinava originariamente, era strettamente associata a quella della crescente socializzazione. Più recentemente egli ha detto: "Ma è enormemente più generale e più fondamentale per la conoscenza in tutte le sue forme".

L'idea è che quando il pensiero è "centrato", perché incapace di liberarsi di un punto di vista, l'assimilazione ha un effetto deformante, non viene raggiunto un equilibrio soddisfacente tra l'assimilazione e l'accomodamento, e si può arrivare soltanto a una conoscenza "soggettiva" della realtà. Il processo per migliorare questa conoscenza non consiste quindi nell'aggiungere altri frammenti d'informazione. Consiste piuttosto nello sviluppare la capacità di muoversi agilmente da un punto di vista a un altro, per poi tornare indietro, così da avvicinarsi a una visione "obiettiva" del tutto.

4.6 Esperienza fisica, esperienza logico-matematica e astrazione riflessiva

L'esperienza, nel senso che Piaget attribuisce al termine, comporta l'acquisizione di nuova conoscenza per mezzo dell'azione sugli oggetti. Ma questo processo consente lo sviluppo di diversi tipi di conoscenza. Perciò si potrebbe parlare, di conseguenza, di diversi tipi di esperienza. Le due tipologie che sono più importanti per la sua teorizzazione sono l'esperienza fisica e l'esperienza logico-matematica.

L'esperienza fisica produce la conoscenza delle proprietà degli oggetti che vengono usati. L'esperienza logico-matematica produce conoscenza non degli oggetti ma delle azioni stesse e dei loro risultati.

Con l'esperienza fisica, per esempio, si può acquisire la conoscenza del peso degli oggetti; o del fatto che, ferme restando tutte le altre condizioni, il peso aumenta con l'aumento del volume, e via di seguito.

---

[51] Per una discussione più approfondita, si veda il capitolo 2 di questo libro.

In ogni caso, il peso di un oggetto esiste anche senza un nostro intervento.[52] Ma possiamo, con le nostre azioni, introdurre nel mondo attributi che prima non c'erano. Per esempio, possiamo prendere un insieme di ciottoli e disporli in fila. Abbiamo così introdotto un elemento di ordine. Supponiamo in seguito di contare i ciottoli e di arrivare a un certo numero; dopo di che cambiamo la disposizione, ricontiamo i ciottoli, e otteniamo di nuovo lo stesso numero. Abbiamo così scoperto, sostiene Piaget, che il numero di un insieme di oggetti è indipendente dall'ordine in cui gli oggetti sono disposti. E questo, egli lo considera un buon esempio del tipo di conoscenza che si basa sull'esperienza logico-matematica. Quello che abbiamo scoperto è un rapporto tra due azioni e non, o non soltanto, una proprietà appartenente ai ciottoli.

È importante notare che i tipi di azione che producono esperienza logico-matematica sono proprio gli stessi tipi che forniscono le basi per le strutture operatorie (paragrafi 3.5 e 3.6).

Quando parla di esperienza logico-matematica, Piaget sottolinea ancora una volta che anche le forme più alte di ragionamento astratto traggono origine dall'azione. Egli afferma che le conclusioni alle quali si arriverà in seguito per deduzione, e che in realtà finiranno per risultare evidentissime, devono essere all'inizio controllate confrontandole con le prove di quanto si è scoperto agendo. Per esempio, supponiamo che un bambino scopra di poter disporre un insieme di oggetti in due suddivisioni uguali, accoppiando gli oggetti uno per uno. *Saprà* allora, senza doverlo provare, che se un oggetto viene aggiunto all'insieme totale, non sarà più possibile dividere l'insieme in due parti uguali in questo modo? Piaget risponde che nello stadio pre-operatorio il bambino non lo saprà, ma in seguito la cosa finirà per apparirgli assolutamente ovvia.

È nel discutere come avvenga questo tipo di cambiamento che Piaget introduce il concetto di *astrazione riflessiva*. I processi di astrazione sarebbero collegati tanto con l'esperienza fisica, quanto con l'esperienza logico-matematica. Nel caso dell'esperienza fisica, la conoscenza del peso è raggiunta attraverso un tipo di astrazione che equivale a trascurare altre proprietà dell'oggetto, quali il suo volume o la sua forma. Il peso viene dunque astratto, o "rimosso" dal tutto, per essere considerato. Ma deve accadere molto più di questo quando si astrae una proprietà dalle proprie azioni. Piaget sostiene che in tal caso non è sufficiente limitarsi a trascurare le altre proprietà. Inoltre, è richiesto un processo di costruzione nuova. Per usare le sue stesse parole: "l'astrazione che parte dalle azioni… non consiste semplicemente nell'isolare o notare elementi separati, ma esige necessariamente una ricostruzione per mezzo di elementi proiettati o 'riflessi' dal piano più basso a quello più alto". È questo il tipo di

---

[52] Si noti, comunque, che siccome normalmente *conosciamo* il peso di un oggetto non appena lo prendiamo in mano, la nostra conoscenza non è indipendente dall'azione. Quindi Piaget afferma che l'esperienza fisica non è mai "pura", ma implica sempre una componente logico-matematica.

ricostruzione che avverrebbe quando, per esempio, hanno origine le operazioni concrete.

Ci sono due ragioni per cui Piaget definisce "riflessiva" l'astrazione che parte dalle azioni. Per prima cosa, come dimostra la citazione, egli fa proprio uso di una metafora: la costruzione al livello più basso è "riflessa" o "proiettata" sul livello più alto. E, secondariamente, una "riflessione" aumentata, nel senso di ponderazione e consapevolezza intensificate, caratterizza il cambiamento.

4.7 Equilibrazione

L'importanza dell'*equilibrio* nella teoria di Piaget è già stata segnalata (paragrafo 2.1). "Equilibrazione" è il termine generale per indicare il processo attraverso il quale si raggiunge un miglior equilibrio.

L'idea ha una grandissima affinità con quella dell'autoregolazione (paragrafo 2.1). L'equilibrazione è un processo autoregolatore e in quanto tale mira a correggere o a compensare qualsiasi perturbazione nel sistema. Con il continuare del processo nel tempo, stati di equilibrio limitato o parziale, per esempio quelli del periodo sensomotorio, vengono sostituiti da stati "migliori" che sono caratterizzati dalla capacità di gestire un maggior numero di circostanze e di essere più mobile, più permanente e più stabile.

Uno dei concetti chiave è che il miglioramento dell'equilibrio è connesso molto strettamente al raggiungimento di un grado più elevato di reversibilità. La perfetta reversibilità del pensiero operatorio (paragrafo 3.5) è una caratteristica sulla quale Piaget ritorna più volte. Così, in una prova di conservazione della lunghezza, il bambino comincia con il vedere due bastoncini di uguale lunghezza perfettamente allineati. Poi ne vede uno spostato lateralmente, in modo che l'allineamento sia distrutto. Questa perturbazione è tuttavia compensata se il bambino capisce che il movimento può essere perfettamente equilibrato o invertito da un movimento nella direzione opposta. In questo caso, l'uguaglianza è conservata, e l'equilibrio mantenuto.

Questo genere di stabilità si svilupperebbe come risultato del processo di equilibrazione.

4.8 Equilibrazione e apprendimento

Piaget parla spesso dei rapporti tra equilibrazione e apprendimento. Egli ritiene che "apprendimento" non sia affatto sinonimo di "sviluppo". Piuttosto, tende a equiparare l'"apprendimento" con l'acquisizione di conoscenza da una fonte esterna, ossia lo contrappone all'acquisizione come risultato dell'attività del soggetto stesso. Pertanto, se un bambino diventa capace di conservare in quanto gli è stata spiegata la risposta giusta, o perché è stato ricompensato quando gli è capitato di dare la risposta giusta, senza dubbio avrà imparato. Ma Piaget crede che nessuno sviluppo essenziale abbia luogo in questa maniera. Gli sviluppi essenziali avvengono per mezzo della costruzione attiva e dell'autoregolazione.

Piaget non esclude la possibilità che specifici tentativi di insegnare ai bambini a conservare, e così via, possano fare la differenza, specialmente se il metodo è di tipo tale da proporre al bambino qualcosa che lo stupisca o lo porti a riconoscere una contraddizione. Perché questa esperienza può suscitare nel bambino nuovi sforzi adattivi e mettere così in moto processi di equilibrazione. Tuttavia, la possibilità che l'insegnamento riesca a determinare una *vera* differenza dipenderà dal livello che il bambino ha raggiunto: "l'apprendimento è subordinato al livello di sviluppo del soggetto".

■

In conclusione, desidero sottolineare ancora una volta che, nello scrivere questa appendice, ho semplicemente tentato di dare un chiaro resoconto delle asserzioni di Piaget, e non di giudicarle. Le fonti principali sui cui si basa il resoconto sono:

Beth, E. W., & Piaget, J., *Mathematical Epistemology and Psychology*, D. Reidel, Dordrecht, Olanda, 1966.

Piaget, J., *The Psychology of Intelligence, Routledge & Kegan Paul, London, 1950*.

Piaget, J., *Logic and Psychology*, Manchester University Press, Manchester, 1953.

Piaget, J., "Piaget's Theory", in Mussen P.H. (a cura di), *Carmichael's Manual of Child Psychology*, vol. 1, Wiley, New York, 1970.

Piaget, J., *Biology and Knowledge*, Edinburgh University Press, Edinburgh, 1971.

La citazione del paragrafo 4.5 è tratta da "Piaget's Theory", p. 710. La citazione del paragrafo 4.6 è tratta da *Mathematical Epistemology and Psychology*, p. 241. La citazione del paragrafo 4.8 è tratta da "Piaget's Theory", p. 716.

Postfazione

Introduzione

Il libro di Margaret Donaldson (di qui in poi citata come MD) ha più di trent'anni. È quindi inevitabile che, nel 2009, si possano mettere in evidenza elementi di criticità, riferimenti bibliografici più aggiornati e risultati di ricerche successive che hanno consentito di precisare certe affermazioni, nel solco da lei tracciato. Eppure rimane un libro estremamente attuale, ricco di riflessioni e di suggerimenti preziosi per chi è interessato all'insegnamento.

Nel testo MD si occupa esplicitamente di bambini piccoli, dai 3 ai 5 anni, non necessariamente scolarizzati. Ma il problema che l'autrice intende affrontare attraverso l'analisi dei modi di ragionare dei bambini è di portata molto più vasta, e viene introdotto nel primo capitolo:

> Ci troviamo oggi di fronte a qualcosa che si presenta come un rompicapo. Nei primi anni di scuola, tutto sembra funzionare molto bene. I bambini sembrano entusiasti, vivaci, allegri. In generale, vi è un'atmosfera di spontaneità, in cui sono incoraggiati a esplorare, a scoprire e a creare. Negli insegnanti si nota un grande interesse per nobili ideali educativi. Queste cose tendono a verificarsi persino in parti della comunità che, per altri versi, sono ben lontane da una condizione sociale privilegiata. Tuttavia, se consideriamo quello che è accaduto quando i bambini hanno raggiunto l'adolescenza, siamo costretti ad ammettere che spesso la promessa dei primi anni rimane inadempiuta. Moltissimi ragazzi finiscono la scuola portando con sé il sapore amaro della sconfitta, senza avere neppure una discreta padronanza di quelle capacità fondamentali che la società richiede, e senza essere diventati delle persone in grado di godere dell'esercizio dell'intelligenza creativa. (p. 1)

Conclude l'autrice:

> Il problema sta quindi nel comprendere come mai una cosa che comincia così bene possa spesso finire tanto male. (p. 1)

Il libro *Come ragionano i bambini* è proprio la risposta di MD a questa esigenza di 'comprendere', da lei affrontata da un punto di vista generale. Un'esigenza analoga a quella che, nel contesto dell'insegnamento della matematica, portava lo psicologo George Mandler (1989) a porre alcune domande provocatorie:

> Come succede che l'allievo si trasformi da 'curiosity machine' a 'mathematical idiot'? Quand'è che appaiono per la prima volta i segni dell'avversione verso la matematica? Come si riconoscono questi segni al loro insorgere nel contesto dell'apprendimento? [Mandler, 1989, p. 240]

Come abbiamo detto MD presenta un'analisi del problema senza entrare nello specifico delle singole discipline, anche se con una particolare attenzione all'insegnamento della lingua.

Nonostante ciò le riflessioni proposte e la quantità e qualità delle ricerche citate e commentate sono dense di stimoli per insegnanti di qualsiasi disciplina: in particolare per noi insegnanti di matematica può essere quindi interessante ripercorrere alcuni punti importanti del suo testo, e vederne le implicazioni per l'insegnamento della matematica.

Dopo il primo capitolo, in cui viene introdotto il tema centrale del libro, il testo si può dividere in due parti. Nella prima (capitoli 2-8) viene gradatamente costruita una risposta al problema di *comprendere come mai una cosa che comincia così bene possa spesso finire tanto male*. È una risposta complessa, come complesso del resto è il problema, che porta l'autrice a introdurre temi quali l'importanza del contesto, l'egocentrismo degli adulti, lo sviluppo della comprensione e della produzione del linguaggio, lo sviluppo intellettuale, il significato del pensiero svincolato. Nel testo questi temi vengono introdotti per lo più dal confronto fra i risultati ottenuti da Piaget in alcune prove classiche (sulla capacità di decentrare, sulla conservazione, sull'inclusione in sottoclassi) e quelli, decisamente diversi, ottenuti da altri ricercatori utilizzando prove analoghe, ma con opportune modificazioni del contesto.

Nella seconda parte (capitoli 8-11) l'autrice assume un punto di vista propositivo, e a partire dalla domanda *Che cosa può fare la scuola?* (capitolo 9) delinea alcuni suggerimenti, ancora di carattere generale, in cui sottolinea l'importanza di un'educazione alla consapevolezza, il ruolo dell'errore, l'importanza che il bambino cresca fiducioso nelle proprie capacità, ed affronta quindi la dinamica complessa che l'insegnante si trova a dover gestire fra la necessità di far provare agli allievi esperienze di successo e quella di non banalizzare le richieste. Questa è la parte che richiede, probabilmente, alcune integrazioni, sia per il tempo trascorso, sia per la necessità di proporre agli insegnanti italiani esempi tratti dalle nostre classi e disponibili nella nostra lingua. MD chiude con alcune considerazioni politiche generali ancora valide, legate al ruolo che ragazzi competenti possono svolgere nella nostra società.

Come dicevamo si tratta di temi estremamente generali nella loro importanza, affrontati dall'autrice in modo altrettanto generale, senza cioè calarli nello specifico delle singole discipline.

Val la pena allora riprendere alcuni punti che ci sembrano particolarmente significativi, sia della prima che della seconda parte, rendendo esplicite le implicazioni per l'insegnamento della matematica. Naturalmente si tratta di una lettura personale del volume della MD, che risente della nostra formazione e dei nostri interessi[1]: siamo convinte che ogni lettore potrà trovare altri suggerimenti e motivi di riflessione da un testo così semplice e ricco al tempo stesso.

1. L'influenza delle teorie di Piaget sull'insegnamento della matematica: il caso del concetto di numero

> *In questo libro intendo sostenere che disponiamo oggi di prove che ci costringono a respingere alcuni aspetti della teoria di Jean Piaget sullo sviluppo intellettuale. (p. XI)*

'Il superamento delle teorie piagetiane sul pensiero infantile' era il sottotitolo delle prime edizioni del testo della MD, scomparso poi nelle ultime. Anche se MD dichiara nel prologo il suo debito al ricercatore ginevrino e riporta nell'appendice 'un breve e chiaro resoconto sugli aspetti principali della teoria', le argomentazioni e gli esperimenti riportati nel libro mettono in discussione le interpretazioni date da Piaget alle risposte scorrette dei bambini, e portano quindi a riflettere anche sulle influenze negative che esse hanno avuto nella didattica della matematica nella scuola dell'infanzia ed elementare.

Si può citare il caso dell''insiemistica' e di certi percorsi grotteschi in cui la nozione di numero passa attraverso quella di insiemi equipotenti. Tipico esempio di esercizio, ancora molto frequente nei quaderni di prima elementare, è quello in cui si disegnano due insiemi con pochi oggetti e si chiede al bambino di riconoscere se sono equipotenti (nel linguaggio accessibile al bambino, se sono 'tanti quanti'). Ovviamente il bambino per rispondere conta gli oggetti dell'uno e dell'altro, mettendo in crisi la filosofia del percorso: il concetto di numero dovrebbe essere il risultato del lavoro sugli insiemi equipotenti! Come fa a contare *prima*?!

Inoltre un'applicazione rigida della teoria di Piaget sui vari stadi dell'evoluzione del pensiero porta a concludere che in mancanza della nozione di conservazione della quantità il bambino non può avere il concetto di numero.

---

[1] Per eventuali approfondimenti su alcune delle idee qui esposte rimandiamo ai nostri lavori: Bartolini Bussi M. G., Boni M. e Ferri F. (2005), Bartolini Bussi M. G. (2008), Bartolini Bussi M. G. e Mariotti M. A. (2009), Zan R. (2007a), Zan R. (2007b), Di Martino P. e Zan R. (in stampa).
In Italia sono molti i gruppi di ricerca in didattica della matematica che si interessano della scuola primaria e della scuola dell'infanzia. In genere in questi gruppi collaborano fianco a fianco docenti universitari ed insegnanti, che si confrontano con colleghi di altri paesi su temi di ricerca riconosciuti significativi dalla comunità internazionale. Alcuni risultati dei loro studi, che costituiscono per chi lavora nella scuola un'occasione di riflessione e una fonte preziosa di suggerimenti didattici, si possono trovare pubblicati nelle riviste *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *La matematica e la sua didattica*, *L'educazione matematica*, *Progetto Alice*.

