Lezione #11

Elementi di Controlli Automatici

Sommario

- Introduzione ai sistemi dinamici
- Sistemi LTI
- Risposta nel dominio del tempo e formula di Lagrange
- Trasformata di Laplace e funzione di trasferimento
- Equilibri e stabilità
- Esempio: retroazione di stato
- Funzione di risposta armonica e sistemi a tempo discreto (cenni)

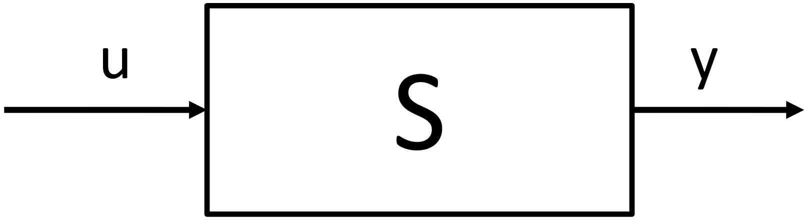
Introduzione

- L'obiettivo di un **sistema di controllo** è manipolare un processo per **modificarne il comportamento**

- In particolare, questo equivale a far sì che alcune **variabili controllate** seguano un **andamento desiderato**

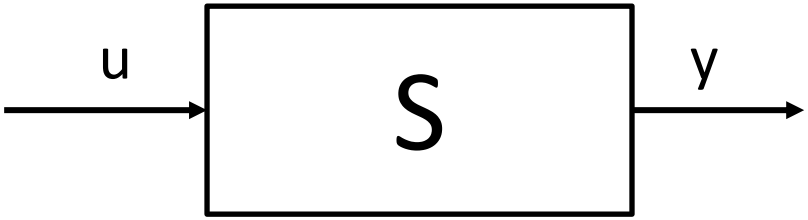
- Il valore (nel tempo) assegnato a queste variabili è detto **riferimento** o **set-point**

Introduzione

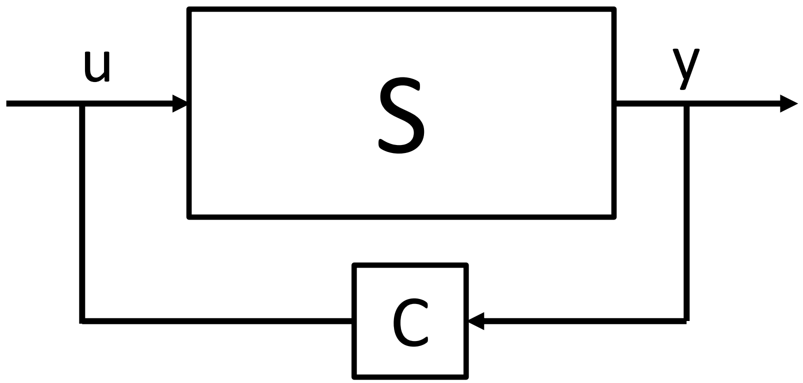


- Vogliamo che l'**uscita** *y* del sistema segua un andamento desiderato
- Cerchiamo un **ingresso** *u* che consenta di raggiungere lo scopo

Introduzione



- Due strategie possibili
  1. ***Open-loop***: calcoliamo il valore di u che consenta di raggiungere la y desiderata ***a priori*** (sulla base di un modello del sistema) e assegniamo questo ingresso al sistema (controllo in *feedforward*)



- Due strategie possibili

  2. ***Closed-loop***: calcoliamo il valore di u sulla base di una **misura dell'uscita** y (controllo in *feedback*)

Controllo a ciclo chiuso

Perché progettare un controllore a **ciclo chiuso?**

1. **Incertezze:**
   il modello del sistema potrebbe non essere accurato
2. **Disturbi esterni:**
   sul sistema potrebbero agire ingressi non previsti e non controllabili
3. **Efficienza:**
   posso ottimizzare la quantità di energia necessaria a raggiungere lo scopo

