

Prova scritta Elettromagnetismo e Ottica – 23/07/2020 – Quesiti brevi

Proff. Giovanni La Rana & Raffaele Velotta. Punti: 1 a quesito, 6 punti in totale. Le risposte e le loro brevi derivazioni devono essere incluse negli appositi riquadri.

NOME e COGNOME:

1) Calcolare la densità di carica presente in una regione nella quale il campo elettrico è dato da $\mathbf{E} = Cr\hat{\mathbf{r}}$ (C , costante).

$$\left[\text{memo: } \text{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial(\sin(\vartheta) A_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial(A_\varphi)}{\partial \varphi} \right]$$

2) Il conduttore metallico in figura possiede una carica totale $Q = 100 \mu\text{C}$. Assumendo che il conduttore sia isolato nel vuoto, disegnare una crocetta sul punto della superficie del conduttore in cui il campo elettrico presente in prossimità della superficie è più intenso.



3) In una resistenza $R = 100 \Omega$ scorre una corrente $i = 0.5 \text{ A}$. Quanta energia viene dissipata in 10 s?

4) Il potenziale vettore in una regione di spazio è dato da $\mathbf{A} = (3y, -2x, y) \text{ T.m}$. Calcolare le tre componenti del campo magnetico \mathbf{B} .

5) Scrivere le equazioni di Maxwell nella materia nel caso non stazionario.

6) Un'onda elettromagnetica piana nel vuoto ha un campo elettrico massimo pari a 9 V/m , in modulo. Calcolare il valore massimo del modulo del campo magnetico \mathbf{B} dell'onda.

Prova scritta Elettromagnetismo e Ottica – 23/07/2020

Corso di Laurea in Fisica – Proff. Giovanni La Rana & Raffaele Velotta

1) Una carica $Q_{1a} = 1 \text{ nC}$ viene posta sul conduttore sferico di raggio $R_{1a} = 1 \text{ cm}$ indicato nella figura a fianco (condensatore sferico “a”), mentre il conduttore sferico esterno, con raggio interno $R_{2a} = 3 \text{ cm}$ e raggio esterno $R_{3a} = 3.5 \text{ cm}$, è neutro.

(a) Trovare il potenziale dei due conduttori assumendo nullo il potenziale all’infinito.

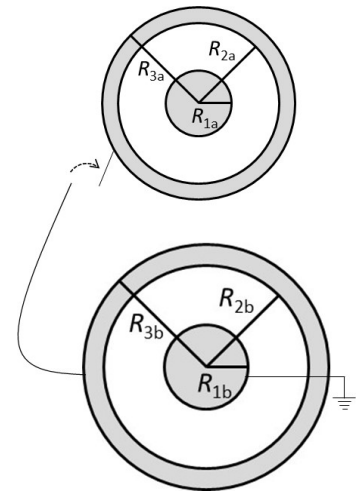
Successivamente, viene chiuso un interruttore che collega il conduttore esterno del primo condensatore (“a”) con quello esterno di un secondo condensatore sferico (“b”) inizialmente scarico, che si trova a distanza $d \gg R_{3a}, R_{3b}$ (v. figura). I tre raggi di “b” sono 1.5 volte quelli di “a”. L’elettrodo interno del secondo condensatore è collegato a terra praticando un piccolo foro sull’elettrodo esterno.

(b) Calcolare il potenziale dei due elettrodi del primo condensatore nella nuova configurazione.

(c) Calcolare la carica Q'_{1b} presente sul conduttore interno del condensatore “b” dopo il collegamento.

(d) Calcolare la variazione di energia elettrostatica del sistema che si ha con la chiusura dell’interruttore.

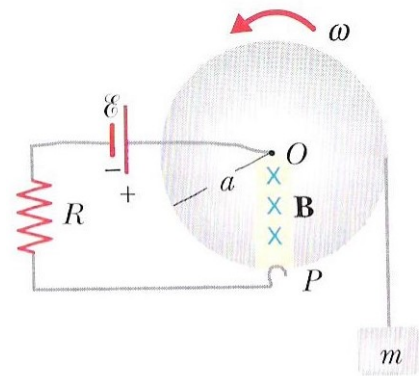
[Punti domande: $a = 3, b = 3, c = 2, d=2$].



