
Risposta in Frequenza

Problematica

Negli amplificatori elementari abbiamo utilizzato delle reti di resistori per polarizzare l'amplificatore e dei condensatori per sommare le componenti di segnale alla polarizzazione.

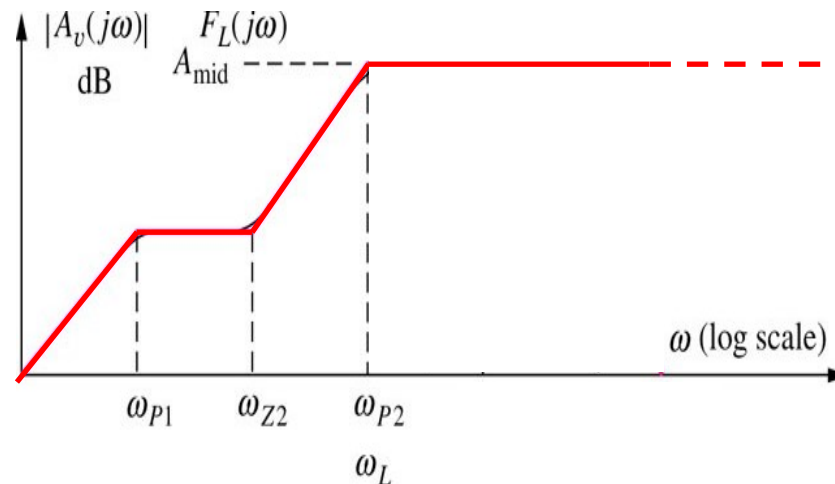
Se il segnale di ingresso ha una frequenza sufficientemente alta, l'impedenza dei condensatori è trascurabile e la loro presenza, nell'analisi delle componenti variabili, può essere trascurata (i condensatori sono sostituito da cortocircuiti nell'analisi a piccoli segnali).

Al decrescere della frequenza del segnale d'ingresso, l'amplificatore comincerà tuttavia a manifestare una riduzione di guadagno a causa della impedenza offerta dai condensatori.

In definitiva, i condensatori di accoppiamento e bypass introducono nella risposta in frequenza un comportamento di tipo **passa – alto limitando il guadagno alle basse frequenze.**

Effetto dei condensatori di accoppiamento e bypass sulla risposta in frequenza

La figura mostra una tipica risposta in bassa frequenza (diagramma dei moduli)

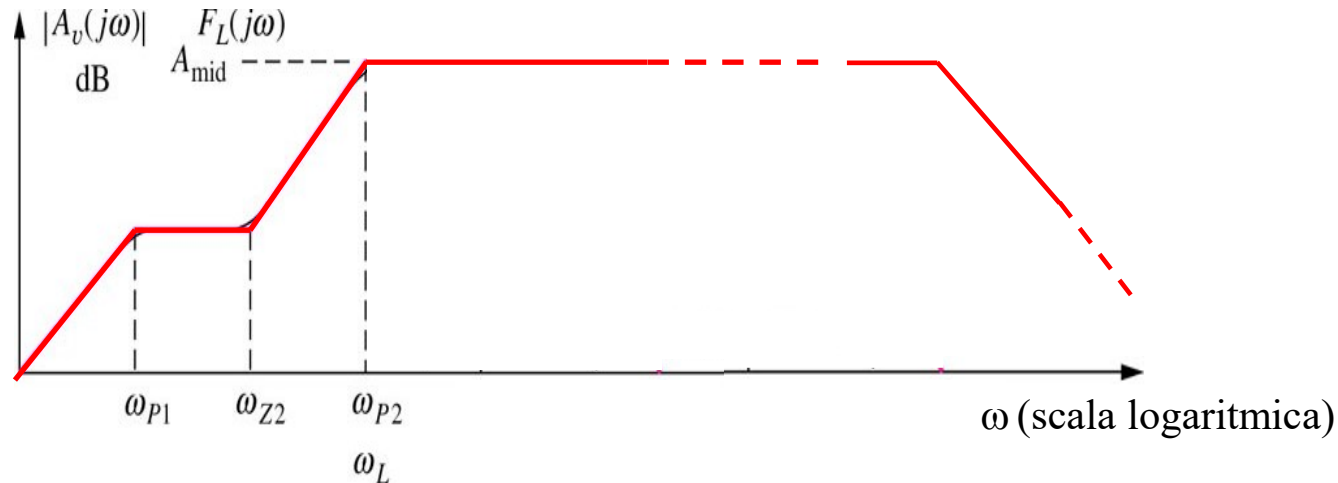


I parametri più importanti sono:

- La pulsazione di taglio inferiore, ω_L
- Il guadagno a centro banda, A_{mid}

Nella zona di centro banda si possono trascurare tutte le capacità (quelle di accoppiamento o bypass possono essere considerate cortocircuiti).

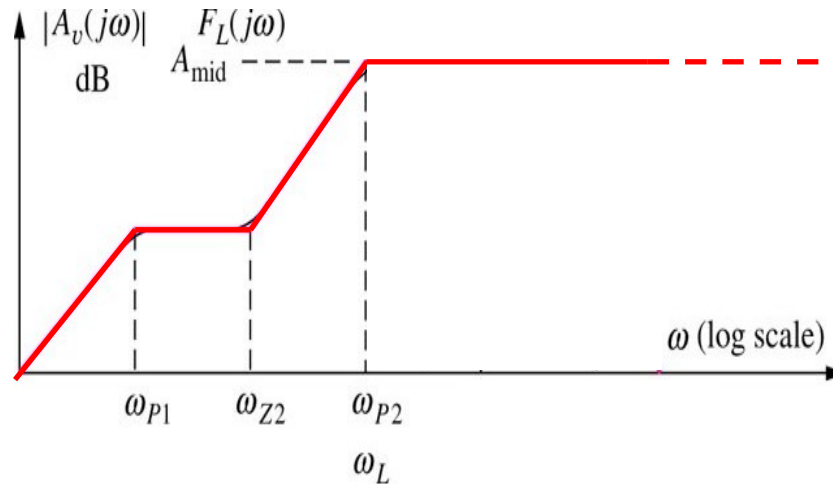
Effetto dei condensatori di accoppiamento e bypass sulla risposta in frequenza



Aumentando sempre di più la frequenza, il guadagno, in realtà, comincia a decrescere. Questo fenomeno è dovuto alle capacità interne dei dispositivi. Ci occuperemo di questo aspetto (risposta in alta frequenza) più avanti.

Risposta in bassa frequenza

Analisi in bassa frequenza

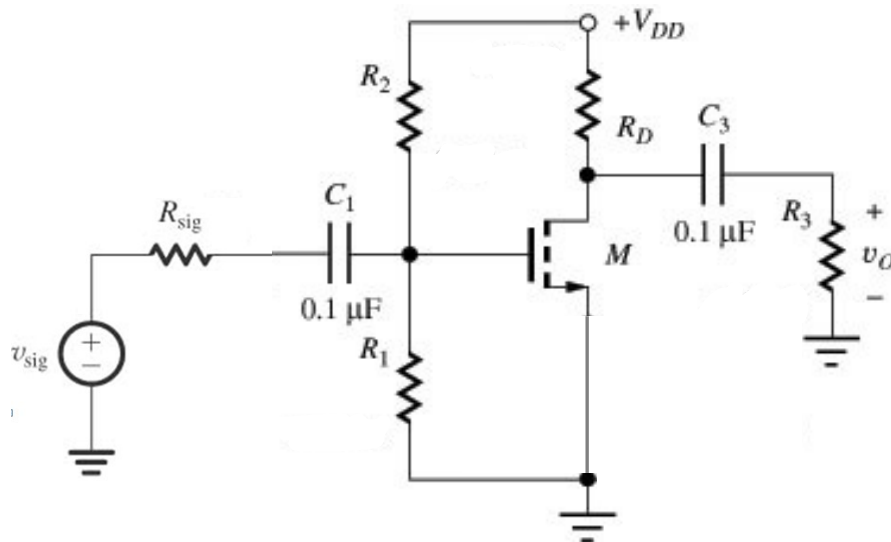


Per studiare la risposta in bassa frequenza dobbiamo considerare l'effetto dei condensatori di accoppiamento e bypass (trascuriamo le capacità interne dei dispositivi)