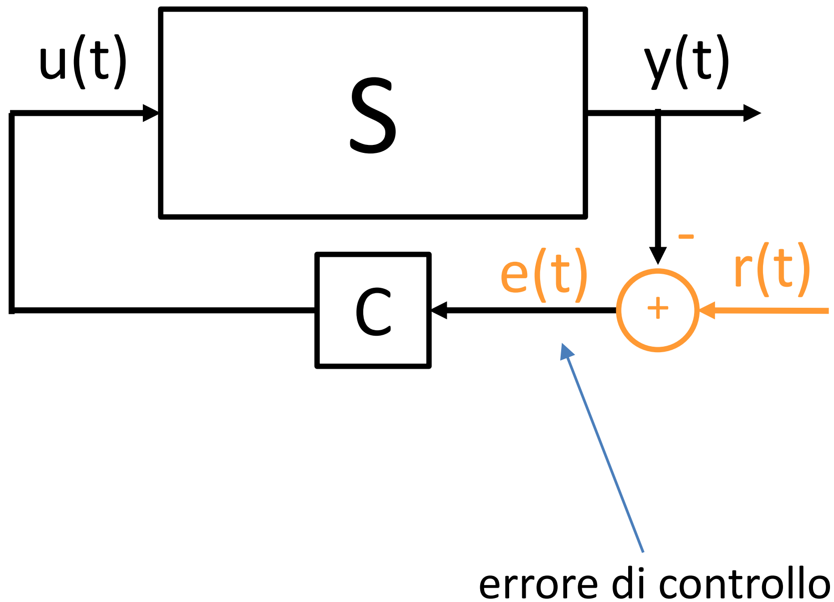
Controllo a ciclo chiuso

Perché progettare un controllore a **ciclo chiuso?**

- Ma soprattutto:
  - controllare a ciclo aperto modifica l'**uscita** del sistema
  - controllare a ciclo chiuso modifica la **dinamica** del sistema:
    → ad esempio, posso **stabilizzare un sistema instabile!**

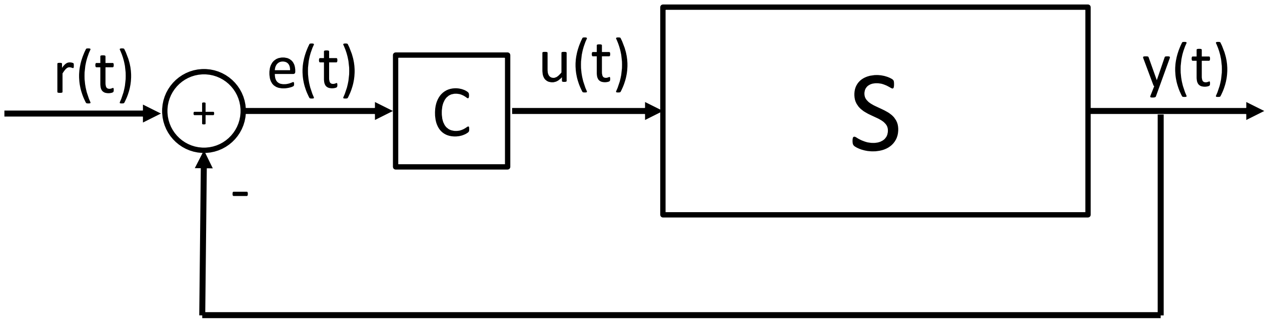
Controllo a ciclo chiuso

- Introduciamo il riferimento da inseguire nello schema visto prima…



Controllo a ciclo chiuso

… per ottenere lo schema di controllo classico



- r(t): riferimento da inseguire
- e(t): errore di controllo
- u(t): azione di controllo
- y(t): uscita controllata

Sistemi dinamici

- Considerereremo processi descrivibili mediante **equazioni differenziali**

- Il comportamento di questi sistemi tipicamente dipende dalla loro **storia passata**

  → **sistemi dinamici**

Sistemi dinamici

- Un **sistema dinamico** è un modello matematico che rappresenta come un dato processo (sistema) con un certo numero di gradi di libertà, evolve nel tempo

- In genere, questa evoluzione è descritta mediante un insieme di **equazioni differenziali**

Sistemi dinamici

- Queste equazioni comprendono:
  - ingressi (controllabili o meno)
  - uscite
  - **stato del sistema:** è l'insieme delle variabili che rappresentano la storia passata del sistema

  (es. posizione e velocità di un punto materiale)

Sistemi dinamici

- Equazioni generali di un sistema dinamico

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t); t), \qquad x(t_0) = x_0$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t); t)$$