2) Un disco conduttore di raggio $a=20 \text{ cm}$ e momento di inerzia trascurabile è vincolato da due perni a ruotare attorno al proprio asse orizzontale. La zona del disco nell’intorno del raggio OP è immersa in un campo magnetico perpendicolare al disco stesso (entrante nel foglio) con $B=0.75 \text{ T}$. Al bordo del disco, tramite un filo sottile, è collegata una massa $m=0.2 \text{ kg}$. Il circuito è collegato ad un generatore di f.e.m. con $\mathcal{E}=10 \text{ V}$, mentre la resistenza complessiva del circuito è $R=0.3 \Omega$. In condizioni di regime il disco ruota con velocità angolare ω costante sollevando la massa. Trovare:

- a) la corrente di regime i che percorre il circuito;
- b) la velocità angolare ω .

[Punti domande: $a = 3, b = 3$]



Memo: Permittività elettrica del vuoto: $\epsilon_0 = 8.9 \text{ pF/m}$; permeabilità magnetica del vuoto: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$.

Nota sulla valutazione: il punteggio del compito parte da una base minima di 8 punti. Il totale dei punti a disposizione è 30.

Soluzione

Esercizio 1

Risposta a.

La carica Q_{1a} sull'elettrodo interno del condensatore sferico induce una carica $-Q_{1a}$ sulla superficie interna dell'elettrodo esterno, il quale, essendo neutro, avrà sulla sua superficie esterna di nuovo una carica Q_{1a} . Pertanto, il campo elettrico per $r > R_{3a}$ sarà $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q_{1a}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$, mentre, indicando con γ una curva che porta dall'infinito a $r = R_{3a}$, il potenziale dell'elettrodo esterno sarà dato da

$$V(R_{3a}) = - \int_{\gamma} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} + V(\infty) = \int_{R_{3a}}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{3a}} = \frac{Q_1}{C_{\infty a}} = 257 \text{ V} \quad (1)$$

dove nell'ultima espressione abbiamo indicato con $C_{\infty a} = 4\pi\epsilon_0 R_{3a} = 3.9 \text{ pF}$ la capacità presente tra la superficie esterna del condensatore e la superficie all'infinito. Nello spazio tra i due conduttori ($R_{1a} < r < R_{2a}$) il campo sarà dato dalla stessa espressione e, quindi, la differenza di potenziale tra i due conduttori sarà data da

$$\Delta V = V(R_{1a}) - V(R_{2a}) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{R_{2a}} + \frac{1}{R_{1a}} \right] = \frac{Q_1}{C_a} = 599 \text{ V} \quad (2)$$

dove abbiamo indicato con

$$C_a = \frac{4\pi\epsilon_0 R_{1a} R_{2a}}{R_{2a} - R_{1a}} = 1.7 \text{ pF} \quad (3)$$

la capacità "interna" del condensatore sferico (a). Poiché $V(R_{2a}) = V(R_{3a})$ abbiamo

$$V(R_{1a}) = V(R_{3a}) + \Delta V = 856 \text{ V.}$$

Risposta b.

Dopo la chiusura dell'interruttore, mentre la carica indotta sulla superficie di interna di raggio R_{2a} resta la stessa, una parte di quella che si trova sulla superficie esterna di raggio R_3 si trasferirà sull'elettrodo interno del secondo condensatore in modo che il potenziale dei due elettrodi collegati sia lo stesso. Indicando con a e b il primo e il secondo condensatore, rispettivamente, e le cariche nel nuovo equilibrio con un apice, avremo (essendo $V_{1b} = 0$)

$$\frac{Q'_{3a}}{C_{\infty a}} = \frac{Q'_{3b}}{C_{\infty b}} \quad (4.1)$$

$$Q'_{3a} + Q'_{3b} = Q_{3a} \equiv Q_{1a} \quad (4.2)$$

Risolviendo il sistema di equazioni (4.1) e (4.2) abbiamo

$$Q'_{3a} = Q_{1a} \frac{C_{\infty a}}{C_{\infty a} + C_{\infty b}} = 0.40 \text{ nC}$$

$$Q'_{3b} = Q_{1a} \frac{C_{\infty b}}{C_{\infty a} + C_{\infty b}} = 0.60 \text{ nC}$$

Il potenziale V'_{3a} dell'elettrodo esterno del condensatore a sarà dato ancora dall'equazione (1) con Q_1 sostituito da Q'_{3a} :

$$V'_{3a} = \frac{Q'_{3a}}{C_{\infty a}} = 103 \text{ V}$$

La differenza di potenziale ΔV interna al condensatore a non cambia, per cui si ha

$$V'_{1a} = V'_{3a} + \Delta V = 702 \text{ V}$$

Risposta c.

