

SPAZI PROIETTIVI E QUADRICHE

1. SPAZI PROIETTIVI

In analogia con quanto visto nel corso di Geometria I, definiamo lo *spazio proiettivo di dimensione n su un campo \mathbb{K}* a partire dalla potenza cartesiana \mathbb{K}^{n+1} (assumeremo sempre $n \geq 0$). Escludiamo dunque il vettore nullo da \mathbb{K}^{n+1} e consideriamo la relazione di proporzionalità in $\mathbb{K}_*^{n+1} := \mathbb{K}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$:

$$(1) \quad (x_0, \dots, x_n) \propto (x'_0, \dots, x'_n) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* := \mathbb{K} - \{0\} \mid (x_0, \dots, x_n) = \lambda(x'_0, \dots, x'_n).$$

Essendo immediato verificare che la (1) definisce una relazione di equivalenza in \mathbb{K}_*^{n+1} , possiamo considerare l'insieme quoziente

$$(2) \quad \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n := \mathbb{K}_*^{n+1} / \propto,$$

che chiameremo *spazio proiettivo di dimensione n su \mathbb{K}* .

Poiché uno spazio vettoriale di dimensione 1 ha per base un suo qualunque vettore non nullo, determinato *a meno di un fattore di proporzionalità*, lo spazio proiettivo (2) si può vedere come l'insieme delle rette passanti per l'origine oppure come l'insieme delle direzioni di \mathbb{K}^{n+1} .

Chiameremo *punti* gli elementi di $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ e scriveremo $P \equiv [x_0, \dots, x_n] = [X]$ per indicare il punto corrispondente alla classe di equivalenza del vettore $X = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}_*^{n+1}$. Diremo anche che x_0, \dots, x_n rappresentano le *coordinate omogenee* del punto $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$. Ovviamente le coordinate omogenee di un punto di $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ sono definite solo a meno di un fattore di proporzionalità.

Più in generale, possiamo dare la seguente

Definizione 1.1. Dato uno spazio vettoriale V , che supporremo sempre finitamente generato e momentaneamente di dimensione ≥ 1 su un campo \mathbb{K} , indicheremo con $\mathbb{P}(V)$ lo *spazio proiettivo associato a V* , definito come l'insieme quoziente di $V_* := V - \{\mathbf{0}\}$ modulo la relazione di proporzionalità:

$$(3) \quad v \propto v' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}_* \mid v = \lambda v'.$$

Chiameremo punti gli elementi di $\mathbb{P}(V)$ e scriveremo $P \equiv [v]$ per indicare il punto corrispondente alla classe di equivalenza del vettore $v \in V_*$.

Lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ si può anche vedere come l'insieme delle rette passanti per l'origine oppure come l'insieme delle direzioni di V .

Indicheremo inoltre con

$$(4) \quad \pi_V : V_* \rightarrow \mathbb{P}(V), \quad \pi_V(u) := [u], \quad \forall u \in V_*$$

l'applicazione quoziente.

Nel caso V abbia dimensione 0 porremo, convenzionalmente, $\mathbb{P}(V) := \emptyset$.

Notazione 1.2. *Quando avremo a che fare con spazi proiettivi associati a diversi spazi vettoriali, e avremo quindi la necessità di distinguere i loro elementi, useremo anche la notazione $[v]_V \in \mathbb{P}(V)$ per indicare la classe di equivalenza di $v \in V_*$ in $\mathbb{P}(V)$.*

Osservazione 1.3. *Se lo spazio vettoriale V ha dimensione 1 allora tutti i vettori non nulli sono tra loro proporzionali e $\mathbb{P}(V)$ contiene un solo elemento.*

1.1. Basi e dimensione di uno spazio proiettivo.

Lemma 1.4. *Data una collezione di vettori non nulli v_1, \dots, v_k di uno spazio vettoriale V , consideriamo i punti corrispondenti $[v_1], \dots, [v_k]$ nello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$. Se i vettori v_1, \dots, v_k sono linearmente indipendenti (dipendenti) e se $u_1 \in [v_1], \dots, u_k \in [v_k]$, allora anche i vettori u_1, \dots, u_k sono linearmente indipendenti (dipendenti).*

Esercizio 1.5. *Dimostrare il Lemma 1.4.*

Il Lemma precedente ci autorizza a dare la seguente

Definizione 1.6. Diremo che i punti $[v_1], \dots, [v_k] \in \mathbb{P}(V)$ sono *linearmente indipendenti (dipendenti)* se i vettori v_1, \dots, v_k sono linearmente indipendenti (dipendenti) in V .

Lemma 1.7. *Nelle notazioni del Lemma precedente, consideriamo un vettore non nullo $w \in V$ e fissiamo $w' \in [w]$. Se w dipende linearmente da v_1, \dots, v_k allora w' dipende linearmente da u_1, \dots, u_k .*

Esercizio 1.8. *Dimostrare il Lemma 1.7.*

I Lemmi precedenti ci autorizzano a dare le seguenti definizioni:

Definizione 1.9. Diremo che il punto $[w] \in \mathbb{P}(V)$ *dipende linearmente* dai punti $[v_1], \dots, [v_k] \in \mathbb{P}(V)$ se il vettore $w \in V_*$ dipende linearmente da v_1, \dots, v_k .

Definizione 1.10. (1) Se ogni punto dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ dipende linearmente da $[v_1], \dots, [v_k] \in \mathbb{P}(V)$ diremo che i punti $[v_1], \dots, [v_k] \in \mathbb{P}(V)$ generano lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$.

(2) Diremo che i punti $[v_1], \dots, [v_k] \in \mathbb{P}(V)$ sono una base dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ se sono indipendenti e generano $\mathbb{P}(V)$.

Notazione 1.11 (Base canonica). L'insieme delle classi di equivalenza $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ dei vettori della base canonica di \mathbb{K}^{n+1} si dice base canonica di $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$.

Notazione 1.12. Dato uno spazio vettoriale indicheremo con $\dim V$ la sua dimensione (con questa notazione stiamo assumendo che il campo degli scalari di V sia sottinteso). In analogia con il caso del piano proiettivo, diremo che la dimensione dello spazio proiettivo associato a V è la dimensione di V diminuita di uno:

$$\dim \mathbb{P}(V) := \dim V - 1.$$

Osservazione 1.13. (1) La dimensione di uno spazio proiettivo NON coincide con la cardinalità delle sue basi.

(2) Se $\dim V = 1$ allora troviamo $\dim \mathbb{P}(V) = 0$.

(3) Se $\dim V = 0$ allora troviamo $\dim \mathbb{P}(V) = -1$.

1.2. Applicazioni lineari tra spazi proiettivi. Consideriamo un'applicazione lineare iniettiva tra due spazi vettoriali sullo stesso campo $f : W \rightarrow V$. L'iniettività di f implica che le immagini dei vettori di W_* sono sempre non nulle. Pertanto f induce un'applicazione con dominio W_* e codominio V_* che, con abuso di notazione, continueremo ad indicare con f . Il seguente Teorema ci dice che f induce un'applicazione anche tra gli spazi proiettivi associati:

Teorema 1.14. Sia $f : W \rightarrow V$ un'applicazione lineare iniettiva tra due spazi vettoriali su un campo \mathbb{K} . Allora esiste un'unica applicazione iniettiva $\bar{f} : \mathbb{P}(W) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ che rende commutativo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} W_* & \xrightarrow{f} & V_* \\ \pi_W \downarrow & & \pi_V \downarrow \\ \mathbb{P}(W) & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{P}(V). \end{array}$$

Dimostrazione: La commutatività del diagramma si traduce nella richiesta che $\bar{f} \circ \pi_W = \pi_V \circ f$, ossia che valga

$$(5) \quad \bar{f}(\pi_W(w)) = \pi_V(f(w)), \quad \forall w \in W.$$

Ricordando la definizione (4), si deve avere

$$\bar{f}([w]_W) = [f(w)]_V, \quad \forall w \in W_*$$

Pertanto l'applicazione \bar{f} , se esiste, deve *necessariamente* essere definita come segue:

$$(6) \quad \bar{f}(P) := [f(w)]_V, \quad \text{se } P \equiv [w]_W.$$

Quanto appena detto dimostra l'unicità dell'applicazione \bar{f} .

Per dimostrare l'esistenza, è sufficiente mostrare che la (6) è ben posta, ossia che non dipende dal rappresentante scelto nella classe di equivalenza. In altri termini, dobbiamo assicurarci che se $w' \in [w]_W$ allora $[f(w)]_V = [f(w')]_V$. Ma questo è un'immediata conseguenza della linearità di f . Infatti, la condizione $w' \in [w]_W$ equivale all'esistenza di una costante non nulla $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $w' = \lambda w$ e la linearità di f ci consente di concludere:

$$[f(w')]_V = [f(\lambda w)]_V = [\lambda f(w)]_V = [f(w)]_V.$$

Per chiudere la dimostrazione, rimane da dimostrare l'iniettività di \bar{f} . Consideriamo quindi due punti $P \equiv [w]_W$ e $P' \equiv [w']_W$ in $\mathbb{P}(W)$ e assumiamo che $\bar{f}(P) = \bar{f}(P')$. Dobbiamo dimostrare che $P = P'$.

Dalla (6) segue:

$$[f(w)]_V = \bar{f}(P) = \bar{f}(P') = [f(w')]_V,$$

pertanto $f(w)$ e $f(w')$ sono vettori proporzionali in V ed esiste un coefficiente non nullo $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $f(w) = \lambda f(w') = f(\lambda w')$, dove la seconda uguaglianza è conseguenza della linearità. Per l'iniettività di f troviamo infine $w = \lambda w'$ e

$$P \equiv [w]_W = [\lambda w']_W \equiv P'.$$

c.v.d.

1.3. Sottospazi di uno spazio proiettivo. Consideriamo ancora uno spazio vettoriale V su \mathbb{K} e fissiamo un suo sottospazio $W \leq V$, che assumiamo non nullo. Poiché le rette per l'origine di W sono contenute in V esiste un'inclusione naturale

$$(7) \quad \mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}(V).$$

Diremo perciò che $\mathbb{P}(W)$ è un *sottospazio proiettivo* di $\mathbb{P}(V)$. Affinché un punto $P \equiv [v] \in \mathbb{P}(V)$ appartenga al sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(W)$ è necessario e sufficiente che $v \in W$. Quindi *il sottospazio proiettivo* $\mathbb{P}(W)$ è *l'immagine di* W_* *mediante la proiezione* (4):

$$(8) \quad \mathbb{P}(W) = \pi_V(W_*).$$

Definizione 1.15. Un sottospazio proiettivo di dimensione 1 di $\mathbb{P}(V)$ si dice *retta proiettiva* di $\mathbb{P}(V)$. Un sottospazio proiettivo di dimensione 2 di $\mathbb{P}(V)$ si dice *piano proiettivo* di $\mathbb{P}(V)$. Un sottospazio proiettivo di dimensione $\dim \mathbb{P}(V) - 1$ di $\mathbb{P}(V)$ si dice *iperpiano proiettivo* di $\mathbb{P}(V)$.

Osservazione 1.16. Dato un punto $P \equiv [w] \in \mathbb{P}(V)$ e indicato con W il sottospazio di V generato da w avremo $\mathbb{P}(W) = \{P\} \subset \mathbb{P}(V)$.

Esercizio 1.17. • Dimostrare l'equivalenza

$$W \subseteq U \Leftrightarrow \mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}(U),$$

per ogni coppia di sottospazi vettoriali W e U .

• Dimostrare che l'intersezione di sottospazi proiettivi è un sottospazio proiettivo.

Teorema 1.18 (Parametrizzazioni di un sottospazio proiettivo). Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e sia $W \leq V$ un sottospazio non nullo di V . Assumiamo che la dimensione di W sia $n + 1$ e fissiamo una base ordinata w_0, \dots, w_n di W . Allora l'applicazione

$$(9) \quad \iota : \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \rightarrow \mathbb{P}(V), \quad \iota([x_0, \dots, x_n]) := [x_0 w_0 + \dots + x_n w_n]$$

è ben definita e mette in corrispondenza biunivoca i punti di $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ con i punti del sottospazio $\mathbb{P}(W)$.