- Questa rappresentazione è detta di **Ingresso-Stato-Uscita** (o **ISU**)

- In generale, un sistema può essere non-lineare, tempo-variante, MIMO, complesso…

Sistemi dinamici LTI

- Qui considereremo un caso particolare: sistemi **L**ineari **T**empo-**I**nvarianti **SISO**

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}(t) + Bu(t), \qquad x(t_0) = x_0$$
$$y = C\boldsymbol{x}(t) + Du(t)$$

- In un sistema lineare vale la **sovrapposizione degli effetti**

Sistemi dinamici LTI

- Sfruttiamo la sovrapposizione degli effetti per decomporre il sistema (#1)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x_0}$$

NOTA: un sistema in cui lo stato **non dipende dagli ingressi** è detto **sistema autonomo**

Sistemi dinamici LTI

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$$

- Questo sistema evolve secondo

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}$$

→ **evoluzione libera** $(u = 0,\ \ x(t_0) \neq 0)$

<u>NOTA</u>: la dipendenza da $t - t_0$ e non da t e t_0 separatamente dipende **dall'ipotesi di tempo-invarianza**

Sistemi dinamici LTI

- Sfruttiamo la sovrapposizione degli effetti per decomporre il sistema (#2)

$$\dot{x} = Bu, \qquad x(t_0) = 0$$

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

→ **evoluzione forzata** $(u \neq 0, \;\; x(t_0) = 0)$

Sistemi dinamici LTI

- Sommando i contributi

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x(t_0) = x_0$$
$$y = Cx + Du$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\,\tau$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

(Formula di Lagrange)

Sistemi dinamici LTI

- Supponiamo per semplicità D = 0*
(sistema **strettamente proprio**)

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x(t_0) = x_0$$
$$y = Cx + \cancel{D}u$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\,\tau$$

Qui ho un integrale di convoluzione!

<u>NOTA</u>: da qui in avanti assumeremo $t_0 = 0$

*Se così non fosse, potrei separare il sistema in una parte dinamica e una puramente algebrica (D)

Modi di evoluzione

- Abbiamo definito l’esponenziale di una matrice tramite la proprietà

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$$

- È anche possibile esprimerlo come serie di Taylor

$$e^{At} = I + \sum_{k} \frac{A^k}{k!} t^k$$

Modi di evoluzione

- Nel caso di una **matrice diagonale**, in particolare

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow \; e^{\Lambda} = I + \sum_k \frac{\Lambda^k}{k!} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

- Più in generale, la matrice dinamica è diagonalizzabile*:

$$\Lambda = T^{-1} A T$$
$$\dot{\boldsymbol{x}} = T \Lambda T^{-1} \boldsymbol{x}$$
$$\left(T^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}\right) = \Lambda\left(T^{-1}\boldsymbol{x}\right)$$

* Per semplicità consideriamo il caso di autovalori con molteplicità unitaria

Modi di evoluzione

Definendo

$$\boldsymbol{\xi} = T^{-1}\boldsymbol{x}$$

troviamo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}(t) &= e^{\Lambda t}\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{0}} = \\ &= \xi_{0,1}e^{\lambda_1 t} + \xi_{0,2}e^{\lambda_2 t} + \cdots + \xi_{0,n}e^{\lambda_n t}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = T\boldsymbol{\xi}(t) = \underbrace{Te^{\Lambda t}T^{-1}}_{= e^{At}}\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}$$

L'evoluzione del sistema è associata a dei **modi** legati agli **autovalori della matrice dinamica A**

Modi di evoluzione

I modi di evoluzione possono essere:

- **Aperiodici** → autovalori reali

$$c_i e^{\lambda_i t}$$

- **Pseudoperiodici** → autovalori complessi

$$c_i e^{\alpha_i t} e^{i\omega_i t}$$

NOTA: nel caso di autovalori complessi, un modo pseudoperiodico corrisponderà a una **coppia** di autovalori coniugati. Maggiori dettagli qui