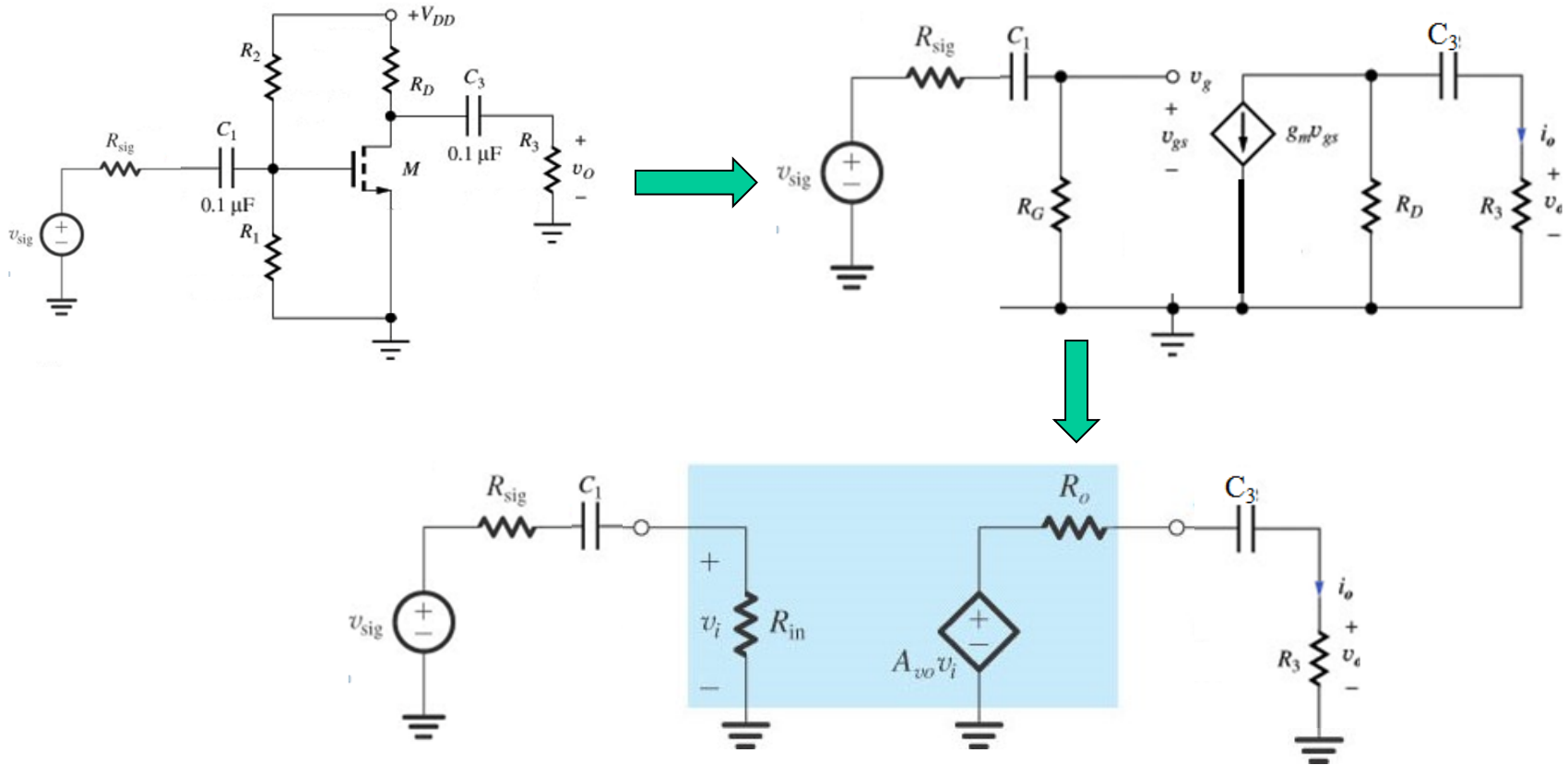
Calcolo della funzione di trasferimento

L'approccio più immediato per studiare la risposta in bassa frequenza del circuito consiste nel determinare la funzione di trasferimento, considerando l'effetto della capacità di bypass ed accoppiamento.