Dimostrazione: Osserviamo che, poiché i vettori w_0, \dots, w_n sono una base ordinata di W , l'applicazione

$$\mathbb{K}^{n+1} \rightarrow W \subset V, \quad (x_0, \dots, x_n) \rightarrow x_0 w_0 + \dots + x_n w_n,$$

è un isomorfismo di \mathbb{K}^{n+1} in W . Il risultato segue quindi dal Teorema 1.14, considerando anche che la composta di applicazioni suriettive è suriettiva. c.v.d.

Osservazione 1.19. Poiché $n + 1$ vettori w_0, \dots, w_n indipendenti in V sono una base di un unico sottospazio vettoriale $W \leq V$, la costruzione descritta nel Teorema precedente fornisce una parametrizzazione dell'unico sottospazio proiettivo che ha per base i punti $[w_0], \dots, [w_n]$. Pertanto, possiamo concludere che per due punti distinti passa una e una sola retta, per tre punti indipendenti passa uno e un solo piano e così via. Si osservi che i punti $[w_0], \dots, [w_n]$ sono le immagini, tramite la parametrizzazione ι , dei punti della base canonica di $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$.

Notazione 1.20. Dati due punti distinti $P \equiv [w]$ e $P' \equiv [w']$ indicheremo con $l_{PP'}$ (oppure con $l_{[w][w']}$) la retta contenente P e P' .

1.4. Somme di sottospazi proiettivi. Dati due sottospazi W_1 e W_2 di uno spazio vettoriale V , consideriamo i corrispondenti sottospazi proiettivi $\mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2) \subset \mathbb{P}(V)$. Indicheremo con $\langle \mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2) \rangle$ il *minimo tra i sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ contenenti $\mathbb{P}(W_1)$ e $\mathbb{P}(W_2)$* . Il sottospazio $\langle \mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2) \rangle$ si dice *somma proiettiva o join* dei sottospazi $\mathbb{P}(W_1)$ e $\mathbb{P}(W_2)$. Dovendo essere $\langle \mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2) \rangle = \mathbb{P}(H)$ per qualche sottospazio vettoriale $H \leq V$, è ovvio che

$$\langle \mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2) \rangle = \mathbb{P}(W_1 + W_2),$$

essendo noto che $W_1 + W_2$, il sottospazio vettoriale somma, è il minimo tra i sottospazi vettoriali contenenti W_1 e W_2 .

Definizione 1.21. Più in generale, dati dei sottospazi proiettivi $\mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2), \dots, \mathbb{P}(W_k)$ di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$, indicheremo con

$$\langle \mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2), \dots, \mathbb{P}(W_k) \rangle = \mathbb{P}(W_1 + W_2 + \dots, W_k),$$

la *somma proiettiva o join* di $\mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2), \dots, \mathbb{P}(W_k)$, definita come il minimo sottospazio proiettivo contenente $\mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2), \dots, \mathbb{P}(W_k)$.

Esercizio 1.22. *Dimostrare che la somma proiettiva dei sottospazi $\mathbb{P}(W_1)$ e $\mathbb{P}(W_2)$ coincide con l'unione delle rette congiungenti i punti di $\mathbb{P}(W_1)$ ai punti di $\mathbb{P}(W_2)$:*

$$\langle \mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2) \rangle = \bigcup_{P \in \mathbb{P}(W_1), P' \in \mathbb{P}(W_2)} l_{PP'}.$$

Notazione 1.23. *Nel caso si abbia $\dim W_1 = 1$, e dunque $\mathbb{P}(W_1) = \{P\}$ per qualche punto $P \in \mathbb{P}(V)$, denoteremo il join più semplicemente nella forma $\langle P, \mathbb{P}(W_2) \rangle$.*

Osservazione 1.24. *L'immagine della parametrizzazione ι definita in (9) è il join dei sottospazi $\{[w_0]\}, \dots, \{[w_n]\}$:*

$$\iota(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n) = \langle [w_0], \dots, [w_n] \rangle,$$

che chiameremo anche join dei punti $[w_0], \dots, [w_n]$.

Esercizio 1.25 (Teorema di Grassmann). *Dimostrare la formula di Grassmann per i sottospazi proiettivi:*

$$\dim \mathbb{P}(W_1) + \dim \mathbb{P}(W_2) = \dim(\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2)) + \dim \langle \mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2) \rangle,$$

per ogni coppia di sottospazi proiettivi $\mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2) \subset \mathbb{P}(V)$.

1.5. **Equazioni nello spazio proiettivo.** In questo paragrafo indicheremo con $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ l'algebra dei polinomi nelle indeterminate x_0, \dots, x_n a coefficienti nel campo \mathbb{K} . Gli elementi di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ sono combinazioni lineari di *monomi*, ossia di elementi del tipo $x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ con esponenti *interi non negativi*. Più precisamente, l'insieme dei monomi

$$(10) \quad \{x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} : (i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1}\}$$

costituisce una base non ordinata di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$, visto come spazio vettoriale su \mathbb{K} . In altri termini, un elemento di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ è un'espressione della forma

$$\sum_{(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1}} a_{i_0 \dots i_n} x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}, \quad a_{i_0 \dots i_n} \in \mathbb{K},$$

dove s'intende che i coefficienti $a_{i_0 \dots i_n}$ diversi da zero siano in numero finito.

Il prodotto tra polinomi è l'unica applicazione \mathbb{K} -bilineare

$$\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] \times \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$$

che estende il prodotto tra monomi, definito come segue

$$(x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}) \cdot (x_0^{j_0} x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}) := x_0^{i_0+j_0} x_1^{i_1+j_1} \dots x_n^{i_n+j_n}, \quad \forall (i_0, \dots, i_n), (j_0, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^{n+1}.$$

Il polinomio nullo, ossia il polinomio che ha ogni coefficiente $a_{i_0 \dots i_n}$ uguale a zero, è l'elemento neutro per la somma. Il monomio $x_0^0 x_1^0 \dots x_n^0$ è detto *polinomio unità* e rappresenta l'elemento neutro per il prodotto.

Definizione 1.26. Indicheremo con $gr(x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n})$ il *grado* del monomio $x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$, definito come la somma degli esponenti delle indeterminate:

$$(11) \quad gr(x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}) := i_0 + i_1 + \dots + i_n \in \mathbb{N}.$$

Dato un polinomio non nullo $K \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$, indicheremo con $gr(K)$ il suo *grado*, definito come il massimo tra i gradi dei monomi che hanno coefficiente non nullo nell'espressione di K :

$$K = \sum_{(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1}} a_{i_0 \dots i_n} x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}, \quad gr(K) := \max\{gr(x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}) \mid a_{i_0 \dots i_n} \neq 0\}.$$

Convenzionalmente, si pone pari a -1 il grado del polinomio nullo.

Consapevoli dell'abuso, identificheremo spesso un polinomio $K \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ con la corrispondente *funzione polinomiale*, $\mathbb{K}^{n+1} \xrightarrow{K} \mathbb{K}$, definita come segue:

$$(12) \quad K(t_0, \dots, t_n) := \sum_{(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1}} a_{i_0 \dots i_n} t_0^{i_0} t_1^{i_1} \dots t_n^{i_n}, \quad \forall (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{K}^{n+1}.$$

Definizione 1.27. Un polinomio non nullo K si dice *omogeneo* o *forma* se tutti i monomi che compaiono con coefficiente non nullo nell'espressione di K hanno lo stesso grado. Indicheremo con

$$\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d \leq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$$

il sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ costituito, oltre al polinomio nullo, da tutti i polinomi omogenei di grado d . Un polinomio $H \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ ammette un'unica espressione del tipo

$$H(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i_0 + \dots + i_n = d} a_{i_0 \dots i_n} x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n},$$

Esercizio 1.28. (1) Fare alcuni esempi di polinomi, omogenei e non, in una o in più variabili.

(2) Dimostrare che $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ è un sottospazio vettoriale di dimensione finita di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$.

(3) (Più difficile) calcolare la dimensione di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$.

L'importanza dei polinomi omogenei consiste nel fatto che ad essi si può associare un *luogo degli zeri* nello spazio proiettivo $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$. Fissiamo infatti $K \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$

$$K(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i_0 + \dots + i_n = d} a_{i_0 \dots i_n} x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n},$$

e consideriamo la funzione polinomiale (12) associata a K :

$$K(t_0, \dots, t_n) = \sum_{i_0 + \dots + i_n = d} a_{i_0 \dots i_n} t_0^{i_0} t_1^{i_1} \dots t_n^{i_n}, \quad \forall (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{K}^{n+1}.$$

Per ogni scalare non nullo $\lambda \in \mathbb{K}$, avremo

$$\begin{aligned} K(\lambda t_0, \dots, \lambda t_n) &= \sum_{i_0 + \dots + i_n = d} a_{i_0 \dots i_n} (\lambda t_0)^{i_0} (\lambda t_1)^{i_1} \dots (\lambda t_n)^{i_n} = \\ &= \sum_{i_0 + \dots + i_n = d} a_{i_0 \dots i_n} \lambda^{i_0 + \dots + i_n} t_0^{i_0} t_1^{i_1} \dots t_n^{i_n} = \lambda^d K(t_0, \dots, t_n). \end{aligned}$$

Poiché abbiamo supposto $\lambda \neq 0$, troviamo

$$(13) \quad K(t_0, \dots, t_n) = 0 \Leftrightarrow K(\lambda t_0, \dots, \lambda t_n) = 0.$$

In altri termini, se $(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ è radice di un polinomio omogeneo allora ogni altro $(t'_0, \dots, t'_n) \propto (t_0, \dots, t_n)$ sarà una radice dello stesso polinomio. E' pertanto ben definito il luogo degli zeri in $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ di un polinomio omogeneo $K \in R_d$:

$$(14) \quad Z(K) := \{[t_0, \dots, t_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n : K(t_0, \dots, t_n) = 0\} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n.$$

Esercizio 1.29. (1) Mostrare con degli esempi che, in generale, non è ben definito il luogo degli zeri in $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ di un polinomio non omogeneo.

(2) *Mostrare con degli esempi che, in generale, un polinomio non definisce una funzione $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \rightarrow \mathbb{K}$.*

1.6. Spazio proiettivo come ampliamento di una potenza cartesiana. Consideriamo l'insieme $\widetilde{\mathbb{P}}_{\mathbb{K}}^n := \mathbb{K}^n \cup \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n-1}$. Gli elementi di $\widetilde{\mathbb{P}}_{\mathbb{K}}^n$ sono dunque di due tipi: (i) vettori appartenenti alla potenza cartesiana \mathbb{K}^n ; (ii) direzioni nella potenza cartesiana \mathbb{K}^n .

Definiamo un'applicazione

$$(15) \quad \iota : \widetilde{\mathbb{P}}_{\mathbb{K}}^n \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$$

come segue:

$$\begin{aligned} \iota(t_1, \dots, t_n) &:= [1, t_1, \dots, t_n], \quad \forall (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{K}^n; \\ \iota[t_1, \dots, t_n] &:= [0, t_1, \dots, t_n], \quad \forall [t_1, \dots, t_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n-1}. \end{aligned}$$

E' immediato verificare che tale applicazione è ben definita.

Proposizione 1.30 (Ampliamento proiettivo di \mathbb{K}^n). *L'applicazione (15) è biiettiva. Più precisamente, l'applicazione ι mette in corrispondenza biunivoca \mathbb{K}^n con il sottoinsieme*

$$U := \{P \equiv [x_0, \dots, x_n] \mid x_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n,$$

e $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n-1}$ con il suo complementare.

Esercizio 1.31. *Dimostrare la Proposizione precedente.*

Definizione 1.32. L'immagine tramite ι di $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n-1}$, cioè l'insieme

$$\{P \equiv [x_0, \dots, x_n] \mid x_0 = 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n,$$

è detta *iperpiano all'infinito*. I punti appartenenti a U sono detti *punti propri*, mentre i punti dell'iperpiano all'infinito sono detti *punti impropri*.