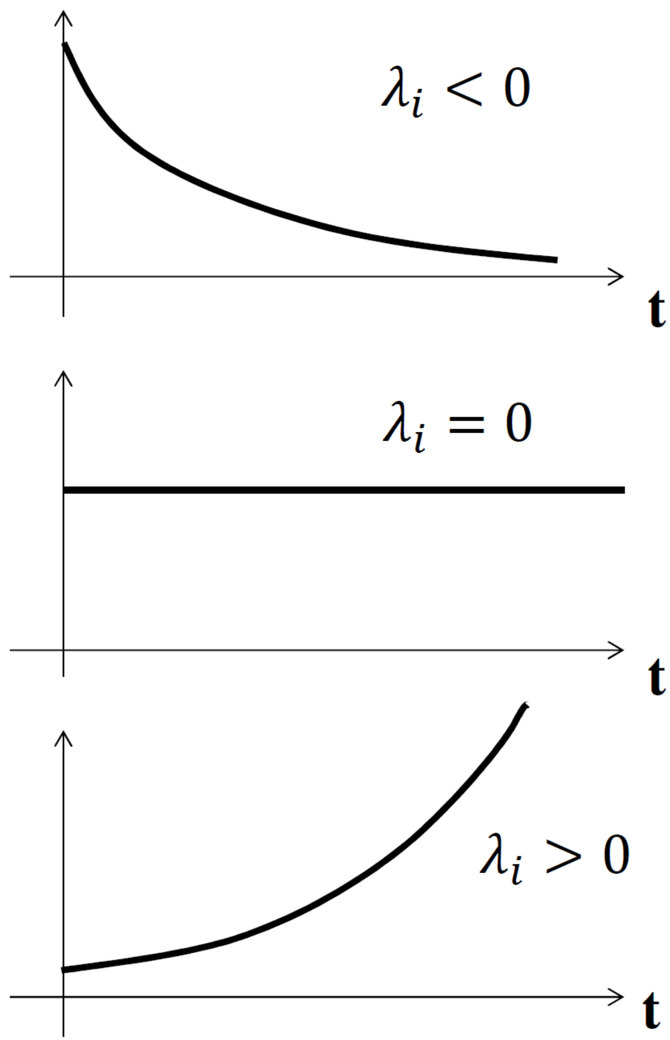
Modi di evoluzione

Modi aperiodici

– Convergente

– Costante

– Divergente



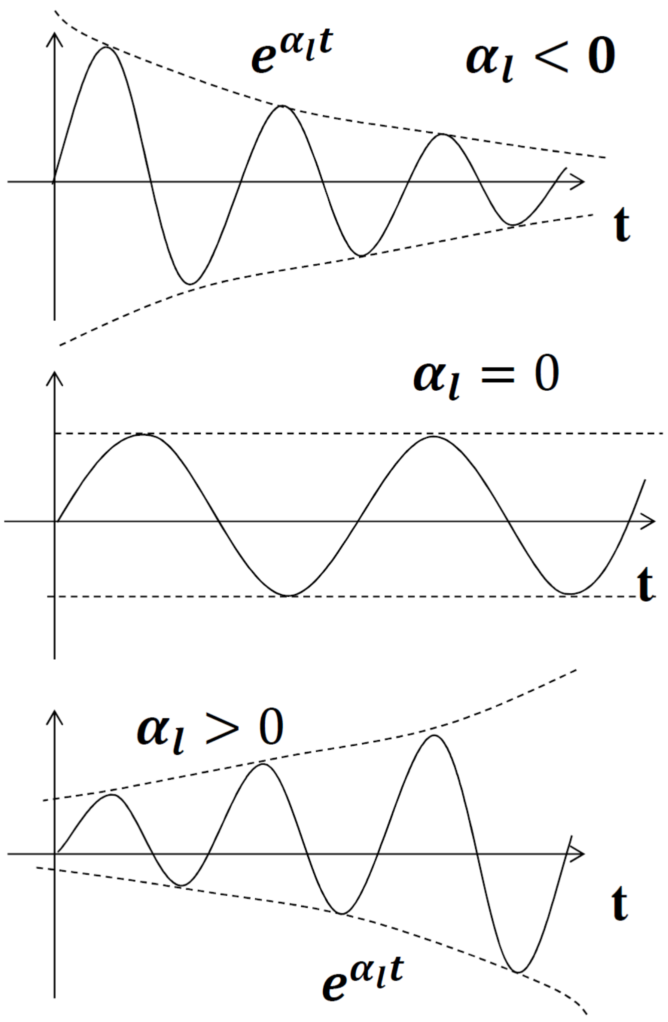
Modi di evoluzione

Modi pseudoperiodici

– Convergente

– Costante

– Divergente



Trasformata di Laplace

- Vediamo ora cosa succede applicando alle equazioni del nostro sistema la Trasformata di Laplace

$$L[f(t)] = F(s) \coloneqq \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