Questa posizione, unita al fatto evidenziato dalla MD che le prove utilizzate da Piaget per riconoscere la capacità di conservare quantità portano a risultati molto più tardivi di quelli che si ottengono con modifiche non strutturali delle prove stesse, porta a 'rimandare' il lavoro con i bambini in ambito aritmetico.

Dietro a tutto ciò sta anche il fraintendimento che esista il concetto di numero come un traguardo da conseguire in modo definitivo e permanente, e non invece, come sta scritto nei programmi della scuola elementare del 1985, che

> l'idea di numero naturale è complessa e richiede pertanto un approccio che si avvale di diversi punti di vista (ordinalità, cardinalità, misura, ecc.); la sua acquisizione avviene a livelli sempre più elevati di interiorizzazione e di astrazione durante l'intero corso di scuola elementare, e oltre.

Conclusioni completamente diverse sul ruolo della nozione di conservazione della quantità emergono invece dalle ricerche riportate nel libro di Gelman e Gallistel (1978). In questo libro fondamentale (mai tradotto in italiano[2]), gli autori propongono un modello del processo del contare, basato su cinque principi:

– *Il principio di iniettività (the one-one principle).*
  Ogni modello del contare che conosciamo presuppone l'uso di quello che noi chiamiamo principio di iniettività. L'uso di questo principio consiste nell'appaiare gli oggetti di uno schieramento con segni distinti (etichette) in modo tale che uno e un solo segno sia usato per ogni oggetto nello schieramento. Per seguire questo principio, un bambino deve coordinare due processi: la ripartizione e l'etichettamento.
– *Il principio dell'ordine stabile.*
  Il contare coinvolge più cose che l'abilità di assegnare arbitrariamente etichette a degli oggetti in uno schieramento. Anche se il bambino usa i numerali come etichette, noi non possiamo concludere che conosca necessariamente la procedura del contare. Il bambino deve dimostrare almeno l'uso di un principio ulteriore – il principio dell'ordine stabile. Le etichette che usa per designare gli oggetti di uno schieramento devono essere ordinate o scelte in un ordine stabile – cioè ripetibile. Questo principio richiede l'uso di una lista stabile lunga come il numero degli oggetti presenti nello schieramento.
– *Il principio di cardinalità.*
  I due precedenti principi coinvolgono la selezione delle etichette e l'applicazione delle etichette agli oggetti di un insieme. Il principio di cardinalità afferma che l'etichetta finale della serie ha un significato speciale. Questa etichetta, a differenza delle etichette precedenti, rappresenta una proprietà dell'intero insieme. Il nome ufficiale per questa proprietà è *numero cardinale* dell'insieme. In modo più informale, l'etichetta applicata all'oggetto finale dell'insieme rappresenta il numero degli oggetti dell'insieme.

---

[2] Per una traduzione del capitolo 7, *The counting model*, si veda il capitolo 2.2 di Bartolini Bussi (2008), che contiene anche il riferimento ad altre ricerche successive.

- *Il principio di astrazione.*
  I tre principi appena enunciati descrivono il funzionamento del processo del contare. Essi sono principi su come contare. Il principio di astrazione afferma che i precedenti principi possono essere applicati a tutti gli schieramenti o collezioni di entità.
- *Il principio di irrilevanza dell'ordine.*
  La considerazione dei modi nei quali i principi sono stati riassunti fin qui ci conduce a postulare un principio finale del contare, il principio di irrilevanza dell'ordine. Questo principio dice che l'ordine di conteggio è irrilevante; così l'ordine nel quale gli oggetti sono etichettati, e quindi quale etichetta viene assegnata ad un oggetto e viceversa. In altre parole, "non importa come conti".

La conservazione della quantità è quindi pensata non come prerequisito per la costruzione del significato di numero ma come conseguenza della costruzione del significato del contare.

Il modello di Gelman e Gallistel è ormai generalmente adottato nelle ricerche sulla costruzione del significato di numero ed ha fornito la base per sviluppi successivi sulla funzione delle rappresentazioni semiotiche in questo processo. Annette Karmiloff-Smith (1996) riprende il modello dei cinque principi appena ricordato per sottolineare che non sempre la costruzione di essi è realizzata in modo stabile. In altre parole, a suo parere quello che emerge da varie ricerche (e tra queste sono citate proprio quelle di MD) è che al bambino manca la flessibilità per poter usare le competenze costruite quando è modificato il contesto della prova. La Karmiloff-Smith, già allieva di Piaget, utilizza i risultati di tali ricerche proprio per sferrare un altro attacco ad uno dei capisaldi della teoria piagetiana, cioè il modello degli stadi di sviluppo, secondo il quale i cambiamenti (superamento dell'egocentrismo, conservazione, ecc.) sono globali e si verificano più o meno simultaneamente in domini diversi. L'autrice introduce invece, in modo sistematico, un modello (detto di *ridescrizione rappresentazionale*) che descrive il processo di esplicitazione delle informazioni implicite nelle procedure di soluzione dei problemi, all'interno di *domini specifici*. La stessa autrice riporta in modo dettagliato i risultati di parecchi esperimenti svolti da Karen Wynn e altri ricercatori (Wynn, 1990) che utilizzano la metodologia detta dell'*abituazione/disabituazione* e riguardano bambini anche di poche settimane di vita, che ovviamente non potrebbero manifestare né con l'azione né con risposte verbali la loro risposta a prove di tipo piagetiano. Come spiega la Karmiloff-Smith:

> Nel paradigma dell'abituazione/disabituazione, all'infante si presenta ripetutamente lo stesso insieme di stimoli finché non dà segni di perdita di interesse, quando la sua attenzione inizia a diminuire. Dopodiché si presenta un altro insieme di stimoli. Se l'infante mostra un rinnovato interesse, prestando attenzione per un tempo più lungo, se ne può concludere che il nuovo stimolo è stato recepito (percepito, compreso) dall'infante come uno stimolo diverso dal precedente [Karmiloff-Smith, 1996, tr. it. p.34].

In esperimenti famosi, descritti anche da Dehaene (1997), la Wynn mostra che già a quattro mesi e mezzo un bambino si aspetta che 1+1=2 sia corretto e che 1+1=1 sia sbagliato. L'apparato sperimentale consiste in una scatola posta davanti al bambino e dotata di uno schermo mobile, che può essere alzato (per nascondere) e abbassato (per mostrare) ciò che sta dietro. Mentre il bambino guarda si nasconde un pupazzo dietro lo schermo alzato. Si introduce poi senza abbassare lo schermo un secondo pupazzo. L'esperimento prevede due possibilità, da realizzare prima di abbassare lo schermo: nella prima, si lasciano i due pupazzi; nella seconda, si toglie un pupazzo all'insaputa del bambino. Proprio in questo secondo caso (e solo in questo), quando si abbassa lo schermo mostrando ciò che sta dietro, il bambino manifesta interesse o sorpresa. Potremmo dire che il bambino si annoia quando 1+1=2 e si sorprende quando 1+1=1.

Questi esperimenti mettono in luce potenzialità che sarebbero incredibili, se si adottasse la teoria stadiale piagetiana, e tuttavia non risolvono una contraddizione evidente: perché i bambini, nonostante queste potenzialità che si manifestano in età tanto precoce, falliscono altre prove, quando sono più grandi? La Karmiloff-Smith attribuisce questa difficoltà alla mancanza di una ridescrizione-rappresentazionale, cioè all'incapacità di rappresentare in modo cosciente le componenti separate della procedura messa in atto. È proprio la capacità di manipolare le componenti della procedura che le rende disponibili per l'applicazione ad altri problemi.

2. Matematica e linguaggio

> *(…) oggi sembra che il bambino dia prima un senso alle situazioni (e forse specialmente a quelle in cui vi è intenzionalità umana) e poi usi questo tipo di comprensione per aiutarsi a dare un senso a quanto gli viene detto. (p. 37)*

Sorprende un po' non trovare nel testo della MD, in particolare nel terzo capitolo, interamente dedicato al problema dell'acquisizione del linguaggio, alcun riferimento esplicito e preciso alle ricerche sul linguaggio della scuola storico-culturale, largamente ispirate agli studi di Vygotskij[3]. Esse si possono, tuttavia, leggere in filigrana. MD prende le distanze sia da Chomsky che da Piaget e tende ad adottare la posizione di John Macnamara, secondo il quale i bambini sono capaci di imparare la lingua proprio perché possiedono certe altre abilità – e precisamente perché hanno una capacità relativamente ben sviluppata di dare un senso a certe situazioni riguardanti una interazione umana diretta ed immediata. L'importanza dell'interazione sociale suggerirebbe, appunto, un

---

[3] Soprattutto alle sue opere fondamentali: *Storia delle funzioni psichiche superiori* (1931) e *Pensiero e Linguaggio* (1934), pubblicate in italiano rispettivamente nel 1969 (Firenze: Barbera) e nel 1990 (Bari: Laterza).

riferimento esplicito e diretto alle ricerche di Vygotskij (che è invece citato più oltre, nei capitoli 8 e 9). Va tuttavia sottolineato che, nel momento in cui questo libro fu scritto (1978), l'unica traduzione inglese di *Pensiero e linguaggio*, del 1962, consisteva in realtà in un saggio breve condensato, privato delle discussioni critiche su alcune delle più diffuse posizioni teoriche e ripulito dei riferimenti ai testi marxisti[4].

Leggere oggi il testo di MD provoca nel ricercatore l'emergenza di riferimenti incrociati che hanno avuto applicazioni significative nella ricerca sulla didattica della matematica. Un riferimento famoso (ma pubblicato in inglese solo nel 1976) dà ulteriore supporto alla citazione di Werner che chiude il terzo capitolo: lo studio di Lurija (1974), allievo di Vygotskij, sui risultati della spedizione in Uzbekistan negli anni 1931-32 fornisce una ampia documentazione dell'origine storico-culturale di molti processi psichici. Nei diversi capitoli del saggio citato si esaminano temi importanti per lo studio della costruzione dei significati matematici, come, ad esempio, la denominazione e classificazione di figure geometriche, l'astrazione, la generalizzazione, la deduzione, la soluzione di problemi. La ricerca sperimentale, progettata da Vygotskij stesso nei suoi ultimi anni di vita, si svolse in remote regioni dell'Uzbekistan, per verificare come la ristrutturazione delle forme fondamentali della vita sociale e la lotta all'analfabetismo provocassero cambiamenti radicali nella struttura dei processi cognitivi. In altri termini, più che l'età, sembrano essere le caratteristiche delle interazioni sociali a determinare la minore o maggiore capacità di adeguarsi ai modelli di ragionamento tipici della matematica. Come MD aveva già anticipato nel capitolo 1, alcuni dei talenti a cui attribuiamo un altissimo valore nel nostro sistema educativo sono del tutto estranei ai modi di funzionamento spontaneo della mente umana. Tale tema è ripreso anche nel capitolo 6.

Un altro aspetto interessante del testo di MD (direttamente collegabile alla scuola storico culturale) è la sottolineatura del legame stretto tra l'apprendimento della lingua e altri apprendimenti, che l'autrice fa nel terzo capitolo. Vale la pena di citare, a questo proposito, l'articolo di Anna Stetsenko[5] (1995) in cui si analizza, in una prospettiva vygotskiana, la relazione strettissima tra il processo del disegno e il processo di sviluppo di forme orali e scritte di linguaggio nella prima infanzia, poiché tutti questi processi sono finalizzati al compito sovraordinato di dominare i modi socio-semiotici di comunicazione.

Rileggere oggi le riflessioni della MD sul linguaggio suggerisce in modo assolutamente naturale anche il riferimento ad un altro approccio allo studio della lingua piuttosto recente: quello che caratterizza la *pragmatica*, disciplina che indaga i modi in cui la lingua è usata per comunicare.

La pragmatica mette infatti al centro dell'attenzione due concetti che ricorrono in tutto il testo della MD: il *contesto* e gli *scopi*.

---

[4] Si veda l'introduzione di Mecacci a *Pensiero e linguaggio*, Laterza (1990).
[5] Tradotto in Bartolini Bussi, 2008, cap. 3.3.

Ad esempio fa riferimento esplicito agli scopi il principio di rilevanza di Sperber e Wilson (1986), in base al quale i messaggi scambiati devono essere il più possibile rilevanti per gli scopi dello scambio.

Il principio di rilevanza sviluppa il *principio di cooperazione* enunciato da Grice (1975), che esprime le regole secondo le quali dovrebbe essere condotta una conversazione: brevità, adeguatezza dell'informazione agli scopi del discorso (né troppo poco informativo, né troppo), chiarezza, pertinenza, verità. Una fra le nozioni più importanti della pragmatica - quella di *implicatura conversazionale* - è collegata a questo principio.

Un classico esempio è il seguente (Levinson, 1983):

A. Dov'è Carlo?
B. C'è una Volkswagen gialla davanti a casa di Anna.

Apparentemente la risposta di B non è pertinente, e violerebbe quindi le regole di cooperazione. Ma in realtà cerchiamo di interpretare l'enunciato di B come risposta cooperativa, e siamo portati quindi a fare una serie di inferenze: che B sappia che Carlo ha una Volkswagen gialla, e che ci voglia dire che probabilmente Carlo è a casa di Anna.

Queste inferenze fatte dall'ascoltatore per mantenere l'assunto di cooperazione vengono dette da Grice *implicature conversazionali*. A differenza dell'implicazione logica, che è un'inferenza che deriva dal contenuto semantico o logico, le implicature sono quindi inferenze fondate non solo sul contenuto di ciò che è stato detto, ma anche sull' assunto che quello che è stato detto segua le regole della cooperazione comunicativa.

Ci sembra di poter riconoscere nell'approccio di MD quella che oggi si definirebbe un'interpretazione pragmatica delle risposte date dai bambini in alcune situazioni sperimentali. L'autrice infatti suggerisce ripetutamente che i bambini che danno una risposta scorretta in alcune delle prove di Piaget probabilmente rispondono ad una domanda diversa da quella effettivamente posta dallo sperimentatore: una domanda più adeguata allo scambio comunicativo, cioè all'assunto di cooperazione. Ed in effetti gli interventi verbali dello sperimentatore nel corso di una prova di conservazione sembrano violare il principio di rilevanza o di cooperazione.

Le potenzialità di un approccio pragmatico per interpretare alcune tipiche difficoltà legate al linguaggio matematico sono attualmente sottolineate dalla ricerca in didattica della matematica (si veda Ferrari, 2004).

In particolare dato che l'insegnamento della matematica è inserito in uno scambio comunicativo fra insegnante e allievi, l'interpretazione dei messaggi (anche quelli inviati dall'insegnante per introdurre conoscenze, tecniche, ...) è soggetta ai vincoli della comunicazione umana, e quindi può essere letta alla luce dei principi della pragmatica. Così i principi di cooperazione e rilevanza permettono di comprendere alcune tipiche interpretazioni dell'allievo che si oppongono a quelle specifiche del linguaggio matematico.

Uno degli esempi riportati da Ferrari nel suo testo del 2004 – cui rimandiamo per approfondimenti - riguarda la ben nota difficoltà di vedere l'insieme dei quadrati incluso in quello dei rettangoli. D'altra parte se qualcuno, in una conversazione, afferma che una figura è un rettangolo, tendiamo a supporre che la figura non sia un quadrato. Infatti se la figura fosse un quadrato, la parola 'quadrato' sarebbe più *adeguata* di 'rettangolo'. Questa assunzione di adeguatezza può portare a pensare che chi ha prodotto il testo ha usato 'rettangolo' per un motivo, e il primo che viene in mente è che il quadrilatero non sia un quadrato.

La nozione di implicatura conversazionale permette quindi di interpretare in modo convincente alcuni comportamenti (linguistici) degli allievi nel contesto della matematica, molto frequenti a qualsiasi livello di scuola, compreso quello universitario.

Più in generale i principi chiave della pragmatica suggeriscono interpretazioni alternative di alcuni tipici comportamenti che nella pratica didattica vengono considerati indicatori di carenze a livello logico: l'uso scorretto dei quantificatori (esiste, tutti) e soprattutto della loro negazione; l'uso scorretto dei connettivi logici, in particolare dell'implicazione se…allora; le difficoltà a trattare definizioni matematiche.

Ad esempio per quanto riguarda l'implicazione l'approccio pragmatico suggerisce che esistono diversi modi di usare l'espressione *se…allora* nel linguaggio quotidiano, associati a diversi schemi di ragionamento (lo schema di permesso, quello di obbligo, quello di causa-effetto): questi schemi consistono di un insieme di regole generalizzate, sensibili al contesto, che a differenza delle regole puramente sintattiche sono definite in termini di 'scopi'.

Assumendo questo punto di vista anche i risultati positivi delle modifiche al test di Wason citati da MD nel capitolo 7 si possono interpretare in modo alternativo rispetto a quello proposto dall'autrice e da altri ricercatori: le modifiche faciliterebbero il compito non perché rendono più familiare e concreto il contesto, ma perché il contesto specifico scelto (quello delle buste da affrancare) porta ad applicare uno schema di ragionamento (quello di permesso) che 'funziona' come l'implicazione logica.