Lemma 1.33. *Indichiamo con $l \subset \mathbb{K}^n$ la retta affine congiungente due elementi distinti (t_1, \dots, t_n) e (t'_1, \dots, t'_n) di \mathbb{K}^n . Indichiamo con $P \equiv [1, t_1, \dots, t_n] = \iota((t_1, \dots, t_n))$ e $P' \equiv [1, t'_1, \dots, t'_n] = \iota((t'_1, \dots, t'_n))$ i punti propri corrispondenti. Allora la retta proiettiva passante per P e P' possiede come unico punto improprio la direzione di l , mentre i suoi punti propri sono in corrispondenza biunivoca con l .*

Dimostrazione: Prima di tutto, ricordiamo che gli elementi della retta l si ottengono, in forma parametrica, come

$$(16) \quad v_\alpha := (t_1 + \alpha(t'_1 - t_1), \dots, t_n + \alpha(t'_n - t_n)),$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{K}$ (nella (16) il vettore $(t'_1 - t_1, \dots, t'_n - t_n)$ rappresenta la direzione di l). Pertanto, al variare di $\alpha \in \mathbb{K}$, l'espressione

$$(17) \quad \iota(v_\alpha) = [1, t_1 + \alpha(t'_1 - t_1), \dots, t_n + \alpha(t'_n - t_n)] \in \iota(l),$$

descrive il punto variabile nell'immagine attraverso ι della retta l .

D'altra parte, i punti della retta proiettiva passante per P e P' hanno coordinate omogenee

$$(18) \quad [\lambda + \mu, \lambda t_1 + \mu t'_1, \dots, \lambda t_n + \mu t'_n],$$

al variare di $[\lambda, \mu]$ in $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ (ricordare il Teorema 1.18). Per $\lambda + \mu \neq 0$ si trova

$$[\lambda + \mu, \lambda t_1 + \mu t'_1, \dots, \lambda t_n + \mu t'_n] = [1, \frac{\lambda t_1 + \mu t'_1}{\lambda + \mu}, \dots, \frac{\lambda t_n + \mu t'_n}{\lambda + \mu}] =$$

$$[1, t_1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu}(t'_1 - t_1), \dots, t_n + \frac{\mu}{\lambda + \mu}(t'_n - t_n)] = \iota(v_{\frac{\mu}{\lambda + \mu}}) \in \iota(l).$$

Poiché inoltre ogni $\alpha \in \mathbb{K}$ si può scrivere nella forma $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$, per opportuni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, il confronto tra l'ultima espressione e la (17) ci permette di concludere che i punti della retta passante per P e P' che si ottengono dalla (18), con $\lambda + \mu \neq 0$, sono in corrispondenza biunivoca con i punti di $\iota(l)$.

Infine, se $\lambda + \mu = 0$ si trova $[\lambda, \mu] = [1, -1] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ e il punto corrispondente sulla retta proiettiva passante per P e P' è il punto improprio di coordinate omogenee

$$[0, t_1 - t'_1, \dots, t_n - t'_n],$$

che è l'immagine tramite ι della direzione $(t_1 - t'_1, \dots, t_n - t'_n)$ di l . c.v.d.

Osservazione 1.34. *In base al Lemma precedente, possiamo interpretare la retta passante per P e P' come la chiusura proiettiva di l , che si ottiene aggiungendo a l il punto improprio corrispondente alla sua direzione.*

2. QUADRICHE NELLO SPAZIO PROIETTIVO

D'ora in poi supporremo che *la caratteristica del campo \mathbb{K} sia diversa da due*.

Definizione 2.1. Chiameremo *quadrica nello spazio proiettivo* $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ il luogo degli zeri in $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ di un polinomio omogeneo non nullo di secondo grado, appartenente all'anello dei polinomi $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$. Poiché la caratteristica di \mathbb{K} è diversa da 2, ogni polinomio omogeneo $Q \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_2 \leq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ può essere posto nella forma seguente:

$$(19) \quad Q = \sum_{i=0}^n a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_i x_j,$$

pertanto una quadrica è il luogo degli zeri in $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ di un polinomio non nullo del tipo (19):

$$(20) \quad \sum_{i=0}^n a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_i x_j = 0.$$

L'espressione (20) si presta ad essere scritta in forma matriciale. A tale scopo, indichiamo con X un vettore colonna che ha per componenti le indeterminate x_0, \dots, x_n e introduciamo una matrice simmetrica $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n+1, n+1}(\mathbb{K})$ tale che

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \text{se } i \leq j, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad \text{se } j < i.$$

Avremo dunque

$$(21) \quad X^t A X = \sum_{i,j=0}^n a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=0}^n a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_{ij}x_i x_j = Q.$$

Data la simmetria della matrice A appena introdotta, l'applicazione

$$\phi_A : \mathbb{K}^{n+1} \times \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\phi_A(X, Y) := X^t A Y = \sum_{i,j=0}^n a_{ij}x_i y_j, \quad \forall X, Y \in \mathbb{K}^{n+1},$$

definisce una *forma bilineare simmetrica* su \mathbb{K}^{n+1} .

C'è dunque una stretta relazione tra quadriche e forme bilineari simmetriche, di cui ricordiamo la definizione:

Definizione 2.2. Sia V uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} . Si dice *forma bilineare simmetrica* sullo spazio vettoriale V , un'applicazione:

$$\phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

tale che:

$$(1) \quad \phi(u, v) = \phi(v, u), \quad \forall u, v \in V \quad (\text{simmetria})$$

$$(2) \quad \phi(u, \lambda v + \mu w) = \lambda\phi(u, v) + \mu\phi(u, w), \quad \forall u, v, w \in V, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \text{ (linearità nel secondo argomento)}$$

Combinando le due proprietà si ricava immediatamente la linearità anche nel primo argomento:

$$(22) \quad \phi(\lambda v + \mu w, u) = \lambda\phi(v, u) + \mu\phi(w, u), \quad \forall u, v, w \in V, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

Definizione 2.3. L' applicazione:

$$q_\phi : V \longrightarrow \mathbb{K}$$

definita da

$$q_\phi(u) = \phi(u, u)$$

si dice *forma quadratica associata* alla forma bilineare simmetrica ϕ . La bilinearità implica

$$(23) \quad q_\phi(\lambda v) = \phi(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2\phi(v, v), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall v \in V.$$

La proprietà precedente ci consente di associare ad ogni forma quadratica una quadrica nello spazio proiettivo:

Definizione 2.4. Sia V uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} e sia ϕ una forma bilineare simmetrica non nulla definita in V . Si dice *quadrica associata a ϕ* il luogo degli zeri in $\mathbb{P}(V)$ della forma quadratica associata:

$$(24) \quad \{[v] \in \mathbb{P}(V) \mid q_\phi(v) = 0\} \subset \mathbb{P}(V).$$

Sia data una forma bilineare simmetrica ϕ in uno spazio vettoriale V di dimensione $n + 1$. Dati due vettori $u, v \in V$ e detti $X, Y \in \mathbb{K}^{n+1}$ i vettori colonna che ne rappresentano le coordinate rispetto ad una base fissata $\mathcal{B} = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$, si trova:

$$\phi(u, v) = \phi\left(\sum_{i=0}^n x_i e_i, \sum_{j=0}^n y_j e_j\right) = \sum_{i,j=0}^n \phi(e_i, e_j) x_i y_j = X^t A Y,$$

dove si è posto $A = (a_{ij}) = (\phi(e_i, e_j))$.

Definizione 2.5. Tale matrice $A = (\phi(e_i, e_j)) \in \mathcal{M}_{n+1, n+1}(\mathbb{K})$ è detta *matrice associata* alla forma ϕ , nella base \mathcal{B} .

Avremo inoltre

$$q_\phi(v) = X^t A X = \sum_{i,j=0}^n a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=0}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j,$$

che coincide con la (19). Pertanto, ogni quadrica (24) avrà la forma (20), una volta fissato un sistema di coordinate in V .

D'ora in poi, tutte le volte che faremo riferimento ad una quadrica di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ assumeremo sia stata assegnata un'equazione come la (20) e, di conseguenza, la *matrice associata* A e la forma bilineare simmetrica $\phi_A : \mathbb{K}^{n+1} \times \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{K}$.

2.1. Diagonalizzazione di una forma quadratica. Il Teorema seguente è di cruciale importanza nello studio delle quadriche e spiega il motivo che ci ha indotto a limitarci ai campi di caratteristica diversa da 2.

Teorema 2.6 (Diagonalizzazione di una forma bilineare simmetrica). *Sia ϕ una forma bilineare simmetrica non nulla, definita in uno spazio vettoriale V sul campo \mathbb{K} . Se la caratteristica di \mathbb{K} è diversa da 2 allora ϕ ammette una base rispetto alla quale la matrice associata è diagonale. L'equazione della quadrica associata nel sistema di coordinate corrispondente a tale base assumerà quindi la forma seguente:*

$$(25) \quad \lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 = 0,$$

per opportuni scalari $\lambda_i \in \mathbb{K}$ non tutti nulli.

Dimostrazione: Per la definizione di matrice associata (2.5), la tesi equivale all'esistenza di una base ortogonale, ossia di una base $\mathcal{B} = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ tale che

$$a_{ij} = \phi(e_i, e_j) = 0, \quad \text{se } i \neq j.$$

Poiché ϕ non è la forma nulla $\exists u, v \in V$ tali che $\phi(u, v) \neq 0$ e dimostriamo il teorema per induzione sulla dimensione dello spazio vettoriale. Se $\dim V = 1$ la tesi è ovvia. Dimostriamo il passo induttivo. Per la formula di polarizzazione:

$$0 \neq \phi(u, v) = \frac{1}{2}(q_\phi(u+v) - q_\phi(u) - q_\phi(v)),$$

almeno uno dei tre vettori $u, v, u+v$ (ad esempio v) è anisotropo, ossia non annulla la forma quadratica. Ma allora lo spazio vettoriale si decompone come

$$(26) \quad V = L(v) \oplus v^\perp,$$

dove $L(v)$ indica il sottospazio generato da v e

$$v^\perp := \{u \in V \mid \phi(v, u) = 0\}.$$

Troviamo quindi $\dim v^\perp = \dim V - 1$ e possiamo pertanto applicare l'ipotesi induttiva al sottospazio v^\perp . Sia dunque $\mathcal{B}_{v^\perp} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortogonale di v^\perp . Possiamo concludere che $\mathcal{B} = \{v, v_1, \dots, v_n\}$ rappresenta una base ortogonale di V (perché?). c.v.d.

Esercizio 2.7. *Dimostrare la (26), per ogni vettore anisotropo.*

Osservazione 2.8 (Forme quadratiche su un campo algebricamente chiuso). *Supponiamo ora che il campo \mathbb{K} sia algebricamente chiuso. Nella scelta del sistema di coordinate che ci ha portati alla forma (25), non è restrittivo assumere $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \dots, \lambda_r \neq 0, \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$, dove r rappresenta il rango della forma quadratica. Definendo un nuovo sistema di coordinate*

$$(27) \quad \begin{cases} y_i = \sqrt{\lambda_i}x_i, & \text{se } 1 \leq i \leq r, \\ y_i = x_i, & \text{se } r+1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

troviamo che l'equazione (25) nelle nuove coordinate si scrive:

$$y_1^2 + \dots + y_r^2 = 0.$$

Pertanto, in un campo algebricamente chiuso, basta il rango a classificare la quadrica.

Osservazione 2.9 (Forme quadratiche sul campo reale). *Supponiamo ora che il campo sia \mathbb{R} . In questo caso il Teorema 2.6 si può dedurre dal teorema di diagonalizzazione ortogonale di una matrice reale simmetrica. In questo caso, gli scalari λ_i che compaiono nella (25) rappresentano gli autovalori della matrice. Come nell'osservazione precedente, nella scelta del sistema di coordinate che ci ha portati alla forma (25), non è restrittivo assumere $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \dots, \lambda_r \neq 0, \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$. Non è difficile dimostrare che la cardinalità dell'insieme dei coefficienti λ strettamente positivi non dipende dalla base scelta per diagonalizzare la forma. Chiameremo tale cardinalità indice della forma e la indicheremo con la lettera p . Pertanto abbiamo:*

$$(28) \quad \begin{cases} \lambda_i > 0, & 1 \leq i \leq p \\ \lambda_i < 0, & p+1 \leq i \leq r \\ \lambda = 0, & r+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Definendo un nuovo sistema di coordinate

$$(29) \quad \begin{cases} y_i = \sqrt{\lambda_i}x_i, & \text{se } 1 \leq i \leq p, \\ y_i = \sqrt{-\lambda_i}x_i, & \text{se } p+1 \leq i \leq r, \\ y_i = x_i, & \text{se } r+1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

troviamo che l'equazione (25) nelle nuove coordinate si scrive:

$$y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2 = 0.$$

Pertanto, nel campo reale, bastano il rango e l'indice a classificare la quadrica.