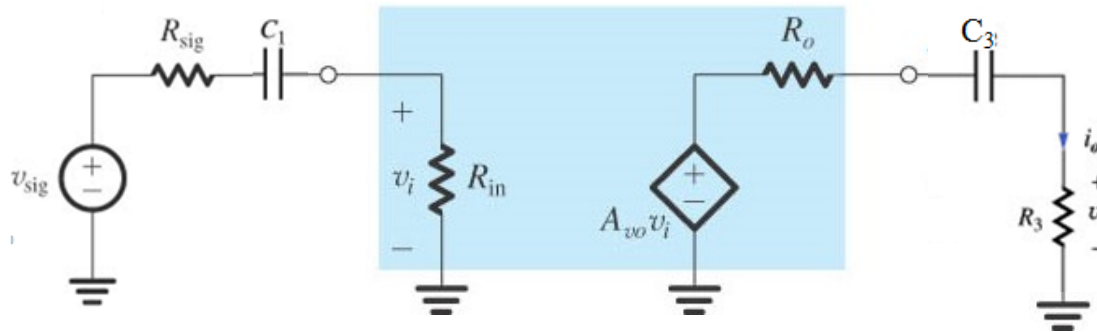
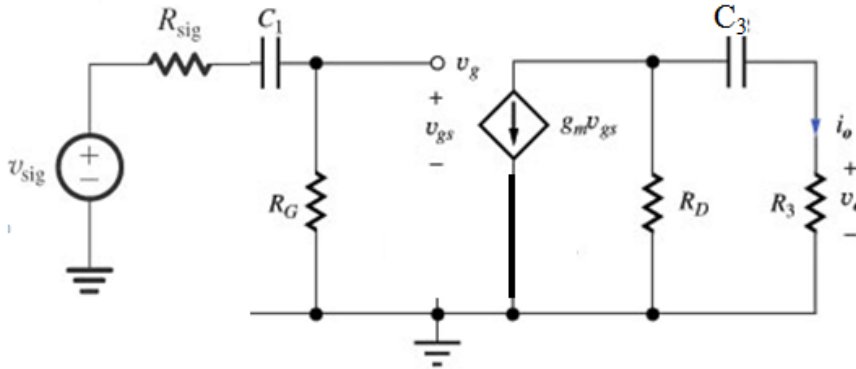
Consideriamo come esempio un amplificatore a source comune in cui, per non appesantire i calcoli, supponiamo che il source sia collegato direttamente a massa.



Amplificatore a source comune



Amplificatore a source comune

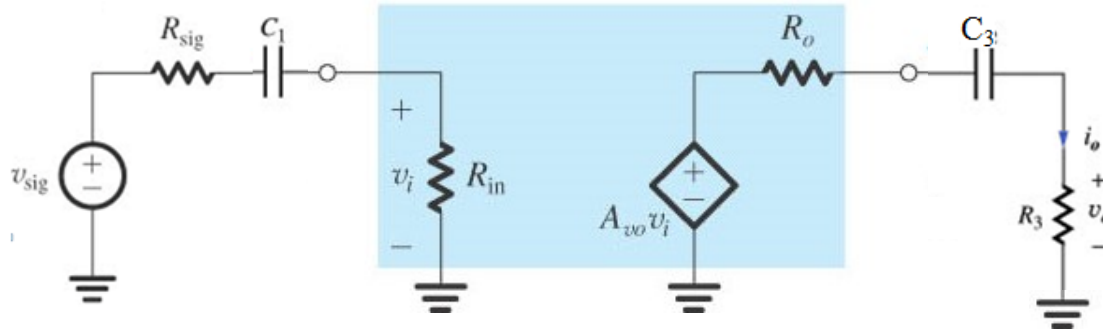


$$R_{in} = R_G$$

$$R_o = R_D$$

$$A_{vo} = -g_m R_D$$

Amplificatore a source comune



$$A_V = A_{vo} \frac{R_{in}}{R_{in} + \left(R_{sig} + \frac{1}{j\omega C_1}\right)} \frac{R_L}{R_L + \left(R_o + \frac{1}{j\omega C_3}\right)}$$