3. La comprensione di un problema

> *Di conseguenza, la prova delle "montagne" è astratta in un senso psicologicamente molto rilevante: nel senso che è lontana da tutti gli scopi, i sentimenti e gli sforzi umani fondamentali. È a sangue assolutamente freddo. Nelle vene di un bambino di tre anni, invece, il sangue scorre ancora caldo. (p. 11)*

MD dedica molto spazio (soprattutto nei capitoli 2, 4, 5, 6, 7) al processo di comprensione di un compito da parte di un bambino, a partire dal confronto fra gli esiti di alcune prove tipiche di Piaget con quelli ottenuti da altri ricercatori attraverso modifiche del contesto.

Le sue riflessioni a riguardo comprendono una rilettura della dicotomia concreto/astratto che ci sembra molto importante per l'insegnamento della matematica, soprattutto – ma non solo – a livello della scuola primaria.

L'importanza di partire dal 'concreto' è uno dei punti fermi di tale insegnamento. Nell'attività di risoluzione di problemi verbali, soprattutto a livello di scuola primaria e con allievi in difficoltà, questo conduce alla scelta di contesti ricchi, concreti, famigliari. L'idea che non viene mai messa in discussione è che il riferimento al concreto *di per sé* 'aiuti' l'allievo a risolvere il problema intervenendo su diversi piani: quello motivazionale (un contesto concreto aumenterebbe la motivazione a risolvere il problema) e quello cognitivo (un contesto concreto agevolerebbe *di per sé* il processo di comprensione del problema). In effetti l'importanza della motivazione è ormai universalmente riconosciuta, e la ricerca sul problem solving ha sottolineato l'importanza della fase di comprensione di un problema come momento iniziale del processo di risoluzione: secondo lo psicologo americano Richard E. Mayer (1982) uno dei maggiori contributi della psicologia cognitiva al problem solving consiste proprio nella distinzione nel processo di problem-solving del momento della comprensione da quello della soluzione[6].

Eppure le convinzioni sull'importanza di far riferimento al concreto, declinate in quel modo, hanno avuto conseguenze negative sull'insegnamento della matematica a qualsiasi livello, favorendo da un lato la proliferazione di problemi verbali dalla struttura stereotipata e la conseguente nascita negli allievi della convinzione di una netta frattura fra problema scolastico e problema reale, dall'altro la diffidenza degli insegnanti verso problemi matematici 'puri', che hanno cioè per protagonisti oggetti matematici, quali numeri, figure geometriche ecc.

Le riflessioni di MD ci aiutano a interpretare queste conseguenze, e soprattutto a capire le origini di alcune tipiche difficoltà incontrate dagli allievi.

In un problema di matematica standard espresso in forma verbale possiamo riconoscere la presenza di un *contesto* (la situazione in cui è calata la struttura matematica), e di una *richiesta* (in genere espressa sotto forma di domanda).

In genere un problema viene considerato 'concreto' semplicemente per il fatto che invece di parlare di numeri parla di oggetti, di persone, di luoghi fisici, cioè per il fatto che fa riferimento ad un *contesto* concreto. In questo senso effettivamente per la stragrande maggioranza i problemi verbali proposti nella scuola primaria si potrebbero definire concreti. Ad esempio sarebbe concreto il seguente:

---

[6] In educazione matematica Polya (1945) considera la comprensione la prima delle 4 fasi in cui si articola il processo di soluzione di un problema (comprensione, compilazione di un piano, implementazione, verifica) e successivamente Schoenfeld (1983a) suddivide tale fase in lettura, analisi, esplorazione.

"Carlo compra un quaderno e due penne. Spende 2 €. Una penna costa 0,6 €. Quanto costa il quaderno?"

Per lo stesso motivo sarebbero concreti i problemi utilizzati nelle prove di Piaget sulla conservazione e sui punti di vista, in particolare la prova delle tre montagne (descritta nel capitolo 2).

MD nella sua analisi comparativa della prova delle montagne con quella dei poliziotti ideata da Hughes arriva invece a concludere che

> la prova delle "montagne" è *astratta* in un senso psicologicamente molto rilevante: nel senso che è lontana da tutti gli scopi, i sentimenti e gli sforzi umani fondamentali. È a sangue assolutamente freddo. Nelle vene di un bambino di tre anni, invece, il sangue scorre ancora caldo. (p. 11)

Emerge quindi dalle osservazioni della Donaldson un modo più raffinato di concepire la dicotomia concreto/astratto nel caso dei problemi: non basta un contesto concreto (come può essere il modello delle tre montagne) per fare di un problema un problema concreto. Occorre che il compito nel suo complesso, e non solo il contesto, abbia un *senso umano*, cioè che i protagonisti siano mossi da sentimenti e scopi comprensibili, e che a questi scopi faccia riferimento la domanda.

Solo in questo modo il riferimento al concreto aiuta il bambino a comprendere quello che gli viene richiesto. Ad esempio nel caso della versione di Hughes i bambini sembrano afferrare immediatamente la situazione e comprendere la domanda: lo schema cercare / nascondersi è loro infatti ben famigliare. Commenta la Donaldson:

> Il punto è che i *motivi* e le *intenzioni* dei personaggi sono del tutto comprensibili, anche per un bambino di tre anni. La prova richiede al bambino di agire secondo schemi che sono in linea con certi scopi e interazioni fondamentali del comportamento umano (fuga e inseguimento), e pertanto ha un *senso umano*. Non è quindi difficile far capire al bambino ciò che gli viene richiesto: lo afferra immediatamente. (…) Quanto al fatto di essere umanamente comprensibile, il compito delle "montagne" si trova all'estremo opposto. Nella prova stessa non vi è un gioco di ragioni interpersonali di natura tale da renderla istantaneamente comprensibile. (p. 11)

Ed è proprio per questa difficoltà a comprendere cosa viene loro richiesto che i bambini spesso rispondono scorrettamente.

Le riflessioni di MD richiamano le ricerche più recenti di Jerome Bruner, in particolare la distinzione proposta dallo psicologo americano fra pensiero *logico-scientifico* e pensiero *narrativo* (Bruner, 1990).

Questi due tipi di pensiero sono fra loro irriducibili e complementari. Il pensiero *logico-scientifico* si occupa di categorizzare la realtà, di ricercare cause di ordine generale, applicando argomentazioni dimostrative, ma appare inadeguato a mettere in relazione azioni e intenzioni, desideri, convinzioni e sentimenti, a coglierne il significato. L'interpretazione dei fatti umani è invece resa praticabile da un tipo differente di pensiero, che caratterizza una differente modalità di approccio al mondo: il *pensiero narrativo*.

Quindi la condizione che secondo la MD rende un compito 'concreto', e cioè che i protagonisti siano mossi da sentimenti e scopi condivisibili e quindi comprensibili, e che a questi scopi faccia riferimento la domanda, è strettamente legata al pensiero *narrativo*, e fortemente ancorata all'esperienza e al contesto culturale.

Il pensiero narrativo si esprime attraverso la narrazione, che secondo Bruner (1990) è una delle forme di discorso più diffuse e più potenti nella comunicazione umana. Dato che la narrazione riguarda eventi umani, ed i protagonisti di questi eventi sono mossi da scopi ed ideali, nella narrazione l'intenzionalità ha un ruolo cruciale.

Queste osservazioni sul ruolo centrale dell'intenzionalità nella narrazione, vista come prodotto di una particolare forma di pensiero, insieme alle osservazioni di MD sull'importanza degli scopi per la comprensione di un compito, ci spingono a riformulare la dicotomia concreto-astratto che ispira molte scelte didattiche riguardo la costruzione dei problemi nella scuola di base: per favorire la comprensione del bambino non è sufficiente preoccuparsi di curare il contesto in modo che sia concreto e famigliare, ma è necessario anche formulare il compito in modo *narrativamente adeguato.* Questo significa mettere in luce – oltre alla situazione ed ai suoi personaggi – gli scopi che li muovono, e formulare quindi una domanda coerente con tali scopi.

Alla luce di questa precisazione la maggior parte dei problemi che si propongono ai bambini, pur avendo un contesto concreto, sono problemi astratti. In questo caso il contesto non riesce più a giocare il suo ruolo, che è quello di evocare le conoscenze dell'allievo per poi permettergli di investirle nella situazione problematica in oggetto, prima di tutto a livello di comprensione, e poi nella ricerca di un processo risolutivo.

Può allora accadere che l'allievo si concentri sulla domanda, utilizzando il contesto solo come contenitore di dati per rispondere alla domanda stessa (in particolare selezionando le parole-chiave ed i dati numerici). Questo succede soprattutto nel caso - tipico della prassi scolastica - di un contesto non particolarmente ricco, come nell'esempio iniziale:

> *"Carlo compra un quaderno e due penne. Spende 2 €. Una penna costa 0,6 €. Quanto costa il quaderno?"*.

Viene naturale chiedersi come si potrebbe riformulare questo testo in modo da renderlo effettivamente 'concreto', nel senso della Donaldson.

Nella versione originale la concretezza si limita al contesto, ma la domanda è poi completamente scollegata (tanto che potrebbe essere sostituita con altre domande). Occorre quindi far sì che il problema *nel suo complesso* (e quindi non solo nel contesto) abbia quel 'senso umano' cui fa riferimento la Donaldson. Ad esempio:

> "*Andrea deve comprare un quaderno ma non può andare in cartoleria.*
> *Chiede allora a Carlo di comprarglielo.*
> *Carlo però oltre al quaderno per Andrea compra per sé due penne da 0,6 € l'una. Spende in tutto 2 €.*
> *Andrea gli chiede: 'Quanti soldi ti devo dare per il mio quaderno?'*
> *Come fa Carlo a saperlo?*"

In questo caso la situazione descritta costituisce un problema per Carlo, uno dei protagonisti. Gli scopi di Carlo sono ben comprensibili: deve farsi restituire il costo del quaderno da Andrea, e deve quindi sapere quanto è costato tale quaderno. Ed è proprio a questi scopi che fa riferimento la domanda: "Come fa Carlo a saperlo?". Dal punto di vista esclusivamente logico (in particolare a livello dei processi risolutivi che si vogliono attivare) una domanda equivalente sarebbe stata: "Quanto costa un quaderno?". Ma dal punto di vista narrativo le due domande *non* sono equivalenti: la prima scaturisce in modo naturale dal contesto, e lascia a carico del bambino eventuali riformulazioni.

In definitiva in questo caso la comprensione del contesto favorisce la comprensione della domanda.

Vorremmo sottolineare che la modifica del testo non è finalizzata a 'facilitare' i processi risolutivi, ad aumentare cioè le probabilità di ottenere risposte corrette riducendo la complessità del problema: è invece finalizzata a restituire al contesto la complessità necessaria per comprenderlo (tanto che il testo diventa più lungo), per ancorarlo saldamente alla richiesta, ed in definitiva per basare su tale comprensione eventuali processi risolutivi.

Ci possono essere allora dati che dal punto di vista logico sono irrilevanti per la soluzione del problema, ma che sono invece significativi dal punto di vista narrativo per la sua comprensione, e quindi in definitiva *anche* per la sua soluzione. In altre parole la capacità di riconoscere i dati essenziali di un problema è un punto d'arrivo dell'educazione matematica, e non può essere richiesto come punto di partenza; più localmente, è un punto di arrivo e non di partenza per il processo di comprensione di un singolo problema. Analogamente è un punto d'arrivo la capacità di riconoscere che due problemi sono 'simili' dal punto di vista matematico.

Un altro caso interessante, anche se meno frequente, si ha quando il problema è astratto (nel senso della Donaldson), ma ha un contesto molto ricco e famigliare.

La ricchezza del contesto mette in moto il pensiero narrativo permettendo di comprendere la situazione descritta: ma questa comprensione non facilita quella della domanda finale, che è solo artificiosamente collegata a tale situazione. La comprensione del contesto quindi non aiuta a risolvere il problema. Addirittura nel caso di un contesto particolarmente ricco di riferimenti la mancata coerenza fra contesto e domanda può spingere l'allievo a concentrarsi su aspetti di tipo storico e narrativo, irrilevanti dal punto di vista dei processi risolutivi, ed in definitiva a rispondere a domande diverse da quella effettivamente posta.

Vediamo alcuni esempi, per lo più non standard proprio per la particolare attenzione data al contesto.

Esempio 1 (Zan, 2007b). Ogni volta che va a trovare i nipotini Elisa e Matteo, nonna Adele porta un sacchetto di caramelle di frutta e ne offre ai bambini, richiedendo però che essi prendano le caramelle senza guardare nel pacco. Oggi è arrivata con un sacchetto contenente 3 caramelle al gusto di arancia e 2 al gusto di limone.

Se Matteo prende la caramella per primo, è più facile che gli capiti al gusto di arancia o di limone? Perché?

Molti bambini che rispondono 'correttamente' alla prima domanda ("*È più facile che gli capiti all'arancia*"), alla seconda (Perché?) danno poi risposte di questo tipo: "*Se Matteo prendeva quella al limone ne rimaneva una sola e invece è meglio prenderla all'arancia*"; "*Perché è il suo gusto preferito*"; "*Perché ha guardato*".

Esempio 2 (De Corte e Verschaffel, 1985). Completa l'ultima frase:

> Alla sera Pete ha 6 palline. Durante il giorno ha perso 2 palline.
> La mattina Pete aveva ....

Alcuni bambini completano così:

> "*...giocato con le palline*".

Esempio 3 (Crociani et al., 2001). I quattro bambini Bianchi hanno avuto, oggi alla fine del pranzo, tutti un dolce diverso. Sonia e i due gemelli non hanno voluto il gelato alla fragola. Cecilia ha inzuppato il dito nel budino al caramello di sua sorella. Bernardo, il più piccolo, ha trovato questo molto divertente. Uno dei maschi ha rovesciato una parte della sua crema al cioccolato mentre litigava con suo fratello.

Qual è il dolce che Federico ha mangiato?

Chi ha mangiato la crostata di mele?

Fra le risposte scorrette riportate da Crociani et al. c'è ad esempio:

> "*Secondo noi Bernardo ha la crostata di mele, perché egli sta ridendo quindi non è cascata a lui la crema al cioccolato.*"

In tutti questi casi è come se i bambini avessero *completato* la storia raccontata: la storia della nonna e dei suoi nipotini, la storia della giornata di Pete, la storia dei bambini Bianchi. Storie incomplete, tanto che finiscono con una domanda: e questa domanda finale può essere proprio intesa come la richiesta di trovare un finale *narrativamente* adeguato. Quello che si verifica in questi casi è un'interpretazione diversa della domanda, dovuta al fatto che il bambino si pone in un ambito – quello narrativo – diverso da quello logico-matematico, atteso dall'insegnante. In tale ambito le risposte riportate assumono una piena legittimità, tanto che a nostro parere non ha nemmeno più senso parlare di errore, e tanto meno di 'mancanza di logica'.

L'aspetto che qui ci preme sottolineare è che la formulazione del problema ha una notevole responsabilità nel dirigere l'allievo verso risposte di tipo narrativo: la preoccupazione di fornire informazioni per delineare una situazione famigliare, che faccia cioè riferimento al vissuto del bambino, si limita al contesto, e non coinvolge la domanda.

In questi casi il pensiero narrativo attivato grazie al contesto invece di sostenere l'allievo nella risoluzione del problema, lo porta a perdersi nel 'bosco narrativo[7]' che gli abbiamo costruito.

Come si può immaginare, la formulazione narrativamente adeguata di un problema non è un compito facile. Del resto non è a nostro parere necessario che l'insegnante proponga solo testi di questo tipo. In particolare vogliamo sottolineare esplicitamente che i problemi astratti non sono di per sé da evitare. Quello che è rischioso a nostro parere è che l'insegnante sia convinto di presentare un problema concreto quando in realtà sta proponendo solo un *contesto* concreto. Un'attenzione limitata al contesto, arricchito di particolari e di riferimenti al famigliare, rischia poi come abbiamo visto di spingere il bambino verso un tipo di pensiero che a causa della formulazione del testo si oppone al pensiero logico: quel che è peggio, la mancata attivazione del pensiero logico rischia di essere interpretata dall'insegnante come difficoltà del bambino, piuttosto che come conseguenza di una formulazione inadeguata.

4. Per un insegnamento 'sensato' della matematica

> *Se si è avuta cura di queste premesse, il bambino vedrà il senso e lo scopo di quello che si accinge a fare e sarà liberato dallo smarrimento che prova nel tentativo di padroneggiare un'attività di cui non comprende la natura. (p. 70)*

---

[7] Quella di *bosco narrativo* è una metafora di Umberto Eco, che dà il titolo al suo volumetto *Sei passeggiate nei boschi narrativi* (2003).