Esercizio 2.10. *Mostrare che una quadrica reale è vuota se e soltanto se il rango è massimo e tutti gli scalari λ_i della (25) hanno lo stesso segno.*

2.2. **Quadriche in $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$.** Una quadrica in $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ è descritta da un'equazione omogenea del tipo

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0, \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Cerchiamo di stabilire come può essere fatto l'insieme dei punti di $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ con coordinate omogenee che soddisfino tale equazione. Distinguiamo due casi:

1) $a = c = 0$. In tal caso l'equazione diventa $2bxy = 0$ che è soddisfatta solo dai punti di coordinate omogenee $[1, 0]$ e $[0, 1]$.

2) $(a, c) \neq (0, 0)$. Assumiamo $a \neq 0$ (se fosse $a = 0, c \neq 0$ si procederebbe allo stesso modo, invertendo il ruolo dei due scalari). In tal caso il punto di coordinate omogenee $[1, 0]$ non risolve l'equazione. Pertanto ogni eventuale soluzione avrà la seconda coordinata omogenea non nulla, quindi non è restrittivo cercare solo le soluzioni della forma $[t, 1]$ ossia le radici del polinomio $at^2 + 2bt + c \in \mathbb{K}[t]$. Un polinomio di secondo grado può non avere radici in \mathbb{K} , oppure avere una radice doppia (nel qual caso si ha $\frac{c}{a} = (\frac{b}{a})^2$ e la radice è $-\frac{b}{a}$), oppure ha due radici distinte in \mathbb{K} .

Possiamo quindi concludere che *il luogo degli zeri dell'equazione precedente è l'insieme vuoto, oppure un punto doppio, oppure una coppia di punti distinti.*

Osservazione 2.11. *Quando il campo è algebricamente chiuso, l'eventualità che una quadrica sia vuota non può accadere.*

2.3. **Intersezioni di una quadrica con una retta proiettiva.** Fissiamo ora due punti distinti $P \equiv [x_0, \dots, x_n]$ e $P' \equiv [y_0, \dots, y_n]$ in $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ e cerchiamo i punti di intersezione tra la retta proiettiva passante per P e P' e la quadrica (20). Per semplificare lo studio, indichiamo con $X \in \mathbb{K}^{n+1}$ il vettore colonna che ha per coefficienti le coordinate omogenee di P e con $Y \in \mathbb{K}^{n+1}$ il vettore colonna che ha per coefficienti le coordinate omogenee di P' . Il punto variabile sulla retta passante per P e P' avrà coordinate omogenee uguali ai coefficienti di $\lambda X + \mu Y$ con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Per la (20), il punto di coordinate omogenee $\lambda X + \mu Y$ appartiene alla quadrica se e solo se

$$(\lambda X + \mu Y)^t A (\lambda X + \mu Y) = 0$$

ossia, se e solo se

$$(30) \quad \lambda^2 X^t A X + 2\lambda\mu\phi_A(X, Y) + \mu^2 Y^t A Y = 0,$$

dove si è tenuto conto della distributività del prodotto righe per colonne e della simmetria di ϕ_A . La (30) rappresenta un'equazione di secondo grado in λ e μ che ha per soluzioni le coordinate omogenee dei punti di intersezione tra la quadrica (20) e la retta per P e P' . Nel caso la (30) sia un'identità, cosa che accade quando $X^t A X = X^t A Y = Y^t A Y = 0$, la retta è *interamente contenuta* nella quadrica. Altrimenti, la (30) rappresenta una quadrica in $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ e sappiamo dal

§2.1 che l'intersezione è l'insieme vuoto, oppure un punto doppio, oppure una coppia di punti distinti. Se poi assumiamo che uno dei due punti, ad esempio P , appartenga alla quadrica, allora la prima eventualità non può accadere quindi *l'intersezione è il punto P con molteplicità 2, oppure il punto P e un secondo punto S appartenente alla retta.*

Definizione 2.12. Siano date una retta l e una quadrica q in uno spazio proiettivo $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$.

- (1) Se $l \cap q = \{P\}$, diremo che la retta l è *tangente alla quadrica q nel punto P .*
- (2) Se $l \cap q = \{P, P'\}$, con $P \neq P'$, diremo che la retta l è *secante alla quadrica q nei punti P e P' .*

2.4. Punti semplici di una quadrica e iperpiano tangente. Ci proponiamo ora di determinare tutte le rette tangenti ad una quadrica $q \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ in un suo punto $P \equiv [X] \in q$. Fissiamo quindi un generico punto $P' \equiv [Y]$, diverso da P , e consideriamo la retta proiettiva passante per P e P' . L'equazione (30) ha per soluzioni le coordinate omogenee dei punti di intersezione tra tale retta e la quadrica. Poiché il punto P appartiene alla quadrica, avremo $X^t A X = 0$ e l'equazione si riduce a

$$\mu(2\lambda\phi_A(X, Y) + \mu Y^t A Y) = 0.$$

La precedente equazione ha sempre la soluzione $[\lambda, \mu] = [1, 0]$, corrispondente al punto P , che per ipotesi appartiene alla quadrica (ricordare L'Osservazione 1.19). Se $\phi_A(X, Y) \neq 0$ ci sarà anche la soluzione $[\lambda, \mu] = [Y^t A Y, -2\phi_A(X, Y)] \neq [1, 0]$. Se $\phi_A(X, Y) = 0$ e $Y^t A Y \neq 0$ $[\lambda, \mu] = [1, 0]$ sarà una soluzione doppia e la retta sarà tangente in P . Infine, se contemporaneamente $\phi_A(X, Y) = 0$ e $Y^t A Y = 0$ la retta sarà contenuta nella quadrica. Riassumendo, avremo

- (1) $\phi_A(X, Y) \neq 0 \Leftrightarrow$ retta secante;
- (2) $\phi_A(X, Y) = 0$ e $Y^t A Y \neq 0 \Leftrightarrow$ retta tangente in P ;
- (3) $\phi_A(X, Y) = 0$ e $Y^t A Y = 0 \Leftrightarrow$ retta contenuta nella quadrica.

Osservazione 2.13. *In base alla discussione precedente, dato un punto $P \equiv [X]$ di una quadrica e fissato un punto $P' \equiv [Y]$, diverso da P , la retta passante per P e P' è tangente in P oppure interamente contenuta nella quadrica se e soltanto se*

$$(31) \quad \phi_A(X, Y) = X^t A Y = 0,$$

ossia se e soltanto se le coordinate omogenee dei due punti annullano la forma bilineare simmetrica associata alla quadrica. In tal caso diremo che la retta passante per P e P' è una retta di contatto per la quadrica.

Definizione 2.14 (Iperpiano tangente). Nelle notazioni precedenti, se poniamo $Z = (z_0, \dots, z_n) := X^t A \in \mathbb{K}^{n+1}$ allora possono presentarsi due casi:

- (1) $Z \neq \underline{0}$ e il punto P si dice *semplice*. In tal caso la (31), vista come equazione nelle coordinate di P' diventa

$$z_0y_0 + \cdots + z_ny_n = 0,$$

e ha per soluzioni le coordinate omogenee dei punti che appartengono a qualche retta di contatto passante per P . L'insieme delle soluzioni di tale equazione rappresenta un iperpiano di $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ che si dice *iperpiano tangente* la quadrica nel punto P e che indicheremo con $Tg(q, P)$.

- (2) $Z = \underline{0}$ e il punto P si dice *doppio*. In tal caso tutte le rette passanti per P sono di contatto.

Definizione 2.15. Una quadrica priva di punti doppi si dice *quadrica non degenera*. Una quadrica contenente almeno un punto doppio si dice *quadrica degenera*.

2.5. Polarità definita da una quadrica non degenera. In questo paragrafo supporremo assegnata una quadrica non degenera in $q \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ di equazione (20).

Definizione 2.16. Due punti $P \equiv [X]$ e $P' \equiv [Y]$ si dicono *coniugati rispetto alla quadrica q* se

$$X^tAY = 0$$

(si osservi che la definizione è ben posta). Definito $Z = (z_0, \dots, z_n) := X^tA \in \mathbb{K}^{n+1}$, poiché la quadrica non è degenera, si trova $Z \neq \underline{0}$. Quindi un punto $P' \equiv [Y]$ è coniugato a P se e soltanto se le sue coordinate omogenee soddisfano la seguente equazione

$$z_0y_0 + \cdots + z_ny_n = 0.$$

Quindi l'insieme dei punti coniugati a P è un iperpiano, che indicheremo con π_P , detto *iperpiano polare* a P rispetto alla quadrica q . Dal confronto con la definizione (2.14) si vede che *l'iperpiano polare coincide con l'iperpiano tangente quando il punto appartiene alla quadrica*.

Osservazione 2.17. (1) *Si osservi che l'insieme dei punti della quadrica si può vedere come l'insieme dei punti autoconiugati (cioè coniugati a sé stessi) oppure come l'insieme dei punti appartenenti al proprio iperpiano polare:*

$$P \in q \Leftrightarrow P \in \pi_P.$$

- (2) *Poiché l'essere coniugati è una relazione simmetrica, si trova la seguente proprietà, detta di reciprocità:*

$$P \in \pi_{P'} \Leftrightarrow P' \in \pi_P.$$

Teorema 2.18. *L'applicazione $P \rightarrow \pi_P$ è un'applicazione biunivoca tra lo spazio proiettivo e l'insieme dei suoi iperpiani.*

Dimostrazione. In base alla Definizione 2.16, l'applicazione lineare

$$\mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}, \quad X \rightarrow AX,$$

manda le coordinate omogenee del punto $P \equiv [X]$ nel vettore che ha per componenti i coefficienti dell'iperpiano polare π_P . Tali coefficienti sono ben determinati a meno di un fattore di proporzionalità. Per il Teorema 1.14, abbiamo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_*^{n+1} & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}_*^{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n. \end{array}$$

(si osservi che il Teorema è applicabile perché la matrice A è invertibile), dove π è l'applicazione che associa ad ogni punto i coefficienti dell'equazione del corrispondente iperpiano polare. Ancora per il Teorema 1.14, π è iniettiva. La suriettività segue come nella dimostrazione del Teorema 1.18. c.v.d.

2.6. Quadriche degeneri. Per quanto visto nel paragrafo precedente, un punto $P \equiv [X]$ è un punto doppio di una quadrica se e soltanto se $X^t A = \underline{0}$ in \mathbb{K}^{n+1} . Data la simmetria della matrice associata A , tale condizione è equivalente a

$$AX = \underline{0} \in \mathbb{K}^{n+1}.$$

Troviamo pertanto un'importante conseguenza:

(32) l'insieme dei punti doppi di una quadrica degenera è il sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ associato al nucleo della matrice A .

L'esercizio seguente fornisce una sorta di inverso all'affermazione precedente.

Esercizio 2.19. *Se una quadrica coincide con un sottospazio proiettivo allora la quadrica è interamente costituita da punti doppi.*

Osservazione 2.20. *Se una retta passante per un punto doppio incontra la quadrica un altro punto, allora essa è interamente contenuta nella quadrica.*

Proposizione 2.21. *Il rango della matrice A è pari a 1 se e soltanto se esistono una costante non nulla $\lambda \in \mathbb{K}$ e un vettore non nullo $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tali che $a_{ij} = \lambda a_i a_j$. Di conseguenza l'equazione della quadrica è del tipo*

$$(33) \quad \lambda(a_0 x_0 + \dots + a_n x_n)^2 = 0.$$

Dimostrazione. E' un'immediata conseguenza del Teorema 2.6. c.v.d.

Definizione 2.22. Se una quadrica è descritta da un'equazione del tipo (33) diremo che è un *iperpiano doppio*.