- Consideriamo la trasformata **monolatera**: vogliamo preservare la **causalità**
- Trasformata mono e bi-latera coincidono se $f(t) = f(t) \cdot \mathbb{1}(t)$

Trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace gode delle seguenti proprietà

- Linearità
- Traslazione nel dominio di Laplace

$$L[e^{\alpha t} f(t)] = F(s-\alpha)$$

- Traslazione nel tempo

$$L[f(t-T)] = F(s)e^{-sT}$$

Trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace gode delle seguenti proprietà

- Derivazione nel tempo

$$L\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

- Integrazione nel tempo

$$L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

Trasformata di Laplace

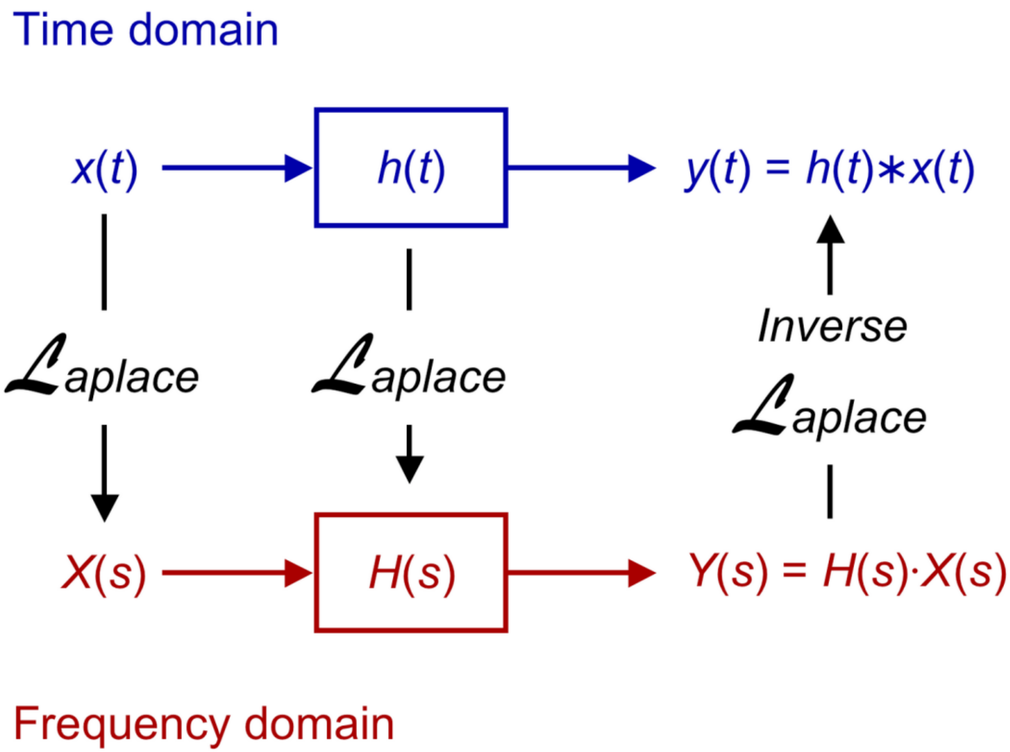
La trasformata di Laplace gode delle seguenti proprietà

- **Convoluzione**

$$L[f * g] = F(s)G(s)$$

Trasformata di Laplace

- La proprietà di convoluzione consente di semplificare il calcolo della risposta del sistema!