Il titolo che abbiamo voluto dare a questo paragrafo rimanda al problema di una 'didattica sensata', che è stato ed è oggetto di attenzione all'interno della ricerca in didattica della matematica. Naturalmente le risposte possibili dipendono dal significato che viene data alla parola 'senso'. In un contributo dedicato a questo tema Domingo Paola (2005) introduce il problema proprio con un'approfondita analisi di tale parola, facendo esplicito riferimento a Galileo:

> *Sensato* deriva dal latino *sensatum*, che significa *giudizioso*, *ragionevole* e in tale accezione sembra sia stato usato intorno al 1550 da Pierfrancesco Giambullari. La radice del termine rimanda, però, anche a *sensus*, che si riferisce all'azione del percepire, del *sentire per mezzo dei sensi*. L'accezione del termine "didattica *sensata*" è quindi almeno duplice: ragionevole e legata ai sensi. La radice comune di *sensatum* e *sensus*, suggerisce l'ipotesi che l'azione del percepire, del sentire per mezzo dei sensi sia, in genere, anche *ragionevole*, *giudiziosa*: suggestione preziosa questa, che si rischia di dimenticare quando si ecceda nell'evidenziare le fallacie dei sensi, le cosiddette illusioni sensoriali, che esistono come, del resto, esistono, forse anche più numerose, quelle della ragione.
> Una suggestiva interpretazione del termine *sensata* appartiene a Galileo Galilei che, quando parlava di *sensata esperienza*, si riferiva alla necessaria compresenza, per lo studio del mondo, di aspetti percettivi, ossia legati ai sensi e di aspetti legati all'intelletto, ossia razionali. (…)
> Io intendo l'aggettivo *sensata* nell'accezione galileiana e ritengo che i nostri studenti possano e debbano conoscere il mondo facendo appello ai sensi e alle teorie: quelli per percepire e fondare, sulle percezioni, i significati degli oggetti di studio; queste per aiutare a orientarsi nel labirinto delle percezioni, per sistemare e organizzare le nostre conoscenze in modo da poter rispondere ai *perché*.
> I nostri discorsi, e intendo dire di noi insegnanti e degli studenti, hanno quindi da essere intorno al mondo sensibile e non intorno a un mondo di carta: fuor di metafora, la modalità ricostruttivo –simbolica che caratterizza l'insegnamento – apprendimento nelle nostre scuole, dovrebbe essere sempre più sostituita con modalità di apprendimento percettivo – motorio (Antinucci, 2001) [Paola, 2005, p. 11].

Nel testo di MD la parola 'senso' ricorre frequentemente: il 'senso' è strettamente ed esplicitamente legato a scopi 'umanamente' comprensibili e condivisi, e mette quindi in primo piano il contesto socioculturale in cui l'individuo è inserito. Cogliamo qui un riferimento naturale all'espressione 'ricerca del significato' ampiamente utilizzata da Bruner, tanto da essere stata scelta come titolo dell'edizione italiana di un suo volume[8].

[8] *Acts of Meaning* (Bruner, 1990).

In particolare l'autrice sottolinea la necessità di un insegnamento il più possibile esplicito riguardo al *senso* delle attività proposte, se si vogliono sviluppare nel bambino consapevolezza e processi di controllo e favorire il pensiero riflessivo[9]. MD osserva esplicitamente - citando a questo proposito Vygotskij - che questo è un compito trasversale, comune a tutte le discipline, e fondamentale per la scuola. Consapevolezza e controllo sono infatti necessarie per un pensiero che 'non agisce più entro un contesto di eventi significativi che lo sostiene' (p. 53) e che permette di manipolare simboli: quello che molti chiamano 'astratto' o 'formale', e che MD preferisce chiamare 'svincolato'.

Per un insegnamento il più possibile esplicito riguardo al *senso* l'autrice sottolinea l'importanza di informare gli allievi sulla natura del compito, e più in generale di fare estrema attenzione agli 'scopi' delle attività proposte: essere istruiti sull'uso di strumenti senza sapere a cosa servono tali strumenti e perché vanno utilizzati in un modo piuttosto che in un altro non può certo educare ad un atteggiamento strategico, e produce nell'allievo una perdita di 'senso' in quello che fa.

Riguardo alla lettura questo suggerisce di proporre al bambino che sta imparando a leggere 'un testo coerente, con il giusto equilibrio tra parole che conosce già bene e parole di cui non è sicuro' e in cui inoltre le parti conosciute e familiari del testo siano congegnate 'in maniera tale da guidarlo verso scelte ragionevoli quando si imbatte in qualcosa di ignoto' (p. 71).

In realtà le prime attività di lettura che si propongono ai bambini non hanno in genere queste caratteristiche: ed è proprio in un insegnamento della lingua scritta poco rispettoso del 'senso' che l'autrice individua l'origine di alcune difficoltà che il bambino incontra a scuola.

L'insistenza di MD su aspetti quali la consapevolezza ed il controllo è condivisa da quei ricercatori che sostengono l'importanza di un'educazione metacognitiva fin dai primi anni dell'esperienza scolastica, così come è condivisa la sua critica ad alcune tipiche pratiche d'insegnamento della lettura e della scrittura. Ad esempio Campione, Brown e Connell (1988) osservano che nel caso della lettura si tende ad insegnare a decodificare prima che a comprendere: i bambini quindi lavorano nella prima fase su frasi isolate, su testi poco significativi, in cui la motivazione a comprendere è completamente assente. Nel caso della scrittura si privilegia l'aspetto 'meccanico' prima di quello della comunicazione. Campione, Brown e Connell sottolineano che questo tipo di istruzione caratterizza tutte le abilità cosiddette di base: lettura, scrittura, matematica, cioè i ben noti 'leggere, scrivere, e far di conto'.

[9] Ci sembra particolarmente interessante per la matematica la considerazione della MD che 'la velocità e il pensiero riflessivo sono antitetici a qualsiasi età' (p. 70). Il pensiero riflessivo richiede tempo, e quindi è importante che questo tempo non sia sacrificato per privilegiare la velocità di risposta. Invece in matematica spesso l'insegnante manda messaggi molto forti sull'associazione successo / velocità di esecuzione, con commenti quali: 'Hai *già* finito? *Bravo*!', oppure 'Non hai *ancora* finito?'.

Ed in effetti anche l'insegnamento della matematica spesso ricalca quello della lettura descritto precedentemente. Abilità e procedure vengono in genere introdotte senza partire da problemi significativi che le potrebbero motivare, e senza far provare agli allievi la difficoltà di risolverli in assenza di tali procedure: è proprio questa difficoltà che permette di apprezzare strumenti efficienti e di coglierne quindi il senso. Ad esempio gli algoritmi per la sottrazione e la divisione alla scuola elementare vengono introdotti spesso senza far provare prima ai bambini la difficoltà di eseguire sottrazioni e divisioni procedendo nel modo naturale, che è quello di 'provare' ripetutamente addizioni e moltiplicazioni rispettivamente. Nella scuola superiore viene introdotto il calcolo letterale giustificando tali attività con la necessità di risolvere equazioni, che verranno però introdotte successivamente; a loro volta le equazioni vengono giustificate dalla necessità di risolvere problemi, che vengono posti però solo *dopo* che gli studenti hanno acquisito (o avrebbero dovuto acquisire) gli strumenti per risolverle.

Quello che si verifica è un'inversione dei tempi, che impedisce di cogliere gli scopi di ciò che viene insegnato. In questa inversione dei tempi, che è tipica di tutti i livelli scolari, invece che porre problemi significativi e poi proporre tecniche che aiutano a risolverli, si propongono prima le tecniche, illustrandole eventualmente su un 'problema' prototipo costruito artificiosamente per poterle applicare, e quindi si propongono altri 'problemi' dello stesso tipo (spesso dichiarando anche esplicitamente che sono dello stesso tipo) chiedendo agli allievi di risolverli applicando le tecniche apprese.

Un altro elemento che favorisce la perdita di senso in matematica è la richiesta che viene fatta agli allievi di esprimersi in un linguaggio 'preciso', o di adeguarsi a certe convenzioni, senza legare queste richieste a degli scopi, quali possono essere quelli di una comunicazione non ambigua: ad esempio il senso dell'uso delle parentesi non può essere colto se non in una situazione di effettiva comunicazione fra pari, che metta in evidenza le possibilità di interpretazioni diverse di una stessa espressione aritmetica in mancanza di convenzioni condivise. A livello più avanzato, favorisce la perdita di senso l'imposizione di un linguaggio formale, senza che si faccia cogliere la superiorità di tale tipo di linguaggio in termini di possibilità di 'trattamento', ad esempio per trasformare un'espressione in una più congeniale al problema da risolvere.

Come osservano alcuni ricercatori (Davis, 1984; Schoenfeld, 1983b) la conoscenza e le abilità che molti studenti acquisiscono in questo modo tendono ad essere 'incapsulate' e inerti, disponibili solo quando chiaramente definito dal contesto (come succede, ad esempio, per i test di tipo standard) ma non utilizzabili in altre circostanze come strumenti per apprendere. Anche se in effetti in questo modo è possibile apprendere abilità, manca nella maggior parte degli studenti, anche in quelli 'bravi', la struttura di controllo necessaria per applicare tali abilità in modo flessibile e appropriato. In conclusione la maggior parte degli studenti ha difficoltà nella risoluzione di problemi non standard, proprio perché non è in grado di gestire in modo strategico le risorse che pure possiede.

Questo approccio all'insegnamento della matematica in definitiva ha gravi conseguenze riguardo al 'senso' che gli allievi danno alle varie attività. Ed è proprio la perdita progressiva di senso che caratterizza l'esperienza matematica di molti di loro, favorendo un atteggiamento negativo verso la disciplina, che può portare fino al rifiuto di attivare la razionalità che la caratterizza.

La sfida che si presenta allora all'insegnante di matematica è: come rimanere ancorati a questo 'senso'?

L'insistenza sulla necessità di legare le attività matematiche a degli scopi non va intesa a nostro parere come raccomandazione all'insegnante di garantire l'immediata utilità delle conoscenze apprese. Gli scopi di cui si parla possono essere interni alla disciplina, e questo naturalmente presuppone che l'insegnante conosca 'la natura generale delle materie insegnate' (p. 72), questione che la MD pare dare per scontata, ma che pone a nostro parere problemi non indifferenti per la formazione.

È un'identificazione pericolosa quindi – oltre che molto diffusa - quella fra il 'senso' di un'attività e la sua immediata spendibilità. Per di più legittimare l'insegnamento della matematica in base alla spendibilità delle attività proposte sarebbe una battaglia destinata ad essere persa, se non in partenza, comunque abbastanza presto. Infatti anche se la scuola primaria sembra privilegiata, in quanto le abilità e conoscenze di cui si fa carico appaiono immediatamente spendibili, in realtà questo privilegio riguarda solo le abilità fondamentali di base, quelle che i bambini dovrebbero acquisire nei primi due anni. Se il senso di una attività matematica è identificato con l'immediata spendibilità delle conoscenze e abilità che tale attività intende far acquisire, non c'è da stupirsi se già a partire dalla terza molti allievi cominciano a sviluppare un senso di estraneità nei confronti di conoscenze percepite come non immediatamente utilizzabili[10].

Dare all'insegnamento della matematica un 'senso' significa invece riuscire a collegare le conoscenze teoriche e procedurali che si insegnano ad attività matematicamente significative, quali esplorare regolarità, congetturare, dimostrare, … in definitiva porsi e risolvere problemi. Significa far sentire gli allievi protagonisti di quello che fanno, proprio perché sentono di agire in funzione di uno scopo, e non semplicemente di assecondare le richieste dell'insegnante.

L'insegnante in questa ottica assume un ruolo cruciale e impegnativo (su cui torneremo più avanti), in quanto si deve far carico di progettare e realizzare attività di cui gli allievi possano riconoscere e condividere gli scopi.

---

[10] Questo senso di estraneità emerge con forza da una ricerca sull'atteggiamento verso la matematica condotta utilizzando il tema autobiografico 'Io e la matematica' (Di Martino e Zan, 2005). Ad esempio Andrea (terza elementare) scrive: *'Per me la matematica è solo una perdita di tempo perché una volta imparati i numeri si può anche smettere, invece no, si continua e le lezioni incominciano a torturarti piano piano (…)'*.

Naturalmente si tratta di un percorso lungo, da articolare in modo diverso a seconda del livello di scuola e degli obiettivi specifici che ci si pone, ma da cui non si può mai prescindere. Ad esempio in relazione allo sviluppo di un uso adeguato del linguaggio matematico Ferrari (2004) suggerisce, fin dall'inizio del percorso scolastico, di 'inventare situazioni in cui l'esigenza di produrre testi adeguati emerga dai vincoli oggettivi imposti dalla situazione comunicativa o dalle modalità di rappresentazione e non sia subita come il capriccio di una persona' (Ferrari, 2004, p.33). Come esempio di situazioni di questo tipo Ferrari propone: comunicazione fra alunni di classi situate in luoghi diversi, o di fasce di età diverse, o di culture diverse; conversioni fra sistemi semiotici diversi (verbale / simbolico, verbale / figurale, simbolico / figurale); stesura di appunti di una discussione, descrizione provvisoria di un'attività, bozza di un progetto; stesura di regolamenti per attività comuni (gare ecc.); invenzione di sistemi di segni[11].

Ma c'è un altro importante motivo della progressiva perdita di senso dell'esperienza scolastica che MD individua nel suo testo (in particolare nel capitolo 10): la scarsa fiducia nelle proprie capacità che molti allievi costruiscono. L'esperienza di successo è fondamentale per assicurare questa fiducia, e l'insegnante che ne sia convinto può arrivare ad abbassare notevolmente le richieste per tentare di garantire a tutti tale esperienza.

Questo è vero in particolare nel contesto della matematica, la disciplina che forse più di ogni altra è accusata di sgretolare la fiducia in se stessi di molti studenti.

Come fare allora a non perdere gli allievi senza rinunciare ad un adeguato livello di difficoltà?

Il problema è significativo, perché senza attività 'adeguatamente difficili' i processi degli allievi non verranno adeguatamente stimolati. Al più, ci si dovrà accontentare di qualche risposta corretta a domande di tipo standard.

Riteniamo che il punto cruciale qui sia l'idea stessa di successo che l'insegnante ha e che passa ai suoi allievi, attraverso messaggi espliciti e impliciti. In genere il successo in matematica è identificato con la produzione di risposte corrette, per di più date in tempi brevi (tipico esempio di una pratica che riflette questa idea è quella delle schede, per lo più strutturate con domande a scelta multipla): è associato quindi ad una visione della matematica in cui i prodotti (le risposte) contano più dei processi. In questo modo non vengono adeguatamente valorizzati processi tipici del fare matematica, quali esplorare, congetturare, argomentare, che evolveranno poi gradatamente in attività più sofisticate quali definire, dimostrare, porsi problemi. Inoltre prodotti (fatti e 'regole') scollegati fra loro richiedono per essere padroneggiati uno sforzo immane di memoria, in quanto l'allievo non controlla il processo che li acco-

[11] Un esempio di attività centrata su questo ultimo punto è riportato nel paragrafo 6.

muna. Un esempio è la richiesta di far imparare agli allievi le formule inverse delle aree dei poligoni, senza mostrare il processo che fa passare da ogni formula alla sua inversa.

Questa enfasi sui prodotti si riconosce anche da un'altra tendenza, che si può riscontrare in molti libri di testo: quella di etichettare con nomi diversi oggetti 'simili' dal punto matematico, addirittura trattandoli in modi completamente differenti. Alcuni esempi: la quantità di nomi associati alle frazioni (frazioni proprie, improprie, apparenti); a livello di scuola superiore l'abitudine di trattare le equazioni di secondo grado come oggetti diversi (ognuno con il suo nome!) a seconda che abbiano o meno il termine di primo grado o il termine noto.

Se nei primi anni lo sforzo mnemonico può essere comunque padroneggiato, con il procedere dell'esperienza scolastica i prodotti da conoscere si accumulano spaventosamente, e l'allievo arriva a percepire la matematica come disciplina incontrollabile: da questa percezione alla rinuncia a pensare il passo è davvero breve!

Un'idea di successo più rispettosa della natura della conoscenza matematica, quindi epistemologicamente più adeguata, sostituisce alla produzione di risposte corrette in tempi brevi l'articolazione di processi di pensiero significativi nei tempi necessari. L'insegnante deve ripensare i propri comportamenti in funzione del suo ruolo, che prevede di riuscire a stimolare processi di pensiero piuttosto che di riuscire ad ottenere risposte corrette, cioè ad evitare errori (e al valore formativo dell'errore, visto come passo inevitabile nel processo di apprendimento, MD dedica alcune riflessioni nel capitolo 9).

Nell'insegnamento della matematica questo approccio richiede un profondo ripensamento di alcune pratiche: in un insegnamento centrato sui prodotti l'errore infatti è considerato indicatore di difficoltà, la prova che l'allievo non possiede le conoscenze e abilità ritenute necessarie (e sufficienti) per risolvere un determinato compito.

Tra l'altro in questo ruolo centrale riconosciuto all'errore come indicatore di difficoltà si riconosce quell'egocentrismo degli adulti - inteso come difficoltà a mettersi nei panni di un'altra persona -ripetutamente denunciato da MD soprattutto nei primi capitoli. Come abbiamo visto MD accusa di egocentrismo il ricercatore (in particolare lo stesso Piaget) che dalla risposta scorretta data dal bambino pretende di dedurre che il bambino *non è in grado* di rispondere correttamente, e *quindi* manca delle abilità che la domanda intendeva verificare.