Conviene ora manipolare l'espressione, mettendo in evidenza il guadagno a centro banda, A_{mid} , che è quello che si otterrebbe considerando i condensatori come cortocircuiti:

$$A_{mid} = A_{vo} \frac{R_{in}}{R_{in} + R_{sig}} \frac{R_L}{R_L + R_o}$$

Amplificatore a source comune

$$\begin{aligned} A_V &= A_{vo} \frac{R_{in}}{R_{in} + (R_{sig} + \frac{1}{j\omega C_1})} \frac{R_L}{R_L + (R_o + \frac{1}{j\omega C_3})} = \\ &= A_{vo} \frac{R_{in}}{R_{in} + R_{sig}} \frac{R_L}{R_L + R_o} \frac{R_{in} + R_{sig}}{R_{in} + (R_{sig} + \frac{1}{j\omega C_1})} \frac{R_L + R_o}{R_L + (R_o + \frac{1}{j\omega C_3})} = \\ &= A_{mid} \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega C_1 (R_{in} + R_{sig})}} \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega C_3 (R_L + R_o)}} = \\ &= A_{mid} \frac{j\omega C_1 (R_{in} + R_{sig})}{1 + j\omega C_1 (R_{in} + R_{sig})} \frac{j\omega C_3 (R_L + R_o)}{1 + j\omega C_3 (R_L + R_o)} \end{aligned}$$

Amplificatore a source comune

$$A_V = A_{mid} \frac{j\omega C_1 (R_{in} + R_{sig})}{1 + j\omega C_1 (R_{in} + R_{sig})} \frac{j\omega C_3 (R_L + R_O)}{1 + j\omega C_3 (R_L + R_O)} = A_{mid} F_L(j\omega)$$

$$A_{mid} = A_{vo} \frac{R_{in}}{R_{in} + R_{sig}} \frac{R_L}{R_L + R_O}$$

A_{mid} è il guadagno a centro banda

$$F_L(j\omega) = \frac{j\omega / \omega_1}{1 + j\omega / \omega_1} \frac{j\omega / \omega_2}{1 + j\omega / \omega_2}$$

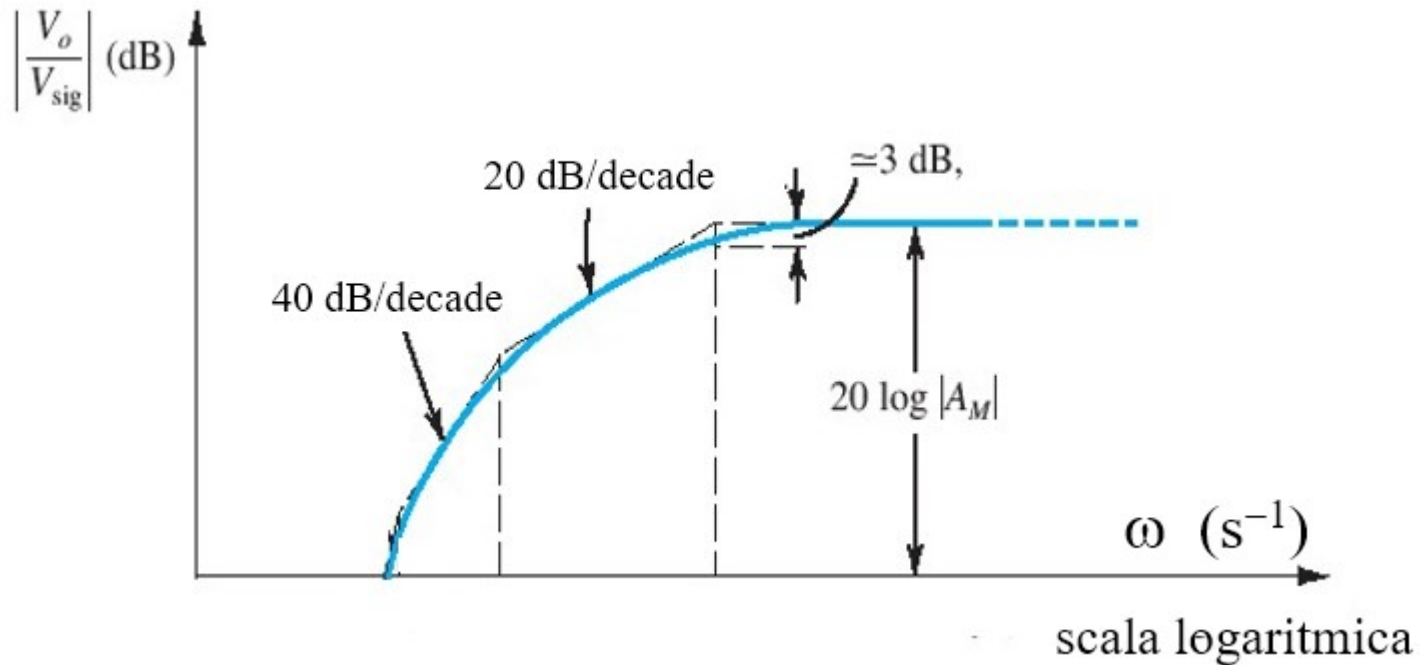
$F_L(j\omega)$ porta in conto la risposta in bassa frequenza