Trasformata di Laplace

Valgono inoltre i teoremi seguenti

- **Valore iniziale**

$$f(0) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

- **Valore finale**

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

Trasformate notevoli

- Delta di Dirac
$$L[\delta(t)] = 1$$
- Gradino
$$L[\mathbb{1}(t)] = 1/s$$
- Rampa
$$L[R(t)] = 1/s^2$$
- Esponenziale
$$L[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s-\alpha}$$
- Seno
$$L[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$
- Coseno
$$L[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Funzione di trasferimento

- Possiamo applicare alle equazioni del sistema LTI la Trasformata di Laplace

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s)$$
$$Y(s) = CX(s)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 + C(sI - A)^{-1}BU(s)$$

Funzione di trasferimento

L'espressione

$$W(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B$$

è anche detta **funzione di trasferimento** del sistema

→ La fdt è una rappresentazione **Ingresso-Uscita (IU)** del sistema dinamico

Funzione di trasferimento

Nel caso di sistemi LTI, la fdt sarà **il rapporto di due polinomi**

$$W(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$$

- Le radici di N(s) sono dette **zeri**
- Le radici di D(s) sono dette **poli**
- $D(s) = \det(sI - A)$ → è il polinomio caratteristico!

I poli coincidono con gli autovalori del sistema

Funzione di trasferimento

Posso scomporre la fdt in termini del tipo

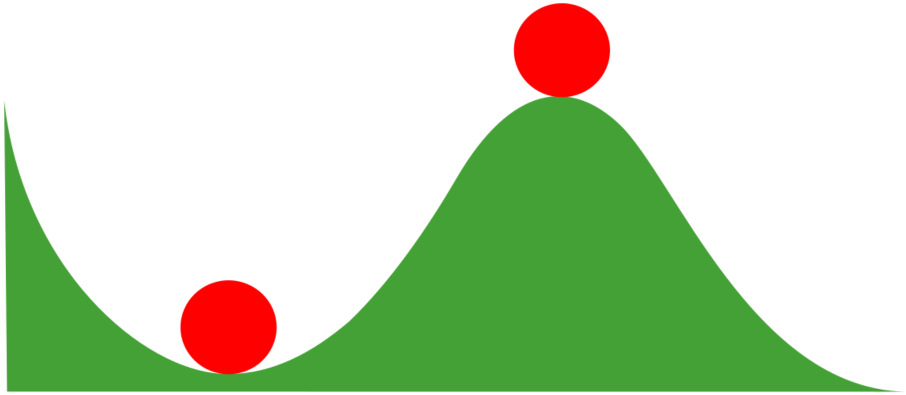
- $\frac{1}{s-\lambda} \xrightarrow{L^{-1}} e^{\lambda t} \cdot \mathbb{1}(\mathrm{t})$
- $\frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2} \xrightarrow{L^{-1}} e^{\alpha t}\sin(\omega t) \cdot \mathbb{1}(\mathrm{t})$
- $\frac{s}{(s-\alpha)^2+\omega^2} \xrightarrow{L^{-1}} e^{\alpha t}\cos(\omega t) \cdot \mathbb{1}(\mathrm{t})$

→ Ritrovo i modi di evoluzione visti prima!

Equilibri e stabilità

- Un sistema dinamico ha dei **punti di equilibrio** definiti dall'equazione

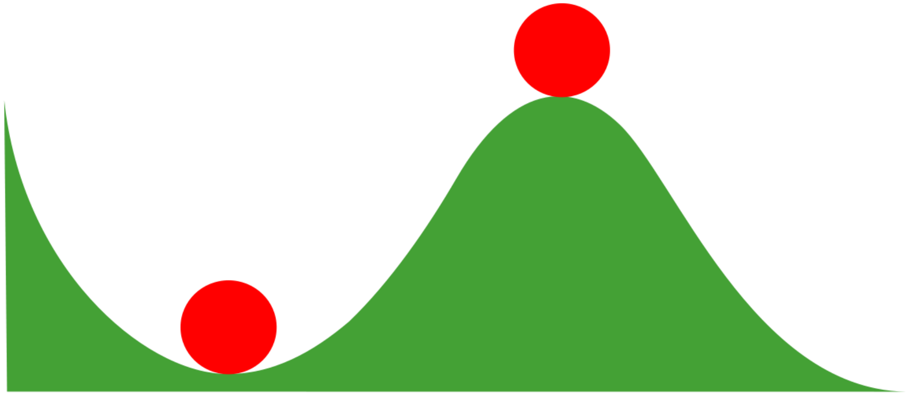
$$\dot{x} = f(x, u) = 0$$



Equilibri e stabilità

- In assenza di forzamento esterno, un sistema che si trovi in un punto di equilibrio vi **rimarrà indefinitamente**