Nel contesto dell'insegnamento accade qualcosa di analogo quando l'insegnante vuole verificare il raggiungimento di certi obiettivi attraverso prove specifiche: se l'allievo risponde scorrettamente, ne deduce che l'allievo non possiede le conoscenze o abilità che la prova intendeva testare. Raramente viene messa in discussione – e qui sta l'egocentrismo di cui parla MD – la bontà della prova, in particolare che la domanda possa essere fraintesa dall'allievo, che l'allievo possa rispondere scorrettamente pur essendo in grado di rispondere correttamente, che l'allievo possa rispondere scorrettamente pur avendo le conoscenze o abilità che si vogliono verificare, o viceversa che possa rispondere correttamente pur non possedendole.

Quest'ultimo punto in particolare porta a riflettere sull'uso dei test a scelta multipla, ed in generale sull'uso di prove che valorizzano i prodotti rispetto ai processi, contribuendo allo sviluppo del 'compromesso delle risposte corrette' cui fa riferimento Gardner (1991):

> Insegnanti e studenti [...] non sono disposti ad assumersi i rischi del comprendere e si accontentano dei più sicuri «compromessi delle risposte corrette». In virtù di tali compromessi, insegnanti e studenti considerano che l'educazione abbia avuto successo quando gli studenti sono in grado di fornire le risposte accettate come corrette [Gardner, 1991, tr. it. p.160].

La necessità che l'allievo provi esperienze di successo, unitamente allo spostamento di attenzione dai prodotti ai processi, suggeriscono un'altra riflessione, cui MD dedica ampio spazio nel capitolo 10: le attività proposte agli allievi devono essere 'adeguate', in particolare 'adeguatamente difficili'.

Anche questo punto può richiedere un cambiamento profondo rispetto ad una pratica didattica in cui l'enfasi è su quello che l'allievo *non sa* fare piuttosto che su quello che sa fare, diagnosi accompagnata spesso da una scarsa fiducia su quello che *potrà* fare. In fondo anche in questo si può riconoscere un'altra influenza – più indiretta rispetto a quelle discusse precedentemente, ma altrettanto deleteria - di un'applicazione rigida delle tesi di Piaget: lo 'stadio evolutivo' in cui il bambino è collocato (in base peraltro ai risultati di prove che si sono rivelate discutibili) rischia di diventare infatti una sorta di profezia che si autoavvera. Il riferimento d'obbligo qui è alle ricerche condotte da Rosenthal e Jacobson sul cosiddetto *effetto Pigmalione* (Rosenthal e Jacobson, 1968): i bambini segnalati agli insegnanti come particolarmente promettenti sotto il profilo intellettivo – ed in realtà scelti da un elenco completamente a caso – dimostrano in prove oggettive successive un miglioramento maggiore rispetto a quello dei compagni non segnalati.

In definitiva queste ricerche suggeriscono che se l'insegnante per primo non crede nelle potenzialità dell'allievo, non proporrà attività abbastanza 'alte': e come abbiamo già detto senza attività 'adeguatamente alte' i processi degli allievi non verranno adeguatamente stimolati.

Non è facile per l'insegnante, spesso vittima a sua volta di una visione della matematica centrata sui prodotti, o addirittura protagonista di una storia con la matematica caratterizzata da disagio e difficoltà, immaginare attività adeguate, rispettose cioè della natura della conoscenza matematica da un lato, e delle potenzialità e del bisogno di successo dell'allievo dall'altro.

Per questo motivo abbiamo ritenuto utile proporre in un paragrafo successivo alcuni esempi di attività a nostro parere 'sensate', sperimentate nella fascia iniziale della scuola (dalla scuola dell'infanzia alla secondaria di primo grado), che riprendono i vari punti fin qui discussi.

Ma prima di presentare tali proposte con qualche dettaglio riteniamo opportuno analizzare più a fondo le condizioni necessarie perché attività di questo tipo possano essere realizzate con successo.

5. Il ruolo dell'insegnante

> *Perciò una parte importantissima del lavoro di un insegnante, o di un genitore nel ruolo di insegnante, consiste nel guidare il bambino verso compiti che egli sia obiettivamente in grado di fare bene, ma non troppo facilmente, non senza metterci un certo sforzo, non senza difficoltà da dominare, errori da superare, soluzioni creative da scoprire. Questo significa valutare le sue capacità con sensibilità e accuratezza, tenendo presenti i suoi livelli di sicurezza e di energia e replicando ai suoi errori in maniera costruttiva. (p. 84)*

Le riflessioni fatte fin qui mettono in evidenza l'estrema complessità del processo di apprendimento, ma insieme quella del processo di insegnamento. Ecco perché, in molte ricerche italiane o europee, si preferisce parlare del processo di insegnamento-apprendimento. All'insegnante di matematica non è richiesta solo una buona preparazione disciplinare, ma anche la volontà e la capacità di progettare attività i cui scopi siano chiari e condivisibili, di costruire esperienze che favoriscano lo sviluppo della consapevolezza e di capacità di controllo, di un linguaggio adeguato agli scopi, di un pensiero svincolato, il tutto nel riconoscimento e nel rispetto della diversità degli allievi. In questa progettazione, l'insegnante deve scegliere se proporre consegne individuali, di piccolo o di grande gruppo. Le scelte dovrebbero essere influenzate non tanto da posizioni assolute assunte a priori (ad esempio, 'in gruppo si apprende meglio'… ma è vero?) ma da una analisi complessiva del senso del compito.

L'analisi dal punto di vista della pragmatica (riportata nel paragrafo 2) delle possibili difficoltà incontrate da un allievo nella risoluzione di un compito mette in evidenza un aspetto importante e generale: le scelte dell'insegnante devono rispondere non tanto ad un assunto pedagogico generale quanto alla funzionalità della situazione rispetto agli obiettivi che si pone ed al contesto in cui si trova ad agire.

Questa progettazione è decisamente complessa, ma può, almeno, essere in parte svolta *prima* di entrare in classe, con il supporto di documentazioni di esperienze già svolte, di lavoro in gruppo con i colleghi, di confronti all'interno di gruppi di ricerca-azione, e così via. In altre parole, è una analisi che può essere fatta a priori, con maggiore o minore dettaglio in relazione alla funzione che l'insegnante attribuisce a quella particolare attività all'interno della sua programmazione. Attrezzato con questa analisi, l'insegnante entrerà in classe con le idee chiare su quali sono gli obiettivi di breve e lungo termine e su quali piste di esplorazione potrà essere utile privilegiare nei momenti di rilancio dell'attività.

Tuttavia, c'è un'altra fase del lavoro dell'insegnante, quella che alcuni chiamano l'*arte dell'insegnare* e che invece sarebbe utile vedere piuttosto come un *artigianato*, comunicabile e trasferibile dall'insegnante esperto al nuovo insegnante: è la gestione dell'interazione a scuola. In quale modo l'insegnante può far fruttare le potenzialità della situazione problematica progettata quando è proposta agli allievi? In quale modo può rivolgere al singolo allievo, al piccolo gruppo, all'intera classe una domanda o un commento che sia di aiuto senza essere del tutto risolutiva? In questa fase l'insegnante deve compiere continuamente decisioni sulla base di quello che osserva: intervenire o stare zitto? Quanto tempo di silenzio concedere per favorire la presa in carico del problema senza che questo induca frustrazione negli allievi? Come sottolineare l'intervento di un allievo che ha già risolto il problema senza inibire la ricerca di soluzioni da parte degli altri? Come costruire in classe il clima necessario per favorire l'intervento di tutti? Quando e come fissare in modo stabile le conoscenze e competenze costruite, perché possano essere riutilizzate nella soluzione di altri problemi? Come utilizzare la soluzione di un problema perché attraverso essa siano costruiti atteggiamenti generali nei confronti della matematica? Come organizzare un percorso comune a tutti gli allievi che lasci spazio alle differenze individuali? Come coniugare l'importanza di fare proposte 'alte' con l'esigenza di non mettere in crisi il senso di autoefficacia dei bambini?

Non sfuggirà al lettore che alcune di queste domande riguardano le micro decisioni da prendere 'a braccio', durante l'interazione con gli allievi, mentre altre riguardano i processi di medio e lungo termine, i cui effetti si potranno osservare a distanza di settimane, mesi o perfino anni.

Di qui la complessità del ruolo dell'insegnante, e di conseguenza della sua formazione iniziale, che non può avere la pretesa di essere completa: l'arte (o l'artigianato) dell'insegnare si arricchirà in tutto l'arco della vita professionale, soprattutto se l'insegnante sarà disponibile a riflettere sui propri processi all'interno del processo collettivo di insegnamento-apprendimento.

In definitiva il ruolo dell'insegnante e delle sue scelte didattiche è assolutamente cruciale: ancora una volta questo ruolo si può leggere in filigrana in molte parti del testo di MD, ma non è oggetto esplicito dell'attenzione dell'autrice, centrata soprattutto sul bambino-allievo. Negli anni '70, quando questo libro fu pubblicato la prima volta, era questo il problema cruciale: uscire dal modello esclusivo della lezione frontale (fino dalla scuola dell'infanzia) e favorire la creazione di spazi di apprendimento più liberi (si consideri la critica alle scuole europee continentali portata da MD nel capitolo 1). Vale quindi la pena di rendere esplicite e di approfondire alcune riflessioni a riguardo, anche sulla base delle ricerche più recenti sul processo di insegnamento-apprendimento.

Già il titolo scelto per l'edizione italiana - *Come ragionano i bambini* – mette bene in evidenza il filo che percorre tutto il testo di MD: i bambini ragionano. Questo assunto estremamente forte segnala il superamento di un modello d'apprendimento come 'travaso' di conoscenze, in realtà tuttora riconoscibile in tanta pratica didattica, secondo il quale la conoscenza può essere semplicemente trasferita da un soggetto (l'insegnante) ad un altro (l'allievo): l'allievo quindi all'inizio del suo percorso scolastico si presenta come un contenitore da riempire opportunamente, non come un soggetto attivo in grado di produrre ragionamenti.

Il modello che ispira tutto il testo della Donaldson, anche se non viene menzionato esplicitamente, è invece il cosiddetto modello 'costruttivista'[12], secondo il quale la conoscenza è in gran parte costruita dal discente, che non si limita ad aggiungere nuove informazioni al suo magazzino di conoscenze, ma invece crea collegamenti e costruisce nuove relazioni fra queste informazioni. Secondo questo modello davanti alla 'realtà' l'individuo fin dai primi anni di vita è soggetto attivo che costruisce interpretazioni dell'esperienza, nel tentativo di *dare senso* al mondo e di anticipare così le esperienze future. Come dice MD:

> (…) non ce ne stiamo semplicemente seduti ad aspettare che il mondo venga a scontrarsi con noi. Noi cerchiamo attivamente di interpretarlo, di capirne il senso. Cerchiamo di dominare il mondo, di spiegarlo intellettualmente, *lo rappresentiamo a noi stessi.* (p. 43)

L'enfasi su questo ruolo attivo del bambino è centrale in tutto il testo di MD, ed è marcato dal continuo riferimento all'importanza degli scopi che il bambino si pone ed in base ai quali agisce. Talmente centrale, che potrebbe portare a sminuire in qualche senso il ruolo dell'insegnante, ridotto a quello di spettatore quasi passivo di un processo 'naturale' di acquisizione di conoscenze e abilità.

In realtà anche in un'ottica costruttivista l'insegnante ha un'enorme responsabilità: quella di favorire il processo di costruzione della conoscenza attraverso attività significative. E come abbiamo visto in precedenza la progettazione e la realizzazione di attività significative e sensate richiedono competenze estremamente raffinate.

Lo spostamento dell'attenzione dall'apprendimento all'insegnamento-apprendimento ha, di fatto, una paternità nella letteratura educativa. Come ricorda Mecacci (1990) nel lessico vygotskijano allegato alla sua edizione critica di *Pensiero e Linguaggio*, il termine russo (erroneamente interpretato in occidente come *apprendimento*), è *obuenie,* cioè:

> il processo di trasmissione e appropriazione delle conoscenze, capacità, abilità e dei metodi dell'attività conoscitiva dell'uomo. L'obuenie è un processo bilaterale, attuato dal docente (prepodavanie [insegnamento]) e dal discente (uenie [apprendimento]). Questo processo circolare di insegnamento-apprendimento è quindi intraducibile con uno solo di questi due termini [Mecacci, 1990, p. XX].

---

[12] Si vedano a questo proposito i lavori di Jerome Bruner – più volte citato nel testo della MD - e di Howard Gardner, in particolare *La ricerca del significato* (Bruner, 1992), e *Educare al comprendere* (Gardner, 1993).

Dunque, per parlare del ruolo dell'insegnante, il riferimento a Vygotskij è irrinunciabile. A Vygotskij si deve la famosa definizione di *zona di sviluppo prossimale*, intesa come la distanza tra lo sviluppo attuale di un bambino, determinato dai compiti risolti in modo autonomo, e il livello dello sviluppo potenziale del bambino, determinato per mezzo di compiti risolti sotto la guida di un adulto e in collaborazione con compagni più competenti. Si può osservare che la Donaldson, come del resto molti psicologi occidentali, tende a ridurre al "minimo" l'assistenza prestata al bambino, mentre Vygotskij usa esplicitamente il termine "guida". Tuttavia, l'esperimento di Siegler ampiamente commentato dalla Donaldson nel capitolo 9, restituisce all'adulto il ruolo di guida previsto da Vygotskij: l'adulto suggerisce al bambino strategie rappresentative del problema. Queste strategie rappresentative si concretizzano in espressioni linguistiche che portano il bambino di 5 anni a descrivere una situazione con l'espressione "quattro pesi sulla terza tacca". Un lettore critico potrebbe ritenere che in questo modo si insegni al bambino a imitare un automatismo in modo meccanico. In realtà, in termini vygotskijani, questo comportamento può essere visto come una imitazione "culturale", che si realizza nella misura in cui il bambino, dopo essere stato guidato ad una strategia efficace, ripete da solo in un secondo tempo la stessa soluzione.

Uno dei problemi aperti della ricerca in didattica della matematica, su cui i ricercatori italiani stanno operando da tempo in modo ampiamente riconosciuto dalla comunità internazionale, è quello della definizione di strategie efficaci, da parte dell'insegnante, per creare, sostenere e rendere produttiva la zona di sviluppo prossimale, sia nell'interazione individuale (in cui un insegnante interagisce con un singolo allievo) sia nell'interazione di piccolo o grande gruppo (in cui l'insegnante orchestra la discussione collettiva)[13]. Un esempio di discussione collettiva orchestrata dall'insegnante è riportato nella sezione successiva.

6. Esempi di attività

Gli esempi che qui proponiamo di attività a nostro parere 'sensate' sono stati sperimentati nella fascia iniziale della scuola (dalla scuola dell'infanzia alla secondaria di primo grado), e riprendono i vari punti fin qui discussi.

Si tratta, naturalmente, di una scelta limitata e non esaustiva[14]: riteniamo però che sia in grado di mostrare come, anche in classi normali e senza attrez-

---

[13] Per una introduzione al problema si veda Bartolini Bussi e Mariotti (2009).

[14] Per altri esempi, risultato di ricerche didattiche approfondite e al tempo stesso facilmente reperibili, rimandiamo ai seguenti siti: *http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2001/matematica2001.html* (materiali Matematica 2001, a cura di UMI-CIIM); *http://didmat.dima.unige.it/* (progetti del gruppo di Genova coordinato da Paolo Boero); *http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/esper/esperienze.htm* (progetti del gruppo di Bologna coordinato da Bruno D'Amore); *http://www.aralweb.unimore.it/on-line/Home.html* (progetto ArAl, coordinato da Nicolina Malara); *http://teachingdm.unito.it/porteaperte/* (progetto DIFIMA, coordinato da Ornella Robutti).

zature tecnologiche speciali, sia possibile progettare, realizzare, documentare, valutare esperienze sensate.

In sintesi, gli esempi riguardano:

6.1 Il coordinamento dei punti di vista tra scuola dell'infanzia e scuola elementare, che illustra un compito difficile, collegato alla teoria del decentramento e alla prova delle tre montagne, ma inserito in una situazione comunicativa che rende la consegna sensata e favorisce il controllo, da parte dei bambini, dell'adeguatezza delle loro formulazioni.

6.2 Il problema 'dei semini', affrontato il secondo giorno di scuola in una prima elementare, che illustra la gestione di una discussione da parte dell'insegnante in cui l'attenzione è diretta a tenere conto delle proposte dei bambini e ad incoraggiare l'esplorazione di strategie diverse. Non sfuggirà al lettore il fatto che si tratta di un problema su numeri grandi, in cui l'intera classe è trascinata dall'insegnante e da alcuni allievi a cimentarsi, senza frustrazione, con problemi di solito ritenuti impossibili.

6.3 Il problema 'delle palline', attività proposta in una seconda elementare, che illustra gli interventi dei bambini nel tentare di risolvere un problema di generalizzazione, e nel proporre dei sistemi di segni per rappresentare la strategia risolutiva trovata.

6.4 La costruzione della coscienza della funzione di un errore concettuale e del suo superamento nella costruzione del sapere, attraverso l'imitazione del dialogo socratico Menone, in classi di scuola elementare e secondaria di primo grado.

6.1. Il coordinamento dei punti di vista

L'esperimento riguarda il coordinamento dei punti di vista, inteso come la capacità di ricostruire l'immagine globale di un oggetto (o di un insieme di oggetti) a partire da immagini parziali corrispondenti a punti di vista particolari.

Esso è stato realizzato con modalità simili (anche se non identiche) in due gradi scolastici:

– la scuola dell'infanzia, sezione dei 5 anni (Falcade e Strozzi, 2008);
– il primo ciclo della scuola elementare[15].