La carica sulle armature interne del condensatore è legata alla differenza di potenziale dalla relazione $Q = C(\Delta V)$, che nel nostro caso fornisce

$$Q'_{1b} = C_b(V'_{3b})$$

Tenendo presente che $C_b = 1.5C_a = 2.55 \text{ pF}$ e che $V'_{3b} = V'_{3a} = 103 \text{ V}$, abbiamo

$$Q'_{1b} = 263 \text{ pC}$$

Risposta d.

Prima della chiusura dell'interruttore, abbiamo un contributo all'energia elettrostatica che viene dal campo elettrico racchiuso nel condensatore a pari a

$$U_{a,int} = \frac{Q_1^2}{2C} = 290 \text{ nJ}$$

ed un altro dovuto al campo elettrico esterno al condensatore a che vale

$$U_{a,ext} = \frac{Q_{3a}^2}{8\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{Q_{1a}^2}{2C_{\infty a}} = 130 \text{ nJ} \quad (5)$$

Il primo contributo non è influenzato dalla chiusura dell'interruttore, mentre il secondo contributo diminuisce e, dopo la chiusura, vale

$$U'_{a,ext} = \frac{Q_{3a}'^2}{2C_{\infty a}} = 20.5 \text{ nJ} \quad (6)$$

Nel sistema b non vi è campo elettrico prima della chiusura dell'interruttore, per cui l'energia elettrostatica è nulla. Dopo la chiusura dell'interruttore, abbiamo un contributo interno al condensatore ed uno esterno. Per la parte interna abbiamo

$$U'_{b,int} = \frac{Q_{1b}'^2}{2C_b} = 13.6 \text{ nJ} \quad (7)$$

mentre per la parte esterna, tenendo presente la (5), abbiamo

$$U'_{b,ext} = \frac{Q_{3b}'^2}{2C_{\infty b}} = 30.8 \text{ nJ} \quad (8)$$

Dalle equazioni (5)-(8) otteniamo

$$\Delta U = U'_a + U'_b - (U_a + U_b) = -65 \text{ nJ}$$

Esercizio 2

Risposta a.

La corrente i scorre nel circuito in senso orario e quindi nel tratto OP agisce un momento M_i (uscendo dal foglio) dato da

$$M_i = \int dM_i = \int_0^a r dF = \int_0^a riB dr = \frac{1}{2} iBa^2 \quad (1)$$

In condizioni stazionarie il momento M_i si oppone, equilibrandolo, al momento prodotto dalla forza peso della massa m , che vale mga (diretto *dentro* il foglio), e dunque

$$\frac{1}{2} iBa^2 = mga \quad (2)$$

da cui

$i = \frac{2mg}{Ba} = \frac{2 \times 0.2 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{0.75 \text{ T} \times 0.2 \text{ m}} = 26.2 \text{ A}$	(4)
---	-----

Risposta b.

Tra O e P vi è un campo elettromotore ($\mathbf{E}_{em} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$) diretto da P a O ed un campo elettrostatico di segno opposto e, quindi, il punto O è a potenziale maggiore. Ricordando che $\mathbf{E}_{es} = -\mathbf{E}_{em}$, la ddp sarà data ($d\mathbf{s} = -d\mathbf{r}$)

$$V(O) - V(P) = - \int_{P \rightarrow O} \mathbf{E}_{es} \cdot d\mathbf{s} = \int_{O \rightarrow P} \mathbf{E}_{em} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^R \omega r B dr = \frac{1}{2} \omega B a^2 \quad (5)$$

L'equazione del circuito (II legge di Kirchhoff) è

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_{OP} = \mathcal{E} - \frac{1}{2} \omega B a^2 = Ri \quad (6)$$

dalla quale ricaviamo

$\omega = \frac{2(\mathcal{E} - Ri)}{Ba^2} = 143 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	(7)
---	-----