- I punti di equilibrio possono essere **stabili** o **instabili**

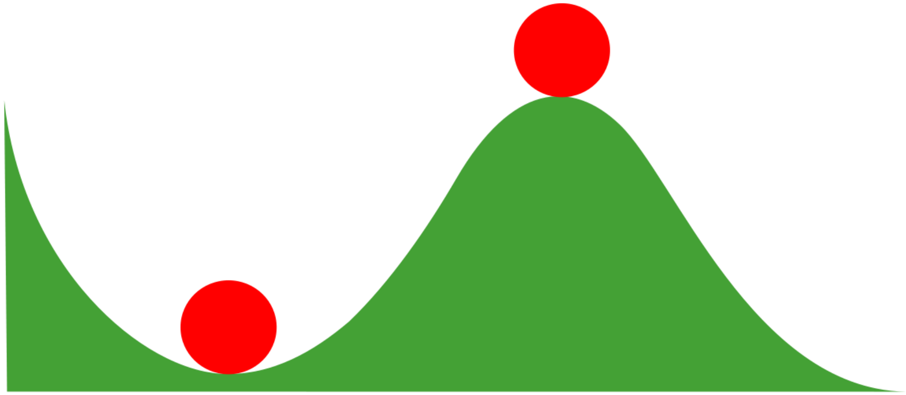


Equilibri e stabilità

- Nel caso di sistemi lineari, se il forzamento è nullo l'unico punto di equilibrio è

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$$

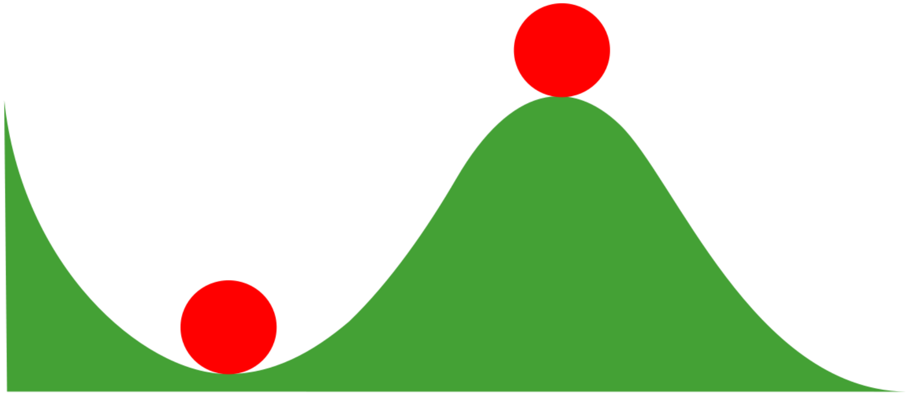
- L'equilibrio è **stabile** se tutti i modi di evoluzione sono **convergenti**



Equilibri e stabilità

- Il sistema è quindi instabile se la matrice A

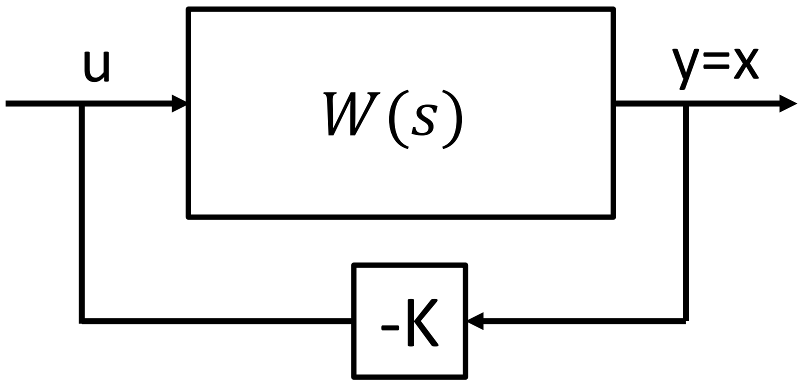
1. Ha autovalori nel **semipiano destro** del piano di Gauss
2. Ha autovalori a **parte reale nulla con molteplicità > 1**