In questa sede ci limitiamo a descrivere brevemente la situazione sperimentale (dettato di paesaggi), rinviando alle pubblicazioni citate per maggiori dettagli.

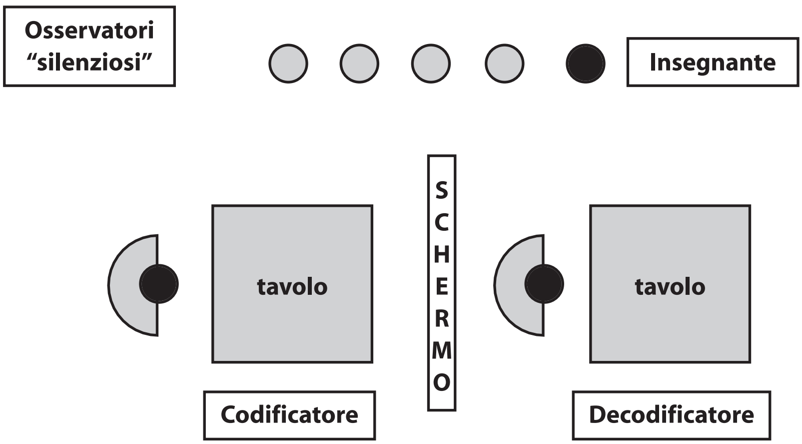
Il dettato di paesaggi è un gioco di comunicazione che coinvolge il coordinamento dei punti di vista, inteso come la capacità di ricostruire l'immagine globale di un oggetto (o di un insieme di oggetti) a partire da immagini parziali corrispondenti a punti di vista particolari. La produzione di messaggi, come vedremo, ha scopi facilmente accessibili anche a bambini di 4-5 anni.

---

[15] *http://www5.indire.it:8080/set/set_linguaggi/UL/O/lingOmat/pres.html*

Il carattere ludico dell'attività è sottolineato dall'inconsueta organizzazione degli spazi dell'aula e dall'introduzione di materiali normalmente utilizzati per il gioco simbolico. Ogni volta sono protagonisti due alunni: il codificatore e il decodificatore; altri, sullo sfondo, seguono il loro gioco. Il codificatore e il decodificatore sono seduti al centro dell'aula davanti ad un banco e guardano nella stessa direzione. Essi sono separati da un paravento e possono comunicare solo a parole: il resto del gruppo è disposto di lato in modo da poter vedere ciò che accade. Nella figura è rappresentata la situazione con un piccolo gruppo di 6 bambini (codificatore, decodificatore, 4 osservatori e l'insegnante), sperimentata con successo in molte scuole dell'infanzia.

La disposizione dei protagonisti nell'esperimento svolto con bambini di 5 anni:



Ciascuno dei due bambini riceve una serie di oggetti identici tra loro, ad esempio:

1. una casetta alta circa 15 cm (costruita con una scatola da scarpe);
2. una coppia (maschio e femmina) di pupazzetti alti 7-8 cm (non deve essere visibile se è dietro la casa);
3. un'automobilina;
4. due alberi (non più alti della casa);
5. un animaletto.

La scelta degli oggetti è determinata dall'analisi delle loro potenzialità in relazione alla costruzione di sistemi di riferimento (ad esempio, la casa è assunta in modo naturale dai bambini come riferimento per la collocazione degli altri oggetti) e di espressioni locative (davanti, dietro, a destra, a sinistra, ecc.). Il codificatore dispone a piacere gli oggetti sul banco e detta le istruzioni al compagno nascosto dal paravento: il compagno deve ricostruire un paesaggio 'uguale' al suo. L'insegnante, se necessario, chiede al codificatore di esprimersi meglio e lo aiuta suggerendogli termini o espressioni; sollecita il decodificatore a domandare chiarimenti quando lo vede in difficoltà. Terminate le due costruzioni, si toglie il paravento e si confrontano i due paesaggi.

In questa situazione sperimentale, la presa in carico da parte del codificatore dell'immagine dal proprio punto di vista è motivata dalla necessità di far costruire un paesaggio 'uguale' al proprio compagno. Il compito è complesso, perché prevede la costruzione di un messaggio verbale, in cui termini locativi sono usati per descrivere le mutue posizioni degli oggetti. Ma gli scopi sono chiari e il compito è comprensibile ed accessibile a bambini fino dalla scuola dell'infanzia.

6.2. Il problema dei semini

Ecco un esempio di discussione orchestrata dall'insegnante (Franca Ferri[16]). È il secondo giorno di scuola (24 settembre 2008) in prima elementare, dopo una uscita in giardino in cui i bambini hanno raccolto molti semini.

INS.	Abbiamo contato insieme i semi che hanno raccolto JIE e GIACOMO. Sono 186. Siete stati molto bravi e avete dimostrato che sapete contare. Secondo voi ce n'è uno per tutti i bimbi?
VOCI	Sì
SOFIA	Per me ce ne sono 2 per ogni bimbo. Si possono fare 2 giri.
FABIO	Anche 3.
MOHASSEN	Per me se ne possono dare 4 ad ogni bimbo.
EVELYN	Per me fino a 5.
INS.	Ma come facciamo a dire che ce n'è uno per ogni bimbo? O 2? O 5? Non possiamo dirlo a caso. Dobbiamo trovare un modo.
JIE	Ne dai uno a tutti e se te ne rimangono puoi ricominciare.
FABIO	Di sicuro 22 è più piccolo di 186. Puoi fare due o tre giri.
LORENZO	È molto più piccolo! Un semino a tutti è sicuro.
PATRICK	Di sicuro 186 è più grande di 22 perché ha un numero in più del 22. Ha il 100 quindi è più grande.
ARIANNA	Io farei così. Prima ne conti 22 e li tiri via. Se ne avanzano ancora ne conti altri 22 e li tiri via. Se ce ne sono più di 22 fai un altro giro e ne tiri via altri 22. Sempre così fino a che non li finisci o ne avanzano pochi.
INS.	Siete d'accordo con queste proposte? Iniziamo a distribuire i semi?
VOCI	Per me ne danno 5. Per me 3. Per me 6.
INS.	GIACOMO inizia a dare un semino a tutti, poi continua JIE
INS.	Sono rimasti 10 semini. Riusciremo a darne uno a tutti i bimbi? Pensate bene prima di rispondere.

I bambini distribuiscono 8 semini a ciascun alunno.

[16] Comunicazione personale.

GIACOMO	Forse sì. Proviamo.
FABIO	No. Perché noi oggi siamo in 21 e dobbiamo tenerne anche per ESTHER che è assente.
INS.	Per ESTHER li abbiamo già messi da parte. Sono qua sul tavolo. 8 semini anche per ESTHER e ne sono rimasti 10.
EVELYN	Per me sì, perché 10 sono tanti.
GABRIEL	Per me no perché 10 è più piccolo di 22 e non ce n'è abbastanza.
LUCIA	Non sono abbastanza. Possiamo tenerli da parte e domani prenderne degli altri per poterne dare uno a tutti.
SARA	Li possiamo dare a 10 bambini e poi agli altri li diamo domani.
PATRICK	Ne servono altri 12 per fare 22. Domani ne prendiamo 12 e siamo a posto.
INS.	Come sempre siete bravissimi! A domani.

L'insegnante mostra di avere la competenza professionale di saper cogliere un'occasione. Pur lasciando spazio alle voci dei bambini, non si limita ad osservare una interazione tra pari. In corsivo, riportiamo alcune sue osservazioni nell'analisi retrospettiva dell'attività:

> *L'attività nasce spontaneamente, dopo l'intervallo durante il quale Jie e Giacomo avevano raccolto dei semini che hanno portato in classe. In classe è sorta la voglia di contarli e insieme (in coro) abbiamo contato. È evidente che man mano che si procedeva nel conteggio il coro si assottigliava, perché non tutti sanno contare così tanto, ma seguivano tutti, perché contare è un'attività che piace. Contare tanto fa sentire grandi. La mia domanda ('Secondo voi ce n'è uno per tutti i bimbi?') nasce pure spontaneamente in quanto diversi bimbi chiedevano "me ne regali uno?" Ho pensato di problematizzare la situazione.*
> *3-5. Ci sono proposte da vari bambini. Sofia cerca una valutazione ad occhio (seguita da Fabio e Mohassen). Nella parola 'giri' è forse implicita la distribuzione attiva dei semini, uno a testa fin che si riesce. Evelyn, rumena, ha una raffinatezza stilistica ('fino a cinque').*
> *6. Volevo condurli all'idea di agire operativamente distribuendoli ai compagni. Nello stesso tempo volevo già insinuare in loro l'idea che non mi basta sentire delle risposte "a caso", ma che è necessario un METODO. Credo faccia parte della costruzione del contratto didattico a cui è bene fin da subito lavorare. Occorre "provare" ciò che si dice.*
> *7-11. Ed ecco Jie (cinese) che immediatamente fa un'ipotesi operativa. "Uno a tutti e, se ne rimangono, puoi ricominciare". C'è l'idea dello svuotamento del numero. Fabio sposta l'attenzione sui numeri e li confronta. 22 < 186, poi conferma la sua valutazione: 2 o 3 giri. Anche Lorenzo, che mostra buone competenze numeriche, confronta i numeri e vede che 22 è "molto più piccolo" di 186 e afferma che "un semino a tutti è sicuro". Mi sembra un buon salto verso l'astrazione. Confronta i numeri e deduce una cosa certa. Patrick (famiglia di giostrai, nessuna scuola dell'infanzia frequentata) con ottime*

competenze numeriche. È interessante vedere come analizza il numero 186: ha una cifra in più e questa cifra vale 100. Basta avere una cifra in più e il numero è maggiore. Non si pronuncia sulla distribuzione. Arianna (bimba molto competente: legge e scrive già da tempo) non necessita della distribuzione reale, ma svuota il numero togliendo di volta in volta 22 semini corrispondenti al numero degli allievi della classe. Ad un certo punto usa la parola "giri" che sembra riportarla alla distribuzione reale. È interessante come generalizza: sempre così fino a che …. Buona anche la previsione di finire la distribuzione o la possibilità che ne avanzino (pochi).
12-13. Propongo la distribuzione per coinvolgere la classe intera. Alcuni bimbi si stavano perdendo … Vari bambini fanno ipotesi sensate. Anche chi non ha partecipato prima alla discussione.
14-15. Nuova questione. Volevo proporre ancora un confronto di numeri. Mi sembrava una domanda "semplice" e naturale dopo 8 giri reali di distribuzione di 22 semi. Ma non era così semplice … Mi dimentico di come sono piccoli i bimbi di prima. Giacomo ha bisogno di provare la distribuzione. Non è in grado di confrontare astrattamente 10 e 22.
16-17. Fabio pensa ad Esther. Chiarimento per i semini di Esther e richiamo al problema e al numero dei semini rimasti.
18-20. Il numero 10 è un numero tanto grande! Per Evelyn il 10 sembra l'inizio dei grandi numeri (2 cifre? …) Dominio dei numeri limitato. Gabriel confronta correttamente i due numeri. Lucia, oltre al confronto corretto, fa anche una proposta fattiva per poterne dare un altro a tutti
21. 10 semini a 10 bambini. Una perfetta corrispondenza biunivoca in una situazione 'naturale'.
22. Patrick, con la sua esperienza numerica (mi ha detto che lui sta alla cassa della giostra), indica quanti ne servono per poterne dare un altro a tutti. Mi sembra che abbia fatto un'operazione di completamento da 10 a 22. Per "essere a posto" ne prenderemo altri 12.
23. I complimenti sono convinta che servano sempre, e ne faccio a iosa (autostima)! In questo caso lo pensavo veramente.

6.3. Il problema delle palline

L'attività descritta (proposta in Ferrari, 2004) si è svolta in una seconda classe a tempo pieno di una scuola elementare di Alessandria. Tale classe ha svolto un itinerario innovativo attinente all'educazione linguistica e matematica. Entrambi gli insegnanti della classe sono stati coinvolti nell'esperienza. L'insegnante di area linguistica adotta da tempo un approccio pragmatico, basato sull'uso consapevole della lingua finalizzato ai diversi contesti, piuttosto che sulla pure semplice grammatica, e favorisce varie forme di interazione linguistica in classe. L'insegnante di area scientifica utilizza un metodo compatibile con quello del collega. In questo ciclo ha costruito, fin dall'inizio della prima, un modo di lavorare in classe tale da lasciare gli alunni liberi di prendere collettivamente decisioni e autoregolamentare la propria attività. La classe ha svolto sistematicamente, fino dalla metà della seconda, attività di costruzione collettiva di testi finalizzati alla descrizione del lavoro svolto e dei risultati raggiunti, con modalità diverse. Gli alunni hanno deciso via via i criteri di scrittura e gli scopi di testi che andavano elaborando e, successivamente, si sono attenuti ad essi. L'insegnante ha svolto il ruolo di moderatore, aiutando gli alunni a organizzare la discussione, a circostanziare progressivamente pensieri e a raccogliere le idee emerse.

L'esempio illustrato è tratto da una sequenza di attività finalizzate, fra l'altro, alla rappresentazione delle strategie risolutive di problemi e alla costruzione a tale scopo di espressioni con lettere. Tale attività si sono sviluppate a partire dalla seconda, e alla fine di tale anno scolastico si è verificato l'episodio in esame. L'attività è stata svolta prendendo spunto da uno studio di Radford (2000), che ha però coinvolto studenti di livello scolare più elevato.

L'insegnante ha sottoposto ai bambini la situazione problematica così come illustrata in figura, e li ha via via invitati a calcolare il numero delle palline nelle prime 20 figure della sequenza. Qui è proposto qualche stralcio di sbobinatura della discussione avvenuta in classe.

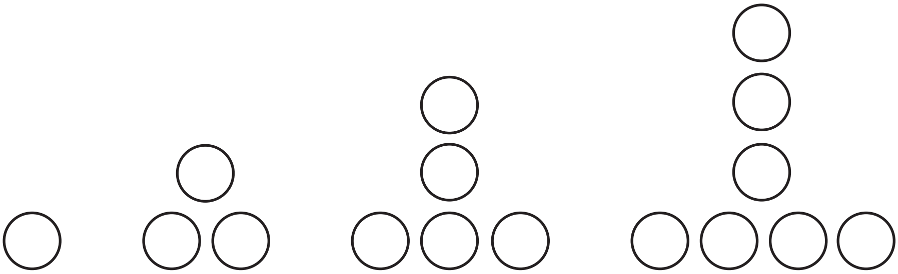


Fig. 1 **Fig. 2** **Fig. 3** **Fig. 4**

Anna (a proposito della figura n°10): *"Allora, fa diciannove … perché … considerando che la figura cinque è nove … cinque più cinque fa dieci … dunque mi ha portato a diciannove"*
Adriano: *"Allora, … … se tu, se il numero in alto fosse uguale alla base sarebbe un numero pari … però se noi togliamo un numero in verticale viene un numero dispari"*
L. (l'insegnante) parafrasa l'intervento di Adriano.
Gianluca: *"Io ho fatto … ehm … ho aggiunto nella base tre pallini e poi in su sei"*
Eugenio: *"Andiamo avanti di due fino a arrivare a diciannove"*
L.: *"Quindi nella figura numero sei quanti ne avremo?"*

E.: *"Undici"*
L.: *"Nella figura sette?"*
E.: *"Tredici"*
L.: *"Nella figura otto?"*
E.: *"Quindici"*
L.: *"Nella figura nove?"*
E.: *"Diciassette"*
L.: *"Nella figura venti?"*
E.: *"Diciannove"*
L.: *"Eugenio praticamente vi ha detto che ogni volta aggiungiamo due"*
Diversi alunni: *"Due, due"*
L.: *"Se la figura che vogliamo prendere in considerazione fosse la figura cento, o la figura cinquanta, o la figura settanta …cioè sarebbe facile continuare ad aggiungere due due due due?"*
Francesco: *"No"*
L.: *"Perché non sarebbe facile? Perché bisognerebbe …"*
F.: *"Bisognerebbe aggiungere tante volte tante volte e poi diventerebbe noioso e lungo lungo lungo lungo lungo"*
L.: *"Diventerebbe noioso e lungo lungo lungo lungo, dice Francesco. Allora dobbiamo trovare una regola o un modo o un sistema che ci faccia arrivare a trovare la soluzione senza stare lì a contare"*
E.: *"Nella figura cinque, nella figura quattro nella figura tre nella figura due i pallini della base sono uguali alla figura"*
L.: *"Alla figura o al numero indicato nella figura?"*
E.: *"Eee … al numero indicato nella figura"*
L.: *"Eugenio dice: il numero di palline che si trovano nella base sono esattamente corrispondenti al numero della figura. Cioè nella figura due ci sono due palline alla base, nella figura tre ce ne sono tre, nella figura quattro ce ne sono quattro nella figura cinque ce ne sono cinque eccetera eccetera. Osservate ancora più attentamente perché lui vi ha già dato una buona indicazione secondo me"*
A.: *"Io ho notato una cosa che se tolgo quei due che ho aggiunto diventa il numero precedente"*
L.: parafrasa e orienta la discussione su quanto detto da Eugenio.
Giulia: *"Sempre numeri dispari"*
L.: *"Si ma…, guardate un po' in altezza. Biagio?"*
Biagio: *"Ce n'è una in meno rispetto alle palline della base"*
L.: parafrasa e chiede a Emma quante palline avremo nella base nella figura venti.
Emma: *"Venti"*
L.: *"E nell'altezza?"*
Em.: *"Diciannove"*
L.: *"Perché ne avremo diciannove in altezza Emma?"*
Em.: *"Perché in alto ce n'è sempre una in meno"*
L.: *"In meno rispetto a che cosa?"*