Teorema 2.23 (Coni). Sia $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ il sottospazio dei punti doppi di una quadrica $q \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ e sia $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ un complementare di $\mathbb{P}(W)$. Assumiamo che $\dim \mathbb{P}(W) \leq n - 2$ e che la quadrica non sia interamente costituita da punti doppi. Allora $C := q \cap \mathbb{P}(U)$ è una quadrica in $\mathbb{P}(U)$ priva di punti doppi. Inoltre, la quadrica q può essere descritta come l'unione dei sottospazi proiettivi $\langle \mathbb{P}(W), P \rangle$, al variare di P in C :

$$q = \bigcup_{P \in C} \langle \mathbb{P}(W), P \rangle.$$

Dimostrazione 1: Dimostreremo, nell'ordine, le seguenti affermazioni:

- (1) per ogni punto P tale che $P \in q$ e $P \notin \mathbb{P}(W)$ si ha che $\langle \mathbb{P}(W), P \rangle \subseteq q$;
 - (2) $q = \bigcup_{P \in C} \langle \mathbb{P}(W), P \rangle$;
 - (3) la quadrica C è priva di punti doppi.
- (1) Per l'Esercizio 1.22, sappiamo che

$$\langle \mathbb{P}(W), P \rangle = \bigcup_{P' \in \mathbb{P}(W)} l_{PP'}.$$

D'altra parte ogni retta della forma precedente dev'essere interamente contenuta nella quadrica in quanto P' è doppio, $P \in q$ e $P \neq P'$ (infatti $P' \in \mathbb{P}(W)$ mentre $P \notin \mathbb{P}(W)$).

- (2) Sia P' un punto regolare della quadrica. Dobbiamo dimostrare

$$P' \in \bigcup_{P \in C} \langle \mathbb{P}(W), P \rangle.$$

Per l'affermazione (1) sappiamo che il sottospazio $H := \langle \mathbb{P}(W), P' \rangle$ è interamente contenuto nella quadrica. D'altra parte, per la formula di Grassmann (ricordare l'Esercizio 1.25), si trova facilmente

$$\dim(\mathbb{P}(U) \cap H) \geq 0.$$

Pertanto $\mathbb{P}(U) \cap H \neq \emptyset$ ed esiste un punto $P \in C \cap H$. Si conclude facilmente:

$$P' \in H = \langle \mathbb{P}(W), P' \rangle = \langle \mathbb{P}(W), P \rangle \subseteq \bigcup_{P \in C} \langle \mathbb{P}(W), P \rangle.$$

(3) Consideriamo un punto $P \in C$ e assumiamo, per assurdo, sia doppio in C . Ci accingiamo a dimostrare che P è doppio anche in q , in contraddizione col fatto che $P \in C$ e C è disgiunta dal luogo dei punti doppi.

Consideriamo una retta l per P e dimostriamo che è una retta di contatto per q . Se $l \subseteq \mathbb{P}(U)$ non c'è nulla da dimostrare in quanto stiamo assumendo che P sia un punto doppio

per $C \subset \mathbb{P}(U)$. Assumiamo dunque che P sia l'unico punto dell'intersezione $l \cap \mathbb{P}(U)$ e che l incontri la quadrica q in un altro punto P' , distinto da P . Ovviamente P' non appartiene a C . Concluderemo l'argomento dimostrando che

$$(34) \quad l = l_{PP'} \subset q.$$

Se $P' \in \mathbb{P}(W)$ la tesi è ovvia, in quanto

$$l = l_{PP'} \subset \langle \mathbb{P}(W), P \rangle \subset q.$$

Possiamo quindi assumere $P' \notin \mathbb{P}(W)$. Per l'affermazione (1), dimostrata in precedenza, si ha che

$$(35) \quad \langle \mathbb{P}(W), P' \rangle \subset q.$$

Poiché $P' \notin \mathbb{P}(W)$, la formula di Grassmann implica che $\mathbb{P}(U) \cap \langle \mathbb{P}(W), P' \rangle \neq \emptyset$ e possiamo scegliere un punto

$$(36) \quad \bar{P} \in \mathbb{P}(U) \cap \langle \mathbb{P}(W), P' \rangle \subseteq \mathbb{P}(U) \cap q = C.$$

Per l'Osservazione 2.20, si ha che

$$(37) \quad l_{P\bar{P}} \subseteq C \subset q.$$

Indicando con Q l'unico punto contenuto nell'intersezione $l_{P'\bar{P}} \cap \mathbb{P}(W)$, avremo $l_{P'\bar{P}} = l_{P'Q}$. Per la (35) e la (36) si ha che la retta $l_{P'\bar{P}} = l_{P'Q}$ è inclusa in q . Per l'affermazione (1) si ha che la retta $l_{PQ} \subseteq \langle \mathbb{P}(W), P \rangle$ è inclusa in q . Quindi, ricordando anche la (37), le tre rette $l_{P\bar{P}}$, $l_{P'Q}$ e l_{PQ} sono tutte incluse nella quadrica q . D'altra parte, le tre rette precedenti sono contenute piano $\pi := \langle P, P', Q \rangle$ che, per quanto detto sulle coniche nel piano proiettivo, deve essere interamente contenuto in q . La tesi (34) segue facilmente

$$l = l_{PP'} \subset \langle P, P', Q \rangle = \pi \subset q.$$

c.v.d.

Dimostrazione 2: Fissiamo due basi ordinate u_0, \dots, u_k e w_0, \dots, w_s di U e W rispettivamente (si osservi che $k + s + 1 = n$). Poiché U e W sono sottospazi complementari, i vettori $u_0, \dots, u_k, w_0, \dots, w_s$ costituiscono una base ordinata di \mathbb{K}^{n+1} . Indichiamo con y_0, \dots, y_n le coordinate di \mathbb{K}^{n+1} rispetto a tale base. L'equazione della quadrica in tale sistema di coordinate si potrà quindi scrivere nella forma

$$Y^t A' Y = 0,$$

dove A' è la matrice associata alla quadrica nelle coordinate y_0, \dots, y_n . Poiché i punti di $\mathbb{P}(W)$ sono doppi, il la (32) implica che le ultime $s + 1$ colonne di A' sono nulle. Assendo inoltre A'

simmetrica, si dovrà avere

$$A' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dove B indica una matrice simmetrica di ordine $k + 1$, che dovrà avere determinante non nullo per le scelte fatte. Pertanto l'equazione della quadrica nelle coordinate y_0, \dots, y_n sarà del tipo

$$(38) \quad \sum_{i=0}^k b_{ii} y_i^2 + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq k} b_{ij} y_i y_j = 0.$$

In parole povere, nell'equazione “mancano” le coordinate y_{k+1}, \dots, y_n . D'altra parte, y_0, \dots, y_k rappresentano le coordinate dei punti di $\mathbb{P}(U)$ rispetto alla base fissata. Quindi l'equazione (38) rappresenta anche l'intersezione $C = Q \cap \mathbb{P}(U)$, che sarà priva di punti singolari in quanto la matrice B ha rango massimo. Osserviamo anche che C non è vuota perché stiamo assumendo che la quadrica non sia interamente costituita da punti doppi. Infine, se $P \equiv [\alpha_0, \dots, \alpha_k] \in \mathbb{P}(U)$ è un punto di C , ossia se $(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ è una soluzione di (38), allora ogni punto con coordinate omogenee $[\alpha_0, \dots, \alpha_k, \beta_0, \dots, \beta_s] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ dovrà appartenere alla quadrica, qualunque siano i coefficienti β_0, \dots, β_s . Si conclude in quanto, al variare dei coefficienti β_0, \dots, β_s il punto $[\alpha_0, \dots, \alpha_k, \beta_0, \dots, \beta_s]$ descrive tutto il sottospazio $\langle \mathbb{P}(W), P \rangle$, eccetto i punti di $\mathbb{P}(W)$, che ovviamente appartengono alla quadrica. c.v.d.

Osservazione 2.24. *Durante la dimostrazione del Teorema precedente si è provato che, se $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ un complementare del sottospazio dei punti doppi, la quadrica direttrice $C = Q \cap \mathbb{P}(U)$ è non degenera, eventualmente vuota.*

Definizione 2.25. Nelle notazioni del Teorema 2.23, la quadrica si dice *cono di vertice* $\mathbb{P}(W)$ e *direttrice* C . I sottospazi del tipo $\langle \mathbb{P}(W), P \rangle$, al variare del punto P nella direttrice C , si dicono *sottospazi generatori del cono*. I sottospazi generatori sono sottospazi proiettivi di dimensione pari a quella del nucleo della matrice A .

Esempio 2.26. *Indichiamo le coordinate di $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3$ con x, y, z e t . Le prime tre coordinate descrivono quindi un piano proiettivo $\pi \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3$. L'equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ rappresenta un cono di vertice il punto $P \equiv [0, 0, 0, 1]$ e direttrice la conica di equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ in π . Se $P' \equiv [a, b, c] \in \pi$ appartiene a tale conica, allora la retta generatrice passante per P' è descritta da $[\lambda a, \lambda b, \lambda c, \mu], (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.*

Corollario 2.27. *Come nel Teorema 2.23, assumiamo che la quadrica non sia interamente costituita da punti doppi. Il rango della matrice A è pari a 2 se e soltanto se la quadrica è unione di due iperpiani distinti.*

Dimostrazione E' conseguenza immediata del Teorema (2.23) (esercizio).

Osservazione 2.28. *Nelle ipotesi del precedente Corollario, l'equazione della quadrica è del tipo $(a_0x_0 + \dots + a_nx_n)(b_0x_0 + \dots + b_nx_n) = 0$ con (a_0, \dots, a_n) e (b_0, \dots, b_n) non proporzionali. In tal caso, diremo che la quadrica è **riducibile**.*

3. CONICHE NEL PIANO PROIETTIVO

In questo paragrafo ritroviamo, come esercizio, la classificazione delle coniche in $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$ in due casi: \mathbb{K} algebricamente chiuso e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

3.1. Coniche in $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$, con \mathbb{K} algebricamente chiuso. Come spiegato nell'Osservazione 2.8, la classificazione dipende unicamente dal rango della matrice associata.

- (1) $\text{rg } A = 1 \Leftrightarrow$ retta doppia.
- (2) $\text{rg } A = 2 \Leftrightarrow$ conica riducibile.
- (3) $\text{rg } A = 3 \Leftrightarrow$ la conica si può scrivere nella forma $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, in un opportuno sistema di coordinate.

3.2. Coniche in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Come spiegato nell'Osservazione 2.9 la classificazione dipende unicamente dal rango e dall'indice della matrice associata.

- (1) $\text{rg } A = 1 \Leftrightarrow$ retta doppia.
- (2) $\text{rg } A = 2$ e autovalori di segno concorde \Leftrightarrow conica che si riduce ad un punto.
- (3) $\text{rg } A = 2$ e autovalori di segno discorde \Leftrightarrow conica riducibile.
- (4) $\text{rg } A = 3$ e autovalori di segno concorde \Leftrightarrow insieme vuoto.
- (5) $\text{rg } A = 3$ e autovalori di segno discorde \Leftrightarrow la conica si può scrivere nella forma $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, in un opportuno sistema di coordinate (è non degenera e contiene infiniti punti).

4. QUADRICHE IN $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3$, CON \mathbb{K} ALGEBRICAMENTE CHIUSO.

4.1. Quadriche degeneri. La matrice associata ad una quadrica degenera deve avere rango compreso tra 1 e 3:

- $\text{rg}(A) = 1$: per la Proposizione (2.21) ciò avviene se e soltanto se la quadrica è un piano doppio, cioè se la sua equazione può essere posta nella forma

$$(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 = 0, \quad (a_0, a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0, 0).$$

La condizione $\text{rg}(A) = 1$ equivale al fatto che *tutti i punti della quadrica sono doppi*.

- $rg(A) = 2$: per il Corollario (2.27) ciò avviene se e soltanto se la quadrica è riducibile, cioè se la sua equazione può essere posta nella forma

$$(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3) = 0,$$

con (a_0, a_1, a_2, a_3) e (b_0, b_1, b_2, b_3) non nulli e non proporzionali. La condizione $rg(A) = 2$ equivale al fatto che *i punti doppi della quadrica formano una retta*, precisamente la retta intersezione dei due piani di equazioni $(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) = 0$ e $(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3) = 0$.

- $rg(A) = 3$: per il Teorema (2.23) ciò avviene se e soltanto se la quadrica è un cono di vertice un punto e direttrice una conica piana non degenera. La condizione $rg(A) = 3$ equivale al fatto che *la quadrica possiede un solo punto doppio*, il vertice del cono. In qualunque sistema di coordinate in cui il vertice ha coordinate omogenee $[0, 0, 0, 1]$ l'equazione è del tipo

$$a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0,$$

dove la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo.