Esempio: state feedback

- Un semplice esempio di controllo è il seguente (**retroazione di stato**)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}(t) + Bu(t), \qquad x(t_0) = x_0$$
$$y = \boldsymbol{x}(t)$$
$$u = -Kx$$



Esempio: state feedback

- Sostituendo l'espressione di u(t):

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (A - BK)\boldsymbol{x}(t)$$

- Con questa scelta, trasformo il sistema di partenza in un **sistema autonomo con matrice dinamica A-BK**

- Il sistema evolverà con dei modi dettati dagli autovalori di A-BK: se riesco a sceglierli arbitrariamente (= conosco lo stato + il sistema è *controllabile*…), posso assegnare al sistema una **dinamica qualunque**

Risposta in frequenza

- Molto utilizzata per l'analisi dei sistemi dinamici e la sintesi dei controllori è la **risposta in frequenza** del sistema

- La **funzione di risposta armonica** può essere ottenuta applicando al sistema la trasformata di Fourier

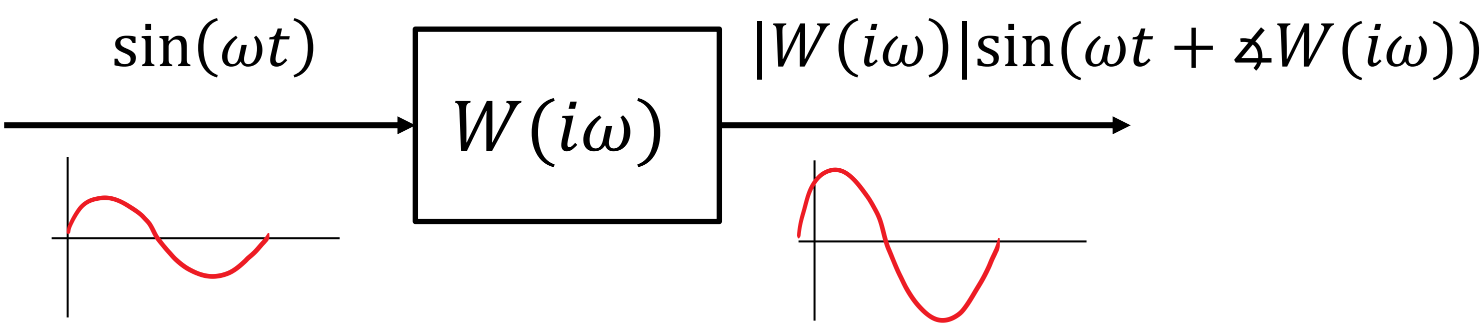
- Per sistemi LTI <u>stabili</u>*, questo equivale a valutare la fdt in $s = i\omega$

* Sistemi stabili hanno ascissa di convergenza < 0

Risposta in frequenza

- Un sistema LTI sottoposto a un ingresso sinusoidale darà, a regime, un'uscita sinusoidale

- **Modulo e fase** della sinusoide in uscita sono legate alla **funzione di risposta armonica**



Sistemi a tempo discreto

- In molti casi, può essere necessario **discretizzare** la dinamica del sistema

- Un tipico esempio sono i **sistemi di controllo digitali**

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \;\; \rightarrow \;\; x(k+1) = \tilde{A}x(k) + \tilde{B}u(k)$$

Sistemi a tempo discreto

- È possibile utilizzare in questo caso il formalismo della **trasformata Z**

Incontreremo questi argomenti nelle prossime lezioni

Esercizi

1. Verificare la formula di Lagrange
2. Calcolare la funzione di trasferimento a ciclo chiuso per questo schema (da *r* a *y*)

2. Utilizzando il teorema del valore finale, trovare le condizioni che garantiscono errore a regime nullo per riferimento a gradino per il sistema dell’es. 2

3. Utilizzando la formula di Lagrange, trovare l’espressione delle matrici $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ nel caso in cui un sistema a tempo continuo venga campionato con passo Δt

Risorse e Riferimenti

- [2] Cap. 1-6
- Control Bootcamp @Steve Brunton

Fine Lezione #11

Elementi di Controlli Automatici