Em.: *"Rispetto alla base"*
L.: *"Facciamo bene il ragionamento. Quindi partite da lì e andiamo avanti. Biagio ha un'ispirazione …"*
B.: *"Le palline che ci sono nella figura cento sono sono centonovantanove perché sappiamo che ce n'è una in meno in verticale e alla base c'è sempre uguale quindi se dobbiamo avere la figura cento in base ci saranno cento e su ci saranno una in meno … novantanove le addizioniamo … centonovantanove"*
L.: *"Oh! Allora sentite bene"* [Parafrasa Biagio.] *"Vediamo se funziona anche con altri numeri. Con la figura ad esempio … quaranta. Biagio, hai provato a vedere che cosa verrebbe con la figura quaranta?"*
B.: *"Sì. Ce n'abbiamo in alto trentanove e quaranta sotto quindi diventa settantanove"*
L.: *"E vediamo, a Francesco che cosa verrebbe nella figura … trenta"*
F.: *"Allora nella base trenta palline e in alto ventinove …"*
L.: *"E allora che cosa faresti Francesco per sapere quante sono in tutto?"*
Sussurri, suggerimenti.
F.: *"Trentanove"*
L.: *"No"*
F.: *"Trenta più ventinove"*
L.: *"E che cosa fa trenta più ventinove?"*
F.: *"Sett … cinquantanove"*
L.: *"Sì. Proviamo a vedere con il numero duecento"*
Diversi alunni: *"Eee"*
L.: *"Allora vediamo chi vuole provare con duecento … quante palline ci sono nella figura duecento?"*
Adriano: *"Nella figura duecento ci saranno duecento pallini alla base e centonovantanove pallini in alto"*
L.: *"E allora in tutto quanti saranno?"*
Ad.: *"Duecentonovantanove … no … trecentonovantanove"*
L.: *"Secondo voi il ragionamento di Biagio funziona?"*
Coro: *"Sìiiiiii"*

L'attività prosegue con la scoperta che la strategia proposta da Biagio (sommare il numero della figura con lo stesso numero diminuito di 1) equivale a raddoppiare il numero della figura e sottrarre 1. Dopo questa scoperta (basata sulle prove numeriche effettuate) la classe si mette alla ricerca di un sistema per abbreviare la notazione. Tale esigenza è motivata dalla scelta, di tipo generale, di rappresentare le strategie in forma esplicita. La rappresentazione (per adesso verbale) della strategia trovata evidentemente era troppo lunga rispetto al foglio in cui doveva essere riportata. La discussione continua come segue.

Anna: *"Abbreviamo numero in modo che ci stia base"*
Viene così proposta la scrittura
n.base per due meno uno = n. delle palline

L. suggerisce la parentesi dopo 'per due' e di eliminare 'delle'. La classe concorda e si arriva così alla scrittura
(n.base × 2) – uno = n.palline
L.: *"Vediamo se si può fare ancora qualcosa"*
Giulia propone di scrivere 'uno' in cifra:
(n.base × 2) – 1 = n.palline
B.: *"Mettere simboli per abbreviarlo ancora e quindi farlo stringere di più. In un … palline … facciamo un cerchio e diventa una pallina oppure ne facciamo due per il plurale"*
Biagio propone quindi la scrittura
(n.base × 2) – 1 = n.OO
Lo stesso Biagio propone un'ulteriore abbreviazione.
B.: *"Maestra, me n'è venuta un'altra … se mettiamo per la base invece che base una str … riga orizzontale, per verticale una verticale."*
La proposta (finale) di Biagio è quindi:
(n^{-} × 2) – 1 = n OO

Nel corso dell'attività, il punto che seguiva ogni occorrenza di *n* [*n*.] è poco a poco sparito.

6.4. Il Menone

In questo paragrafo presentiamo un esempio di sequenza di insegnamento di medio termine, cioè articolata in alcune lezioni (Garuti, Boero, Chiappini, 1999). La sequenza di insegnamento è stata sperimentata in varie classi quinte elementari e di scuola media ed anche all'estero, in alcune classi svantaggiate dei quartieri periferici di Parigi. Essa può brevemente essere sintetizzata in questi termini:

I) Gli allievi sono informati sull'intera attività che verrà svolta; quindi provano a risolvere lo stesso problema proposto da Socrate allo schiavo (costruire un quadrato di area doppia di un quadrato dato).

II) Gli allievi, sotto la guida dell'insegnante, leggono e cercano di capire le tre fasi del dialogo (individuazione dell'errore dello schiavo; tentativi infruttuosi di soluzione del problema da parte dello schiavo; risoluzione guidata da Socrate); poi leggono ad alta voce tutto il dialogo (in forma recitativa); e infine discutono il contenuto e gli scopi del dialogo, cercando di capire le funzioni delle tre fasi. Un cartellone (concordato con l'insegnante) sintetizza quello che è emerso da tale discussione.

III) L'insegnante presenta agli allievi taluni errori frequentemente compiuti, che potrebbero diventare oggetto di un dialogo simile a quello di Platone; anche gli allievi sono invitati a fare proposte di errori da considerare a tal fine. L'obiettivo di questa attività è di fare partecipare gli allievi alla scelta di un errore "appropriato" (un errore frequente, concettualmente dominabile dalla maggior parte degli alunni con qualche aiuto da parte dell'insegnante e da loro riconosciuto come "importante").

IV) Gli allievi discutono sull'errore scelto, cercando di individuare (con l'aiuto dell'insegnante) valide ragioni per le quali si tratta di un errore, e poi cercano di arrivare a enunciati corretti e condivisi sull'argomento.

Lo scopo di questa discussione è di costruire una base di conoscenze matematiche adeguate per la costruzione del dialogo.

V) Agli allievi è chiesto di produrre individualmente un "dialogo socratico" sull'errore considerato.

VI) Gli allievi confrontano e discutono (sotto la guida dell'insegnante) alcune produzioni individuali.

Questa sequenza porta ad un livello esplicito, per gli allievi, la funzione dell'errore da loro stessi commesso nel passato, come base per una nuova conoscenza. Ma c'è di più: la consegna riguardante la produzione di un dialogo socratico sul loro errore li costringe a ripercorrere esplicitamente la faticosa strada del suo superamento, a rendere esplicite sia le ragioni che giustificavano l'errore commesso che le ragioni che supportano il suo superamento. Nel dialogo gli allievi ricostruiscono sia la voce dello schiavo che la voce del suo maestro. È un modello metodologico di superamento di un ostacolo concettuale che potrà essere utilizzato dagli allievi anche successivamente, quando, nel corso del tempo, sarà sempre più frequente l'incontro con situazioni problematiche la cui soluzione va contro il senso comune.

Ecco ad esempio un estratto dal dialogo costruito da un allievo di quinta elementare sull'errore:

"*Moltiplicando un numero intero per un altro numero si ottiene sempre un numero più grande del primo numero*"

SOCRATE: Dimmi, ragazzo, sai dirmi come sarà il prodotto di una moltiplicazione in cui si moltiplica un numero naturale con un numero decimale minore di uno?

SCHIAVO: Sì, Socrate, maggiore del moltiplicando.

SOCRATE: Allora, schiavo, se quello che hai detto è vero, scrivi questa operazione e calcola il risultato: 8 x 0,2 = . Allora, quanto fa?

SCHIAVO: Oh, no! Fa 1,6.

[seguono altri esempi, con verifiche grafiche e la trasformazione dei numeri con virgola in frazioni]

SCHIAVO: Oh no è ancora minore.

SOCRATE: Allora schiavo per farti capire la regola generale devo farti degli esempi: il risultato di una moltiplicazione è sempre minore se moltiplichiamo con un numero decimale minore di 1?

SCHIAVO: Sì.

SOCRATE: Dimostriamolo: 10 x 0,9 = 9 , 10 x 1,1 = 10,1 [sic!]. Quindi la risposta che hai dato per una volta è giusta. […] Perciò la regola generale qual è?

SCHIAVO: Se moltiplico un numero naturale per un numero decimale minore di 1 il prodotto è sempre minore del moltiplicando.

SOCRATE: E perché?

SCHIAVO: Perché moltiplicare per un numero minore di 1 equivale a trovare di quel numero la frazione equivalente al moltiplicatore.

7. Concludendo

Leggendo al punto precedente le proposte di attività, i brevi stralci delle discussioni in classe e le produzioni dei bambini, si rimane colpiti dalla qualità dei ragionamenti che gli allievi sono in grado di attivare in presenza di stimoli opportuni, cioè da *come ragionano i bambini*. Siamo consapevoli del fatto che le attività proposte sono di livello 'alto': il punto importante è che questo livello non dipende da situazioni particolarmente privilegiate del contesto della classe, ma dal fatto che queste esperienze sono inserite in un percorso lungo estremamente attento ai vari aspetti che abbiamo finora discusso. E come abbiamo sottolineato l'insegnante ha un ruolo centrale nelle decisioni che stanno alla base della costruzione e della realizzazione di tale percorso.

Alla luce di questi esempi, viene naturale chiedersi se il giudizio negativo dato da MD sulle scuole continentali, descritte come 'luoghi severi e rigidi dove, fin dall'inizio, i bambini sono resi ansiosi – perfino malati – dalla paura del fallimento' (p. 2) poteva - o può oggi - applicarsi anche alla scuola italiana, almeno per i gradi della scuola dell'infanzia e della scuola primaria.

Negli ultimi decenni varie indagini internazionali hanno confrontato sistemi educativi diversi. In questa sede ci limitiamo a citarne due che prendono in esame alcune delle competenze base considerate dalla Donaldson a livello della scuola primaria: l'indagine IEA-PIRLS (sulla lettura nella scuola primaria) già realizzata due volte (2001 e 2006) con la partecipazione di decine di paesi tra cui l'Italia[17] e l'indagine TIMSS (2007).[18]

Scriveva Vertecchi (2003) commentando il rapporto internazionale della ricerca IEA-PIRLS avviata nel 2001:

> Dai dati emerge che nella scuola elementare [italiana] si presta una specifica attenzione a ridurre gli effetti che le condizioni di svantaggio proprie di una parte degli allievi si risolvano in modo deterministico in insuccesso nell'apprendimento. Lo sviluppo della scuola italiana appare essere stata ispirata da un intento solidaristico, che ha portato a prestare maggiore attenzione agli allievi più deboli, anche a costo di non fornire opportunità ulteriori alla parte più favorita di allievi. È un modello di sviluppo ben diverso da quello di paesi come l'Inghilterra o gli Stati Uniti, nei quali la fascia di allievi meno favoriti ha ottenuto risultati peggiori di quelli italiani, e quella degli allievi più favoriti risultati migliori. L'intento della nostra scuola sembra quindi essere stato quello di promuovere una cresci-

---

[17] Si veda INVALSI (2008), *Ricerca Internazionale IEA-PIRLS 2006: la lettura nella scuola primaria (rapporto nazionale)*, Roma: Armando Editore.
[18] *http://www.invalsi.it/download/Rapporto_TIMSS2007_Italia.pdf*

> ta per il possibile omogenea: si direbbe che questo intento sia stato ampiamente raggiunto nella scuola elementare [Vertecchi, 2003, p.12].

Questo commento riguarda il clima generalmente non competitivo delle scuole elementari italiane. Anche la qualità dell'istruzione italiana esce in modo molto positivo da questa indagine. L'Italia si colloca al decimo posto su 35 paesi nel 2001 e all'ottavo posto su 46 paesi nel 2006, nella fascia del rendimento alto e con un significativo miglioramento di prestazione in 5 anni. Non è un caso che il 70% dei bambini del campione italiano abbia frequentato per almeno 3 anni la scuola dell'infanzia (contro una media internazionale del 45%). È inoltre ben noto che, in varie regioni, le scuole dell'infanzia, per gli investimenti locali di tradizione pluridecennale, raggiungono livelli di qualità riconosciuti internazionalmente.

L'indagine IEA-PIRLS riguarda la lettura e, in particolare, i processi adottati come discriminativi della competenza di lettura dei bambini della scuola primaria (Pavan De Gregorio, 2003):

1. ricavare informazioni e concetti esplicitamente espressi nel testo;
2. fare inferenze;
3. interpretare ed integrare informazioni e concetti;
4. analizzare e valutare il contenuto, la lingua e gli elementi testuali.

L'indagine TIMSS (*Trend in International Mathematics and Science Study*) riguarda invece gli apprendimenti in matematica e scienze. Essa è giunta alla sua quarta edizione (le precedenti indagini sono state condotte nel 1995, 1999, e 2003). Nella relazione iniziale (fine 2008) pubblicata dall'INVALSI[19] si leggono risultati di questo tipo:

> TIMSS si concentra sugli apprendimenti degli studenti al quarto e all'ottavo anno di scolarità (in Italia rispettivamente la IV classe della primaria e la III classe della secondaria di I grado) in matematica e scienze. L'edizione del 2007 ha coinvolto 425.000 studenti di 59 paesi del mondo [...]. In Italia, gli allievi della quarta classe della scuola primaria ottengono risultati superiori alla media TIMSS, sia in matematica che in scienze. In entrambi i casi le differenze sono significative dal punto di vista statistico. [...] La scuola primaria oltre ad ottenere buoni risultati nel confronto internazionale li migliora nel tempo.

Sembra quindi che, nelle rilevazioni internazionali, la scuola primaria italiana esca con valutazioni di tutto rispetto, anche nella situazione organizzativa di integrazione degli allievi con disabilità o disturbi specifici di apprendimento.

---

[19] *http://www.invalsi.it/download/Rapporto_TIMSS2007_Italia.pdf*

Può essere interessante confrontare i risultati degli alunni italiani di 9 anni con i risultati degli studenti italiani di 15 anni, nelle varie indagini OCSE PISA che valutano i giovani quindicenni all'uscita del percorso scolastico obbligatorio.[20]

Nell'OCSE PISA 2000, centrato sulla lettura, l'Italia è solo al 21° posto su un totale di 41 paesi. Nell'OCSE PISA 2003, centrato sulla matematica, l'Italia è al 31° posto su un totale di 40 paesi. Nell'OCSE PISA 2006, centrato sulle scienze, l'Italia è al 36° posto su un totale di 57 paesi.

In sintesi, se i bambini italiani di 9 anni risultano tra i migliori al mondo in lettura, matematica e scienze, perché in Italia si ottengono risultati così scadenti nelle valutazioni comparative internazionali dei quindicenni?

Possiamo quindi chiudere queste nostre riflessioni ripetendo ancora con la Donaldson:

> *Il problema sta nel capire come mai una cosa che comincia così bene possa spesso finire tanto male.*

Riferimenti bibliografici

Antinucci F. (2001). *La scuola s'è rotta*, Bari: Laterza.

Bartolini Bussi M. G. (2008). *Matematica: I numeri e lo spazio*. Bergamo: Edizioni Junior.

Bartolini Bussi M. G., Boni M., Ferri F. (2005). *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica*. Modena: MEMO (può essere ordinato direttamente a: *http://istruzione-p.comune.modena.it/memo/Sezione.jsp?idSezione=659&idSezioneRif=485)*

Bartolini Bussi M. G., Mariotti M. A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 32, 269-294.

[20] PISA (Programme for International Student Assessment) è un'indagine internazionale promossa dall'Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico (OCSE) per accertare conoscenze e capacità dei quindicenni scolarizzati con periodicità triennale e consentire un monitoraggio del sistema dell'istruzione. PISA ha l'obiettivo di verificare se e in che misura i giovani che escono dalla scuola dell'obbligo abbiano acquisito alcune competenze giudicate essenziali per svolgere un ruolo consapevole e attivo nella società e per continuare ad apprendere per tutta la vita (lifelong learning). L'indagine accerta il possesso di conoscenze e abilità nelle aree della lettura, della matematica e delle scienze e alcune competenze trasversali in gioco nel ragionamento analitico e nell'apprendimento. La popolazione di riferimento è costituita dai quindicenni scolarizzati, dal momento che tale età precede, nella maggior parte dei Paesi dell'OCSE, il termine dell'obbligo scolastico.
Ogni ciclo dell'indagine approfondisce in particolare un'area d'indagine: nel primo ciclo (PISA 2000) è stata la lettura, nel secondo (PISA 2003) la matematica, nel terzo (PISA 2006) quella relativa alle scienze, nel quarto (PISA 2009) sarà nuovamente la lettura.

Bruner J. (1990). *Acts of Meaning*. Cambridge: Harvard University Press (tr. it. *La ricerca del significato. Per una psicologia culturale.* Torino: Bollati Boringhieri, 1992).

Campione J.C., Brown A.L., Connell M.L. (1988). Metacognition: on the importance of understanding what you are doing. In Charles R., Silver E. (eds.) *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 93–113.

Crociani C. et al. (2001). Analisi a posteriori di un problema di tipo logico: Ghiottoni. *Atti RMT 1999-2000.* Bologna: Tecnoprint, 157-167.

Davis R. (1984). *Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education.* Norwood, NJ: Ablex.