Osservazione 4.1. *Dato un cono in $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3$ con vertice un punto P_0 , il generico piano passante per P_0 incontra la quadrica in una conica riducibile.*

Proposizione 4.2. *Una quadrica contiene due piani distinti se e solo se è riducibile.*

Dimostrazione Ovviamente, se una quadrica è riducibile allora contiene 2 piani distinti. Viceversa, supponiamo che una quadrica q contenga due piani distinti π e π' e poniamo $l := \pi \cap \pi'$. Assumiamo per assurdo che esista un punto tale che

$$(39) \quad P \in q, \quad P \notin \pi \cup \pi'.$$

Consideriamo un qualunque piano γ tale che

$$(40) \quad P \in \gamma, \quad l \not\subset \gamma,$$

e definiamo $s := \gamma \cap \pi$, $s' := \gamma \cap \pi'$. Osserviamo prima che le due rette s e s' sono distinte. Infatti, se non lo fossero, avremmo $s = s' = \pi \cap \pi' = l$. Ma questo è assurdo perché $s \subset \gamma$ mentre $l \not\subset \gamma$. Troviamo quindi

$$\{P\} \cup s \cup s' \subset \gamma \cap q, \quad s \neq s', \quad P \notin s \cup s',$$

(quest'ultima perché $s \subset \pi$, $s' \subset \pi'$ ma $P \notin \pi \cup \pi'$ per la (39)). Poiché una conica non può contenere due rette e un punto esterno ad esse, si deve avere $\gamma \subset q$. In altri termini, *ogni piano soddisfacente la (40) è interamente contenuto nella quadrica*. Poiché infine ogni retta per P è contenuta in qualche piano γ soddisfacente la (40), si arriva all'assurdo che tutto lo spazio proiettivo è contenuto in q . c.v.d.

Proposizione 4.3. *Una quadrica contiene un piano se e soltanto se è un piano doppio oppure è riducibile.*

Dimostrazione Ovviamente, se una quadrica contiene un piano doppio oppure è riducibile allora contiene almeno un piano.

Viceversa dobbiamo fare vedere che se la quadrica q non è un piano doppio allora è riducibile. Sia π un piano contenuto in q . Se q non è un piano doppio allora esiste un punto $P \in q$, $P \notin \pi$. Si può assumere che P sia semplice (perché?). Sia π_P il piano tangente a q in P . Le rette per P in π_P non potendo essere tangenti a q in P , in quanto incontrano il piano π in un punto distinto da P , sono tutte contenute in q . Pertanto $\pi_P \subset q$ e per la proposizione precedente $q = \pi_P \cup \pi$ ossia è riducibile.

4.2. Natura dei punti semplici.

Osservazione 4.4. *Se P è un punto semplice di una quadrica non riducibile q allora ci possono essere al più due rette della quadrica passanti per P , entrambe contenute nel piano tangente $Tg(q, P)$.*

Definizione 4.5. Sia P un punto semplice di una quadrica. Diremo che P è un *punto parabolico* se $Tg(q, P)$, il piano tangente alla quadrica in P , incontra la quadrica in una retta doppia. Altrimenti diremo che il punto è *non parabolico*.

Teorema 4.6. *Una quadrica contiene un punto parabolico se e soltanto se è un cono di vertice un punto. In tal caso tutti i punti semplici della quadrica sono parabolici.*

Dimostrazione. Dimostriamo prima che tutti i punti semplici di un cono sono parabolici. Sia P un punto semplice di un cono e sia $Tg(q, P)$ il piano tangente alla quadrica in P . Il sottospazio $Tg(q, P)$ deve contenere la generatrice del cono passante per P quindi anche il vertice del cono P_0 . Pertanto, la conica $Tg(q, P) \cap q$ possiede almeno due punti doppi, P e P_0 e deve quindi essere una retta doppia. Quindi P è parabolico.

Viceversa, supponiamo che $P \in q$ sia un punto semplice parabolico. Ovviamente, la quadrica q non può essere né un piano doppio (che non contiene punti semplici) né una quadrica riducibile (perché?). Per concludere la dimostrazione è dunque sufficiente dimostrare che q contiene un

punto doppio e che tutti i punti semplici sono parabolici. Per ipotesi, il piano tangente $Tg(q, P)$ incontra la quadrica in una retta l . Consideriamo un punto $P' \in q$ tale che $P' \notin Tg(q, P)$.

Dimostriamo prima che anche P' è semplice e parabolico. Se così non fosse, troverei un piano $\pi_{P'}$ passante per P' e tale che l'intersezione $\pi_{P'} \cap q$ sia una conica riducibile: $\pi_{P'} \cap q = l' \cup l''$, ($l' \cap l'' = \{P'\}$) (ricordare l'Osservazione 4.1). Consideriamo i punti di intersezione, rispettivamente di l' e l'' con il piano tangente in P :

$$\{A\} := l' \cap Tg(q, P) \subset l = q \cap Tg(q, P), \quad \{B\} := l'' \cap Tg(q, P) \subset l = q \cap Tg(q, P).$$

Poiché A e B sono distinti, il piano contenente A , B e P' avrebbe in comune con la quadrica le rette l , l' e l'' e sarebbe quindi interamente contenuto nella quadrica. Ciò è assurdo in quanto, per la Proposizione 4.3, la quadrica sarebbe piano doppio oppure una quadrica riducibile, in contraddizione con quanto visto sopra. Quindi P' è semplice e parabolico.

Abbiamo quindi dimostrato che ogni punto della quadrica non appartenente a $Tg(q, P)$ è semplice e parabolico e, scambiando il ruolo di P e P' , che *tutti i punti della quadrica non appartenenti a $Tg(q, P) \cap Tg(q, P')$ sono semplici e parabolici*. La retta $s := Tg(q, P') \cap q$ interseca l in un punto P_0 , in quanto

$$\emptyset \neq Tg(q, P') \cap l \subseteq Tg(q, P') \cap q = s.$$

Rimane quindi escluso dalla discussione precedente il solo punto P_0 e, per concludere, è sufficiente dimostrare che è un punto doppio (si osservi che $\{P_0\} = l \cap s = Tg(q, P) \cap Tg(q, P') \cap q$). Consideriamo un qualunque punto \bar{P} della quadrica non appartenente al piano generato dalle rette l e s . Anche \bar{P} è semplice e parabolico quindi ci sarà una ulteriore retta r passante per \bar{P} e contenuta in q che, come s , dovrà incontrare l . Poiché, infine, l'unico possibile punto di intersezione tra r e l è P_0 , troviamo che per P_0 passano tre rette della quadrica non complanari (le rette l , s e r), quindi P_0 è doppio. c.v.d.

4.3. Schiere di rette su una quadrica non degenera. Sia $q \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3$ una quadrica non degenera e sia $P \in q$. Per il Teorema 4.6, P è non parabolico quindi $Tg(q, P)$ interseca q in due rette distinte l_P e s_P , contenenti P .

Teorema 4.7. *Fissiamo due punti distinti $P, P' \in Q$ e poniamo $q \cap Tg(q, P) = l_P \cup s_P$ e $q \cap Tg(q, P') = l_{P'} \cup s_{P'}$.*

- (1) *Se $P' \notin Tg(q, P)$ allora $l_{P'}$ e $s_{P'}$ incontrano l'unione $l_P \cup s_P$ in due punti appartenenti a rette diverse.*
- (2) *Se $P' \in l_P$ allora possiamo assumere $l_P = l_{P'}$ e le due rette s_P e $s_{P'}$ sono sghembe.*
- (3) *Se $P' \in s_P$ allora possiamo assumere $s_P = s_{P'}$ e le due rette l_P e $l_{P'}$ sono sghembe.*

Dimostrazione. 1) Le due rette $l_{P'}$ e $s_{P'}$ devono intersecare $Tg(q, P)$ in due punti $A, B \in l_P \cup s_P = q \cap Tg(q, P)$. Intanto A e B devono essere distinti, altrimenti coinciderebbero con P' , che è l'unico punto in comune di $l_{P'}$ e $s_{P'}$, ma noi abbiamo assunto che $P' \notin Tg(q, P)$. Per lo stesso motivo abbiamo anche $A \neq P'$ e $B \neq P'$. Inoltre, A e B non possono appartenere entrambi a l_P (s_P), altrimenti il piano contenente A, B e P' avrebbe le tre rette $l_P, l_{P'}$ e $s_{P'}$ ($s_P, l_{P'}$ e $s_{P'}$) in comune con q , e sarebbe quindi interamente contenuto in q . Per la Proposizione 4.3 la quadrica sarebbe degenerare.

2) In caso contrario, il piano contenente s_P e $s_{P'}$ conterrebbe anche l_P (dovendo contenere sia P che P') e avrebbe in comune tre rette con q .

3) In caso contrario, il piano contenente l_P e $l_{P'}$ conterrebbe anche s_P (dovendo contenere sia P che P') e avrebbe in comune tre rette con q .

Osservazione 4.8. Fissiamo un punto $P \in q$. Il Teorema 4.7 ha le seguenti conseguenze:

- (1) Per ogni punto $P' \in q, P \neq P'$ esiste un'unica retta, che convenzionalmente indichiamo con $l_{P'}$, passante per P' e incidente s_P ;
- (2) tali rette sono in corrispondenza biunivoca con i punti di s_P e sono sghembe due a due.

Pertanto, avremo una partizione della quadrica in rette sghembe due a due:

$$q = \bigcup_{P' \in s_P} l_{P'}.$$

Ovviamente, in tutto quanto appena detto possiamo scambiare s_P con l_P per trovare una seconda partizione $q = \bigcup_{P' \in l_P} s_{P'}$. In questo modo abbiamo "etichettato" le due rette passanti per ogni punto della quadrica.

Notazione 4.9. Naturalmente, le rette l_P che s_P rappresentano due sottospazi proiettivi di dimensione 1 in $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3$ e si possono identificare, fissando un opportuno sistema di coordinate con $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$. Analogamente, il prodotto cartesiano $l_P \times s_P$ si può identificare con $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$.

Teorema 4.10 (Parametrizzazione di una quadrica proiettiva). *La seguente applicazione è una biiezione:*

$$\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1 \longrightarrow q, \quad (P', P'') \longrightarrow l_{P'} \cap s_{P''}.$$

Dimostrazione. Fissiamo $P' \notin l_P$, Per il Teorema 4.7, le rette l_P e $l_{P'}$ sono sghembe e

$$s_Q \cap l_P \neq \emptyset, \quad \forall Q \in l_{P'},$$

e inoltre

$$Q \neq Q' \in l_{P'} \Rightarrow s_Q \cap l_P \neq s_{Q'} \cap l_P.$$

Poiché in tutto ciò possiamo scambiare P e P' , troviamo che due rette distinte l_P e $l_{P'}$ sono messe in corrispondenza biunivoca dalla partizione $q = \bigcup_{P' \in l_P} s_{P'}$. Ovviamente vale anche che due rette distinte s_P e $s_{P'}$ sono messe in corrispondenza biunivoca dalla partizione $q = \bigcup_{P' \in s_P} l_{P'}$.

Questo dimostra che l'applicazione definita nell'enunciato è ben definita ed iniettiva. La suriettività segue ancora dal Teorema 4.7. c.v.d.

5. QUADRICHE IRRIDUCIBILI NELLO SPAZIO AFFINE REALE

Fissiamo un sistema di coordinate nello spazio affine $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^3$. Una quadrica q_0 nello spazio affine è il luogo degli zeri di un'equazione della forma seguente:

$$(41) \quad a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}y_3^2 + 2a_{12}y_1y_2 + 2a_{13}y_1y_3 + 2a_{23}y_2y_3 + 2a_{01}y_1 + 2a_{02}y_2 + 2a_{03}y_3 + a_{00} = 0,$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Analogamente a quanto fatto per le coniche, completiamo tale luogo geometrico con i punti impropri e consideriamo la forma "omogeneizzata" dell'equazione precedente:

$$(42) \quad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{03}x_0x_3 + a_{00}x_0^2 = 0.$$

L'equazione (42), rappresenta una quadrica q in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ che chiameremo *completamento proiettivo* della quadrica (41). Possiamo quindi considerare la quadrica (41) come *l'insieme dei punti propri della quadrica proiettiva definita dalla (42)*. Inoltre, sempre in analogia con il caso delle coniche e poiché $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, possiamo considerare la (42) come l'equazione di una quadrica $q_{\mathbb{C}}$ in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, che chiameremo *completamento proiettivo complesso*, di cui q costituisce *l'insieme dei punti reali*.

Affrontiamo quindi lo studio delle quadriche nello spazio affine associandole sempre ai corrispondenti completamenti. Per evitare troppe ripetizioni scontate, ci limiteremo ai casi in cui il rango della matrice associata alla (42) sia almeno 3, escludendo così i piani doppi e le quadriche riducibili.

5.1. Coni e cilindri. Se una quadrica (42) di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ è degenere, per le scelte fatte deve avere un solo punto doppio P_0 , che dev'essere reale. Se P_0 è un punto proprio diremo che la quadrica è un *cono*, se P_0 è un punto improprio, diremo che la quadrica è un *cilindro*.

1) *Coni.* Una quadrica è un cono se e soltanto se la matrice associata A verifica le seguenti condizioni

$$rgA = rgA_{00} = 3,$$

(quindi il determinante di A_{00} è diverso da zero e i suoi autovalori sono non nulli). Per l'Osservazione 2.24, ogni piano non contenente P_0 interseca la quadrica in una conica non degenere. In particolare, questo deve valere anche per il piano improprio π_{∞} . Quindi, la *conica all'infinito* $\Gamma_{\infty} := q \cap \pi_{\infty}$ è una conica non degenere e si possono distinguere due casi, a seconda che Γ_{∞} abbia o non abbia punti reali:

- Γ_∞ ha punti reali. In questo caso la quadrica si dice *cono reale* e non sono verificate contemporaneamente le due disuguaglianze

$$(43) \quad a_{11} | A_{00} | > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

Per quanto visto nel §3, questo caso è caratterizzato dal fatto che gli autovalori di A_{00} sono *non nulli e con segno discordi*. Ogni generatrice della quadrica passante per Γ_∞ dà luogo ad una retta reale contenuta in q . Viceversa, ogni punto semplice della quadrica appartiene ad una generatrice reale passante per Γ_∞ .

- Γ_∞ non ha punti reali. In questo caso la quadrica si dice *cono immaginario* e sono verificate contemporaneamente le due disuguaglianze (43). Per quanto visto nel §3, questo caso è caratterizzato dal fatto che gli autovalori di A_{00} sono *non nulli e con segno concorde*. La quadrica è priva di punti reali eccetto il vertice P_0 . Infatti, se q contenesse un punto distinto da P_0 , questo dovrebbe appartenere ad una generatrice reale passante per Γ_∞ , in contraddizione con l'ipotesi che Γ_∞ sia priva di punti reali.

Osservazione 5.1. *Intersecando un cono reale con un piano proprio π , non contenente P_0 , si può ottenere una iperbole (se π interseca Γ_∞ in due punti reali), una parabola (se π interseca Γ_∞ in un solo punto reale) o una ellisse (se π interseca Γ_∞ in due punti immaginari).*

Esempio 5.2. *Intersecando il cono reale di equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ con il piano di equazione $y = 1$ si ottiene una iperbole; intersecandolo con il piano di equazione $x = z + 1$ si ottiene una parabola e intersecandolo con il piano di equazione $z = 1$ si ottiene una ellisse.*

2) *Cilindri.* Una quadrica è un cilindro se e soltanto se la matrice associata A verifica le seguenti condizioni

$$rgA = 3, \quad 1 \leq rgA_{00} \leq 2.$$

La conica all'infinito Γ_∞ è dunque degenere e si possono distinguere tre casi, a seconda che Γ_∞ sia riducibile in due rette reali, sia riducibile in due rette immaginarie coniugate o sia una retta doppia:

- Γ_∞ è riducibile in due rette reali. In questo caso la quadrica si dice *cilindro iperbolico*. Per quanto visto nel §3, questo caso è caratterizzato dal fatto che A_{00} ha due autovalori non nulli di segno discordi. Ogni piano π non contenente P_0 incontra Γ_∞ in due punti reali distinti. Pertanto, la conica $\pi \cap q$ è un'iperbole.
- Γ_∞ è riducibile in due rette immaginarie coniugate. In questo caso la quadrica si dice *cilindro ellittico*. Sempre per quanto visto nel §3, A_{00} ha due autovalori non nulli di segno concorde. Ogni piano π non contenente P_0 incontra Γ_∞ in due punti immaginari coniugati. Pertanto, la conica $\pi \cap q$ è un'ellisse, che può essere reale (*cilindro ellittico*)

reale) o immaginaria (*cilindro immaginario*). Nel primo (secondo) caso i tre autovalori non nulli di A hanno segno discorde (concorde).

- Γ_∞ è una retta doppia. In questo caso la quadrica si dice *cilindro parabolico* e A_{00} ha rango 1. Ogni piano π non contenente P_0 incontra Γ_∞ in un punto reale. Pertanto, la conica $\pi \cap q$ è una parabola.

5.2. Quadriche non degeneri. In questo paragrafo supporremo che la quadrica sia non degenera, ossia che il determinante della matrice associata sia non nullo.

Lo studio e la classificazione delle quadriche non degeneri si avvalgono di due criteri essenziali, *lo studio della conica all'infinito e la natura dei punti della quadrica*.

- *Studio della conica all'infinito* Γ_∞ , cioè dell'intersezione tra la quadrica e il piano improprio π_∞ . La conica all'infinito può essere:
 - (1) riducibile, in tal caso $|A_{00}| = 0$ e la quadrica si dice *paraboloide*;
 - (2) non degenera a punti reali, in tal caso $|A_{00}| \neq 0$, non sono verificate contemporaneamente le disuguaglianze (43) e la quadrica si dice *iperboloide*. In alternativa, si può dire che i tre autovalori di A_{00} hanno segno discorde (sempre per quanto visto al §3).
 - (3) non degenera e priva di punti reali, in tal caso $|A_{00}| \neq 0$, sono verificate contemporaneamente le disuguaglianze (43) e la quadrica si dice *ellissoide* (oppure i tre autovalori di A_{00} hanno segno concorde).
- *Natura dei punti della quadrica*. Per il Teorema 4.6, il piano tangente alla quadrica in un suo punto P non può intersecarla in una retta doppia. Quindi, l'intersezione $Tg(q, P) \cap q$ è una coppia di rette reali o immaginarie. Nel primo caso diremo che la quadrica è a punti iperbolici, nel secondo diremo che la quadrica è a punti ellittici. Verificheremo nel prossimo paragrafo che la natura dei punti della quadrica dipende solo dal segno di $|A|$. Più precisamente, la quadrica è a punti iperbolici se $|A| > 0$ ed è a punti ellittici se $|A| < 0$.

Proposizione 5.3. *Se un punto di una quadrica non degenera è iperbolico allora tutti i suoi punti lo sono.*

Dimostrazione. Sia P un punto iperbolico e siano l e r le due rette distinte contenute nell'intersezione tra la quadrica e il piano tangente in P . Ovviamente, ogni punto appartenente alle due rette è iperbolico (perché?). Sia P' un punto della quadrica non contenuto in $l \cup r$. Il piano contenente $P' \cup l$ incontra necessariamente la quadrica in una conica riducibile reale passante per P' , quindi P' è contenuto in una retta reale della quadrica ed è necessariamente iperbolico. c.v.d.

5.3. Ellissoidi. Per prima cosa osserviamo che *un ellissoide non può avere alcun punto reale iperbolico*. Infatti, le due rette reali passanti per un punto iperbolico devono incontrare il piano all'infinito e i punti di intersezione devono appartenere a Γ_∞ . Ma un ellissoide ha la conica all'infinito priva di punti reali. Pertanto, *se un ellissoide possiede un punto reale, questo dev'essere ellittico e, per quanto detto nel paragrafo precedente, si deve avere $|A| < 0$* . Possiamo quindi distinguere due casi:

- *ellissoide a punti reali*: è caratterizzato dalle seguenti condizioni:

$$a_{11} |A_{00}| > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \quad |A| < 0.$$

Equivalentemente, *gli autovalori di A sono non nulli e di segno discorde mentre quelli di A_{00} sono di segno concorde*.

- *ellissoide immaginario*: è caratterizzato dalle seguenti condizioni:

$$a_{11} |A_{00}| > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \quad |A| > 0.$$

Equivalentemente, *gli autovalori di A sono non nulli e di segno concorde*.

5.4. Iperboloidi. Anche per gli iperboloidi abbiamo due casi:

- *iperboloide a punti ellittici o iperboloide a due falde*: è caratterizzato dal fatto che le disuguaglianze (43) non sono entrambe verificate e $|A| < 0$. Equivalentemente, *gli autovalori di A_{00} sono di segno discorde e $|A| < 0$* .
- *iperboloide a punti iperbolici o iperboloide ad una falda*: è caratterizzato dal fatto che le disuguaglianze (43) non sono entrambe verificate e $|A| > 0$. Equivalentemente, *gli autovalori di A_{00} sono di segno discorde e $|A| > 0$* .

5.5. Paraboloidi. Tra le quadriche non degeneri, i paraboloidi sono caratterizzati dal fatto che il rango di A_{00} è pari a 2 in quanto Γ_∞ è riducibile. Detto questo, abbiamo due casi che dipendono solo dal segno di $|A|$ o dal fatto che la conica all'infinito sia reale o immaginaria.

- *paraboloide a punti ellittici*: è caratterizzato dalle seguenti condizioni:

$$|A| < 0, \quad \text{rg}A_{00} = 2.$$

Equivalentemente, $|A| \neq 0$ e A_{00} ha due autovalori non nulli di segno concorde.

- *paraboloide a punti iperbolici o sella*: è caratterizzato dalle seguenti condizioni:

$$|A| > 0, \quad \text{rg}A_{00} = 2.$$

Equivalentemente, $|A| \neq 0$ e A_{00} ha due autovalori non nulli di segno discorde.

6. FORMA CANONICA DELLE QUADRICHE IRRIDUCIBILI NELLO SPAZIO AFFINE REALE

Iniziamo osservando che la matrice A_{00} , essendo simmetrica e reale, definisce un endomorfismo simmetrico di \mathbb{R}^3 . Per il Teorema della base spettrale, tale endomorfismo ammette una base ortonormale di autovettori. Esiste dunque una matrice $M = (m_{ij})$ ortogonale, tale cioè che $MM^t = M^tM = I_3$, che diagonalizza A_{00} :

$$\text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = M^t A_{00} M,$$

(la matrice M ha per colonne una base ortonormale di autovettori per l'endomorfismo associato ad A_{00}).

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

E' immediato verificare che, nelle nuove coordinate, la quadrica assume la forma seguente

$$(44) \quad \lambda_1(y'_1)^2 + \lambda_2(y'_2)^2 + \lambda_3(y'_3)^2 + 2\alpha_1 y'_1 + 2\alpha_2 y'_2 + 2\alpha_3 y'_3 + k = 0,$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e k sono opportuni coefficienti reali.

Osservazione 6.1. • Se $\lambda_i \neq 0$, allora nell'espressione precedente possiamo "riassorbire" il termine lineare $2\alpha_i y'_i$ con un ulteriore cambio di coordinate

$$\lambda_i(y'_i)^2 + 2\alpha_i y'_i = \lambda_i z_i^2 - \frac{\alpha_i^2}{\lambda_i}, \quad z_i := y'_i + \frac{\alpha_i}{\lambda_i}.$$

- Il fatto che la matrice M appena introdotta sia ortogonale, implica che l'isomorfismo ad essa associato sia una isometria, cioè un'applicazione che conserva le lunghezze dei vettori:

$$\|MY\|^2 = (MY)^t MY = Y^t M^t MY = Y^t Y = \|Y\|^2.$$

Quindi le forme canoniche che studieremo in questo paragrafo si ottengono attraverso una trasformazione rigida dello spazio affine, cioè di una funzione che non modifica le distanze tra i punti.