De Corte E., Verschaffel L. (1985). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 4, 3-21.

Dehaene S. (1997). *La Bosse des Maths.* Paris: Odile Jacob (tr. it. *Il pallino della matematica: scoprire il genio dei numeri che è in noi*, Milano: Mondadori, 2000).

Di Martino P., Zan R. (2005). Raccontare il contare: l'incontro scontro con la matematica nei resoconti degli allievi. In P. Gisfredi (a cura di), *Itinerari tra storie e cambiamento. Momenti e processi Formativi*, CLUEB, Bologna, 105-124.

Di Martino P., Zan R. (in stampa). Sviluppare un atteggiamento positivo verso la matematica: dalle buone intenzioni alle buone pratiche. In Biagioli R., Zappaterra T. (a cura di), *La scuola primaria. Soggetti, contesti, metodologie e didattiche.* Pisa: ETS.

Eco U. (2003). *Sei passeggiate nei boschi narrativi.* Bergamo: Tascabili Bompiani.

Falcade R., Strozzi P. (2008). Il gioco dei paesaggi. Dossier allegato alla rivista *Bambini*, n. 10/2008.

Ferrari P.L. (2004). *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*. Bologna: Pitagora Editrice.

Gardner H. (1991). *The Unschooled Mind: How children think and how schools should teach.* New York: Basic Books (tr. it. *Educare al comprendere. Stereotipi infantili e apprendimento scolastico*. Milano: Feltrinelli, 1993).

Garuti R., Boero P., Chiappini, G.P. (1999). Bringing the Voice of Plato in the Classroom to Detect and Overcome Conceptual Mistakes, *Proc.of PME-XXIII,* Haifa.

Gelman R., Gallistel C. R. (1978). *The child's understanding of number.* Cambridge: Harvard University Press.

Grice H.P. (1975). Logic and Conversation. In Cole P., Morgan J.L. (eds.) *Syntax and Semantics 3: Speech Acts.* New York: Academic Press, 41-58 (tr. it. *Logica e conversazione.* Bologna: Il Mulino, 1993, 55-77).

Karmiloff-Smith, A. (1996). *Beyond Modularity: A Developmental Perspective on Cognitive Science*. Cambridge, MA: MIT Press (tr. it. *Oltre la mente modulare. Una prospettiva evolutiva sulla scienza cognitiva*, Bologna: Il Mulino, 1997).

Levinson S.C. (1983). *Pragmatics*. Cambridge: Cambridge University Press (tr. it. *La pragmatica.* Bologna: Il Mulino, 1993).

Lurija A.R. (1974), *Istoriceskoe razvitie poznavatel'nyh processov*, Moskva, M.G.U. (tr. it. *La storia sociale dei processi cognitivi*, Firenze: Giunti, 1976).

Mandler G. (1989). Affect and learning; reflections and prospects. In McLeod D., Adams V.M. (eds.) *Affect and Mathematical Problem-Solving.* New York: Springer – Verlag, 237-244.

Mayer R. E. (1982).The psychology of mathematical problem solving. In F. K. Lester Jr. and J. Garofalo (eds.) *Mathematical problem solving: issues in research*. Philadelphia: The Franklin Institute Press, 1-13.

Mecacci L. (1990). Lessico Vygotskijano. In Vygotskij L. S. (1990), *Pensiero e Linguaggio*, Bari: Laterza (ed. originale Mosca-Leningrado, 1934).

Paola, D. (2005). Esempi di didattica sensata, *L'Educazione Matematica*, vol. 1, n. 1, 11 - 23.

Pavan De Gregorio G. (2003). L'indagine IEA PIRLS e la competenza di lettura degli alunni italiani di nove anni. In N. Bottani e A. Cenerini (a cura di) *Una pagella per la scuola. La valutazione tra autonomia e equità*, Trento: Erickson.

Polya G. (1945). *How to solve it.* Princeton: Princeton University Press (tr. it. *Come risolvere i problemi di matematica*. Milano: Feltrinelli, 1976).

Radford L. (2000). Signs and meanings in studentes emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 237-268.

Rosenthal R., Jacobson L. (1968). *Pygmalion in the Classroom*. New York: Rinehart and Winston (tr. it. *Pigmalione in classe.* Milano: Franco Angeli, 1991).

Schoenfeld A.H. (1983a). Episodes and executive decisions in mathematical Problem-Solving. In Lesh R., Landau M. (eds.) *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press, 345-395.

Schoenfeld A.H. (1983b). Beyond the purely cognitive: Belief systems, social cognitions, and metacognitions as driving forces in intellectual performance. *Cognitive Science*, vol. 7 (4), 329–363.

Sperber D., Wilson D. (1986). *Relevance*. Oxford: Blackwell.

Stetsenko A. (1995) The psychological functions of children's drawing: A Vygotskian perspective. In G. Thomas and Ch. Lange-Küttner (eds.), *Drawing and Looking*. New York: Harvester Wheatsheaf, 147-158 (tradotto in Bartolini Bussi M.G., 2008, cap. 3.3).

Vertecchi B. (2003). Perché non si parla della ricerca Iea-Pirls, *Insegnare*, 6, 11-13.

Vygotskij L.S. (1931). *Istorija razvitija vysših psihiceskih funkcij*, A.P.N. R.SFSR (tr. it. *Storia dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori*, Firenze: Giunti, 1969).

Vygotskij L.S. (1934). *Myšlenie i rec*, Moskva-Leningrad: Socekgiz (tr.it. *Pensiero e linguaggio*, Bari: Laterza, 1990).

Wynn, K. (1990) Children's understanding of counting, *Cognition*, 36, 155-193.

Zan R. (2007a). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Milano: Springer.

Zan R. (2007b) La comprensione del problema scolastico da parte degli allievi: alcune riflessioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol.30, A-B, n.6, 741- 762.

Bibliografia

La bibliografia originale è stata integrata con i riferimenti alle eventuali versioni (o traduzioni) in italiano delle opere citate. A tal proposito per agevolare il lettore è stata fatta la scelta di far riferimento alle edizioni italiane più recenti.

Anderson, R., Manogian, S.T., Reznick, J.S., The undermining and enhancing of intrinsic motivation in preschool children, in *Journal of Personality and Social Psychology*, 1976, *34*, 915-22.

Blank, M., *Teaching Learning in the Preschool,* Merrill, Columbus, 1973.

Bloom, L., Talking, understanding and thinking, in R.L. Schiefelbusch, L.L. Lloyd (eds.) *Language Perspectives: Acquisition, Retardation and Intervention*. Mac-millan, New York, 1974.

Bower, T.G.R., *A Primer of Infant Development,* Freeman, San Francisco, 1977 (trad. it. *Introduzione allo sviluppo della prima infanzia,* Zanichelli, Bologna, 1980).

Bower, T.G.R, Wishart, J.G., The effects of motor skills on object permanence, in *Cognition,* 1972, *1*, 165-72.

Bruner, J.S., *Toward a Theory of instruction,* W.W. Norton , New York, 1966 (trad it. *Verso una teoria dell'istruzione,* Armando, Roma, 1995).

Bruner, J.S., The ontogenesis of speech acts, in *Journal of Child Language,* 1975, *2*, 1-19.

Bryant, P., Kopytynska, H., Spontaneous measurement by young children, in *Nature,* 1976, *260*, 772.

Campbell, R., Bowe, T., Functional asymmetry in early language understanding, in G. Drachman (ed.) *Salzburg Papers in Linguistics, Vol. III,* Gunter Narr, Tübingen, 1977.

Chomsky, N., *Aspects of the Theory of Syntax*, MIT press, Cambridge, Mass, 1965.

Clark, E.V., Awareness of language: some evidence from what children say and do, in A. Sinclair, R.J. Jarvella, W.J.M. Levelt (eds.) *The child's conception of language*, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

Clark, M.M., *Young Fluent Readers,* Heinemann Educational, London, 1976.

Cole, M., Gay, J., Glick, J.A., Sharp, D.W., *The Cultural Context* of *Learning and Thinking,* Methuen, London, 1971.

Deci, E.L., *Intrinsic Motivation,* Plenum Press, New York, 1975.

Donaldson, M., *A Study of Children's Thinking,* Tavistock, London, 1963.

Donaldson, M., Lloyd, P., Sentences and situations Children's judgments of match and mismatch, in F. Bresson (ed.) *Problèmes Actuels en Psycholinguistique,* CNRS, Paris, 1974.

Donaldson, M., McGarrigle, J., Some clues to the nature of semantic development, in *Journal of Child Language,* 1974, *1*, 185-94.

Douglas, M., *Implicit Meanings,* Routledge & Kegan Paul, London, 1975 (trad. it. *Antropologia e simbolismo: religione, cibo e denaro nella vita sociale,* Il mulino, Bologna 1993).
Downing, J., Children's concepts of language in learning to read, in *Educational Research,* 1970, *12*, 106-12.
Fox, B., Routh, D.K., Analysing spoken language into words, syllables and phonemes: a developmental study, in *Journal of Psycholinguistic Research,* 1975, *4*, 331-42
Gelman, R., Conservation acquisition: A problem of learning to attend to relevant attributes, in *Journal of Experimental Child Psychology,* 1969, *7*, 167-87.
Gibson, E.J., Levin, H., *The Psychology of Reading,* MIT Press, Cambridge, 1975.
Grieve, R., Hoogenraad, R., Murray, D., On the child's use of lexis and syntax in understanding locative instructions, in *Cognition,* 1977, *5*, 235-50.
Gruber, K.H., Backwards to Europe, in *Times Educational Supplement,* 24 June 1977, 18-19.
Hall, L.C., *Linguistic and perceptual constraints on scanning strategies: some developmental studies*, Edinburgh University, unpublished doctoral dissertation, 1975.
Harris, P.L. (personal communication).
Henle, M., The relationship between logic and thinking, in *Psychological Review,* 1962, *69*, 366-78.
Hewson, S.N.P., *Inferential problem solving in young children,* Oxford University, unpublished doctoral dissertation, 1977.
Hopkins, G.M., Letter to Robert Bridges dated 17 May 1885, in C.C. Abbott (ed.) *The Letters of Gerard Manley Hopkins lo Robert Bridges,* Oxford University Press, London, 1935.
Hughes, M., *Egocentrism in pre-school children*, Edinburgh University, unpublished doctoral dissertation, 1975.
Hughes, M., Grieve, R., On Asking Children Bizarre Questions, *First Language*, 1980, *1(2)*, 149-60.
Inhelder, B., Piaget, J., *The Early Growth of Logis in the Child: Classification and Seriation*, Routledge & Kegan Paul, London, 1964 (vers. it. *La genesi delle strutture logiche elementari. Classificazione e seriazione,* La Nuova Italia, Firenze, 1977).
Inhelder, B., Sinclair, H., Bovet, M., *Apprentissage et Structures de la Connaissance,* PUF, Paris, 1974 (trad. it. *Apprendimento e strutture della conoscenza*, Loescher, Torino, 1975).
Johnson-Laird, P.N., Legrenzi, P,. Sonino Legrenzi, M., Reasoning and a sense of reality, in *British Journal of Psychology,* 1972, *63*, 395-400.
Jung, C.G., The Development of Personality, in *Collected Works, Vol. 17*, Routledge & Kegan Paul, London, 1954 (vers. it. *Lo sviluppo della personalità*, Bollati Boringhieri, Torino 1999).
Karmiloff-Smith, A., Inhelder, B., If you want to get ahead, get a theory, in *Cognition,* 1975, *3*, 195-212.

Kendler, T.S., Kendler, H.H. Experimental analysis of inferential behaviour in children, in L.P. Lipsitt, C.C. Spiker (eds.) *Advances in Child Development and Behaviour, vol. 3*. Academic Press, New York, 1967.

Lee, L., *Cider with Rosie,* The Hogarth Press, London, 1965.

Lepper, M.R., Greene, D., Nisbett, R.E., Undermining children's intrinsic interest with extrinsic rewards: A test of the "over-justification" hypothesis, in *Journal of Personality and Social Psychology,* 1973, *28*, 129-37.

Lewis, C.S., *That Hideous Strength: a Modern Fairy Tale for Grown-ups,* Bodley Head, London, 1945 (trad. it. *Quell'orribile forza : una favola moderna per adulti*, Adelphi, Milano, 2007).

Lloyd, P., *Communication in pre-school children,* Edinburgh University, unpublished doctoral dissertation, 1975.

Macrae, A.J., *Meaning relations in language development: a study of some converse pairs in directional opposites*, Edinburgh University, unpublished doctoral dissertation, 1976.

McGarrigle, J., Donaldson, M., Conservation accidents, in *Cognition,* 1974, *3*, 341-50.

McGarrigle, J., Grieve, R., Hughes, M., Interpreting inclusion: a contribution to the study of the child's cognitive and linguistic development, in *Journal of Experimental Child Psychology*, 1978, *26(3)*, 528-50.

McMichael, P., Self-esteem, behaviour and early reading skills in infant school children, in J.F. Reid, H. Donaldson (eds.) *Reading: Problems and Practices,* Ward Lock Educational, London, 1977.

Macnamara, J., Cognitive basis of language learning in infants, in *Psychological Review,* 1972, *79*, 1-13.

Maratsos, M.P., Non-egocentric communication abilities in preschool children, in *Child Development,* 1973, *44*, 697-700.

Olson, D.R., Culture, Technology and Intellect, in L.B. Resnick (ed.) *The Nature of Intelligence,* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, N.J, 1976.

Papoušek, H., Individua1 variability in learned responses in human infants, in R.J. Robinson (ed.) *Brain and Early Behaviour*, Academic Press, London, 1969.

Piaget, J., *The Language and Thought of the Child,* Routledge & Kegan Paul, London, 1926 (vers. it. *Il linguaggio e il pensiero del fanciullo,* Giunti Barbèra, Firenze, 1983).

Piaget, J., *The Child's Conception of Number*, Routledge & Kegan Paul, London, 1952 (vers.it. *Le genesi del numero nel bambino,* La Nuova Italia, Firenze, 1987).

Piaget, J., *The Child's Construction of Reality*, Routledge & Kegan Paul, London, 1958 (vers. it. *La costruzione del reale nel bambino,* La Nuova Italia, Firenze, 1979)

Piaget, J., *The Grasp of consciousness,*. Routledge & Kegan Paul, London, 1977. (vers. it. *La presa di coscienza,* Etas Libri, Milano, 1975).

Piaget, J., Inhelder, B., *The Child's Conception of Space,* Routledge & Kegan Paul, London, 1956 (vers. it. *La rappresentazione dello spazio nel bambino*, Giunti Barbèra, Firenze 1981).

Pieraut-Le Bonniec, G., *Le Raisonnement Modal,* Mouton, The Hague, 1974.
Platone, *Protagoras and Meno,* translated by W. K.C. Guthrie, The Penguin Classics, London, 1956.
Reid, J.F., Learning to think about reading, in *Educational Research,* 1966, *9*, 56-62.
Reid, J.F., Low, J., *Link-up,* Holmes Mc Dougall, Edinburgh, 1972.
Resnick, L.B., Task analysis in instructional design: Some cases from mathematics, in D. Klahr (ed.) *Cognition and Instruction,* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, N.J, 1976.
Richards, I.A., *How to Read a Page,* Routledge & Kegan Paul, London, 1943.
Rose, S.A., Blank, M., The potency of context in children's cognition: An illustration through conservation, in *Child Development,* 1974, *45*, 499-502.
Sayers Dorothy, L., *Have His Carcase,* Victor Gollancz, London, 1971 (p.112).
Siegler, R.S., Three aspects of cognitive development, in *Cognitive Psychology*, 1976, *8*, 481-520.
Slobin, D.I., Welsh, C.A., Elicited imitation as a research tool in developmental psycholinguistics, in C.A. Ferguson, D.I. Slobin (eds.) *Studies of Child Language,* Holt, Rinehart & Winston, New York, 1973.
Szasz, T.S., *The Second Sin,* Routledge & Kegan Paul, London, 1974.
Trevarthen, C., Communication and cooperation in early infancy: A description of primary intersubjectivity, in M. Bullowa (ed.) *Before Speech: The Beginnings of Human Communication.* Cambridge University Press, London, 1979.
Vygotsky, L.S., *Thought and Language,* MIT Press, Cambridge, Mass, 1962 (vers. it. *Pensiero e linguaggio. Ricerche psicologiche*, Laterza, Roma, 2008).
Wallington, B.A., *Some aspects of the development of reasoning in preschool children*, Edinburgh University, unpublished doctoral dissertation, 1974.
Wason, P.C., Johnson-Laird, P.N., *Psychology of Reasoning: Structure and Content,* Batsford, London, 1972 (trad. it. *La psicologia del ragionamento*, A. Martello-Giunti, Firenze, 1978).
Werner, H., *Comparative Psychology of Mental Development,* International University Press Inc., New York, 1948 (trad. it. *Psicologia comparata dello sviluppo mentale,* Giunti, Firenze 1972).
Whitehead, A.N., Technical education and its relation to science and literature, in A.N. Whitehead (ed.) *The Aims of Education*. Williams & Borgate, London, 1932 (trad. it. *I fini dell'educazione e altri saggi,* La Nuova Italia, 1992).
Ziff, P., *Understanding Understanding,* Cornell University Press, Ithaca, N.Y., 1972.

Finito di stampare nel mese di ottobre 2009