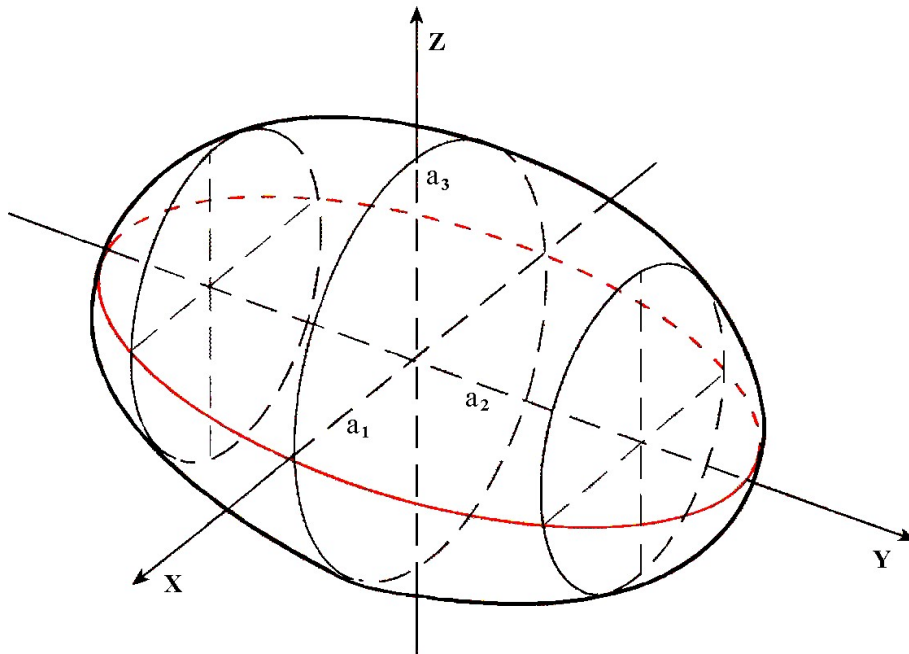
Possiamo ora determinare la forma canonica delle quadriche classificate nei paragrafi precedenti in base al numero di autovalori non nulli e al loro segno.

6.1. A_{00} **ha autovalori non nulli e di segno concorde.** Possiamo assumere i tre autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ strettamente positivi. In base all'Osservazione 6.1, con un'opportuna traslazione possiamo riassorbire tutti i termini lineari della (44). L'equazione della quadrica assumerà quindi l'espressione seguente

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 = h, \quad \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$$

per un'opportuna costante $h \in \mathbb{R}$. Si presentano dunque tre possibilità:

- (1) ($h > 0$): in questo caso $|A| < 0$ e la quadrica è un ellissoide a punti reali (cfr. §5.3);
- (2) ($h < 0$): in questo caso $|A| > 0$ e la quadrica è un ellissoide immaginario (cfr. §5.3);
- (3) ($h = 0$): in questo caso $|A| = 0$ e la quadrica è un cono immaginario (cfr. §5.1).



Ellissoide di equazione $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2} = 1$, con $a_1 > 0, a_2 > 0$ e $a_3 > 0$.

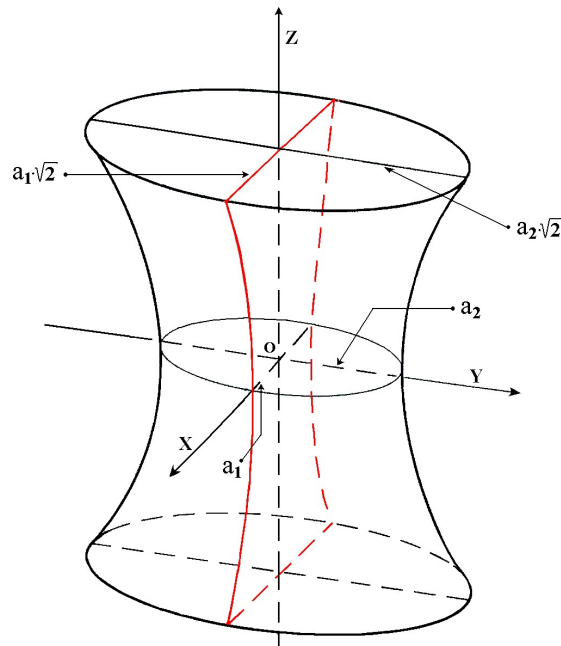
6.2. A_{00} **ha autovalori non nulli e di segno discorde.** Possiamo assumere $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 < 0$. In base all'Osservazione 6.1, con un'opportuna traslazione possiamo riassorbire tutti i termini lineari della (44). L'equazione della quadrica assumerà quindi l'espressione seguente

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 = h, \quad \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$$

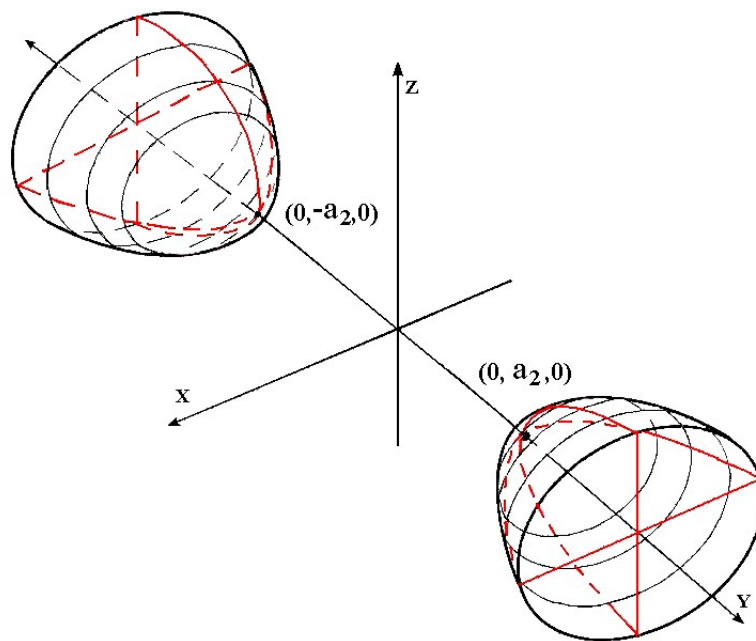
per un'opportuna costante $h \in \mathbb{R}$. Anche in questo caso, si presentano dunque tre possibilità:

- (1) ($h > 0$): in questo caso $|A| > 0$ e la quadrica è un iperboloide a punti iperbolici (cfr. §5.4);

- (2) ($h < 0$): in questo caso $|A| < 0$ e la quadrica è un iperboloide a punti ellittici (cfr. §5.4);
- (3) ($h = 0$): in questo caso $|A| = 0$ e la quadrica è un cono reale (cfr. §5.1).



Iperboloide di equazione $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{z^2}{a_3^2} = 1$, con $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ e $a_3 > 0$.



Iperboloide di equazione $-\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} - \frac{z^2}{a_3} = 1$, con $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ e $a_3 > 0$.

6.3. A_{00} ha due autovalori non nulli di segno concorde. Possiamo assumere $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 = 0$. In base all'Osservazione 6.1, con un'opportuna traslazione possiamo riassorbire due termini lineari della (44). L'equazione della quadrica assumerà quindi l'espressione seguente

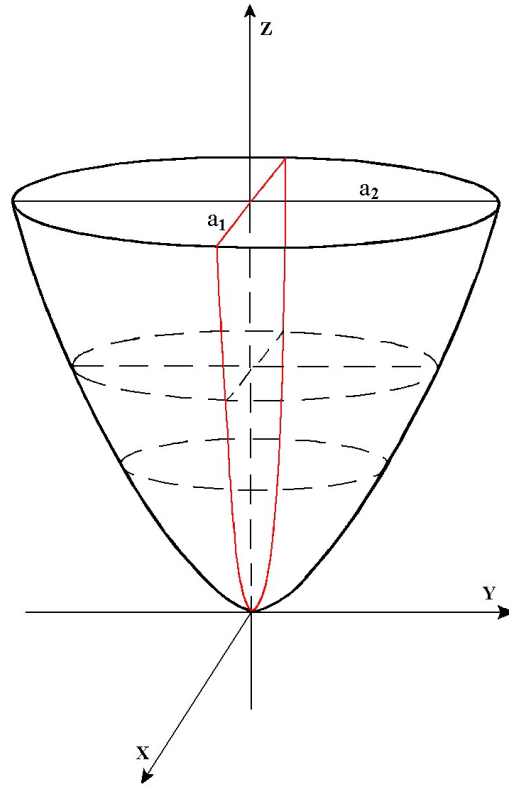
$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + 2\alpha_3 y'_3 = h, \quad \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0,$$

per un'opportuna costante $h \in \mathbb{R}$. Osserviamo che, poiché $rgA \geq 3$, i due scalari α_3 e h non possono essere entrambi nulli.

Se $\alpha_3 \neq 0$, possiamo porre $z_3 := y'_3 - \frac{h}{2\alpha_3}$, e troviamo l'equazione

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + 2\alpha_3 z_3 = 0, \quad \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0.$$

In questo caso $|A| < 0$ e la quadrica è un paraboloido a punti ellittici (cfr. §5.5).



Paraboloide di equazione $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - 2z = 0$, con $a_1 > 0$ e $a_2 > 0$.

Se $\alpha_3 = 0$, avremo $h \neq 0$ e si presentano due possibilità

- (1) ($h > 0$): in questo caso la quadrica è un cilindro ellittico reale (cfr. §5.1);
- (2) ($h < 0$): in questo caso la quadrica è un cilindro immaginario (cfr. §5.1).

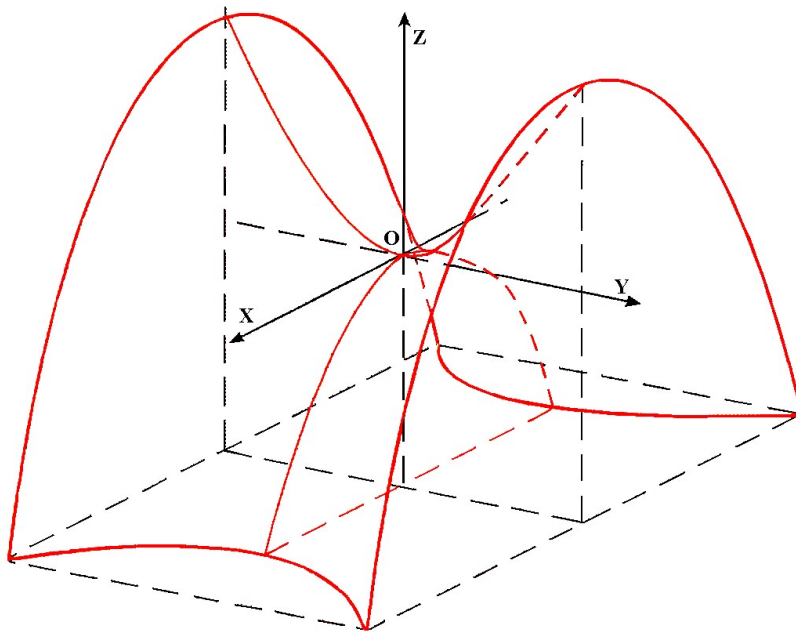
6.4. A_{00} ha due autovalori non nulli di segno discorde. Possiamo assumere $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ e $\lambda_3 = 0$. Come nel caso precedente, l'equazione della quadrica assumerà quindi l'espressione seguente

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + 2\alpha_3 y_3' = h, \quad \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0.$$

Se $\alpha_3 \neq 0$, possiamo porre $z_3 := y_3' - \frac{h}{2\alpha_3}$, e troviamo l'equazione

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + 2\alpha_3 z_3 = 0, \quad \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0.$$

In questo caso $|A| > 0$ e la quadrica è un paraboloide a punti iperbolici (cfr. §5.5).



Paraboloide di equazione $\frac{x^2}{a_1} - \frac{y^2}{a_2} - 2z = 0$, con $a_1 > 0$ e $a_2 > 0$.

Se $\alpha_3 = 0$, avremo $h \neq 0$ e la quadrica è un cilindro iperbolico (cfr. §5.1).

6.5. A_{00} ha un solo autovalore non nullo. L'equazione della quadrica assumerà quindi l'espressione seguente

$$\lambda_1 z_1^2 + 2\alpha_2 y_2' + 2\alpha_3 y_3' = h.$$

Poiché $rgA \geq 3$, i due scalari α_2 e α_3 non possono essere entrambi nulli.

Non è difficile dimostrare che, con un'opportuna rotazione nelle coordinate y_2', y_3' l'equazione può sempre essere posta nella forma

$$\lambda_1 z_1^2 + z_2 = 0.$$

In questo caso, la quadrica è un cilindro parabolico (cfr. §5.1).