$$\omega_1 = \frac{1}{C_1 (R_{in} + R_{sig})}; \quad \omega_2 = \frac{1}{C_3 (R_L + R_O)}$$

La risposta in frequenza $F_L(j\omega)$ evidenzia due zeri nell'origine e due poli alle pulsazioni ω_1 ed ω_2

Amplificatore a source comune

$$F_L(j\omega) = \frac{j\omega / \omega_1}{1 + j\omega / \omega_1} \frac{j\omega / \omega_2}{1 + j\omega / \omega_2}$$



Metodo delle costanti di tempo in cortocircuito per determinare la frequenza di taglio inferiore

Il metodo delle costanti di tempo in cortocircuito consente di ottenere una stima approssimata della pulsazione di taglio inferiore, ω_L .

La pulsazione di taglio inferiore è approssimata da:

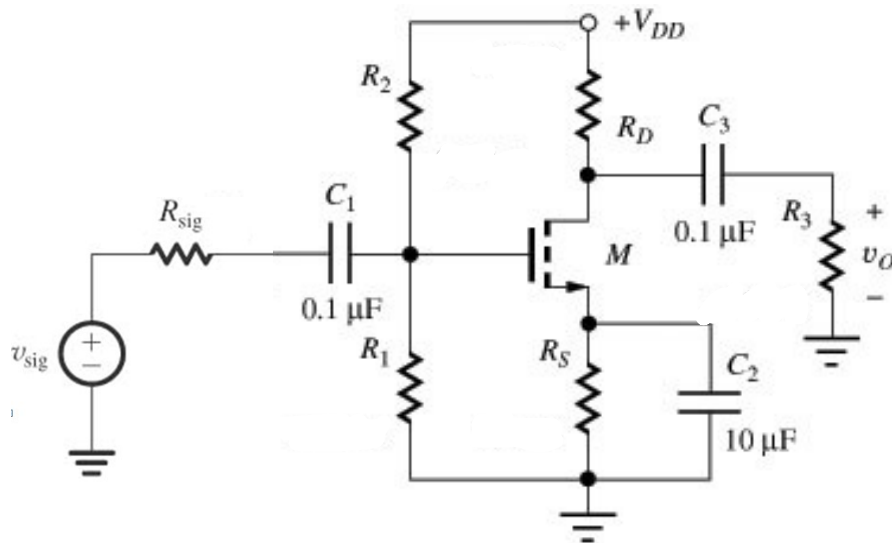
$$\omega_L \approx \sum_i \frac{1}{C_i R_{iS}}$$

dove:

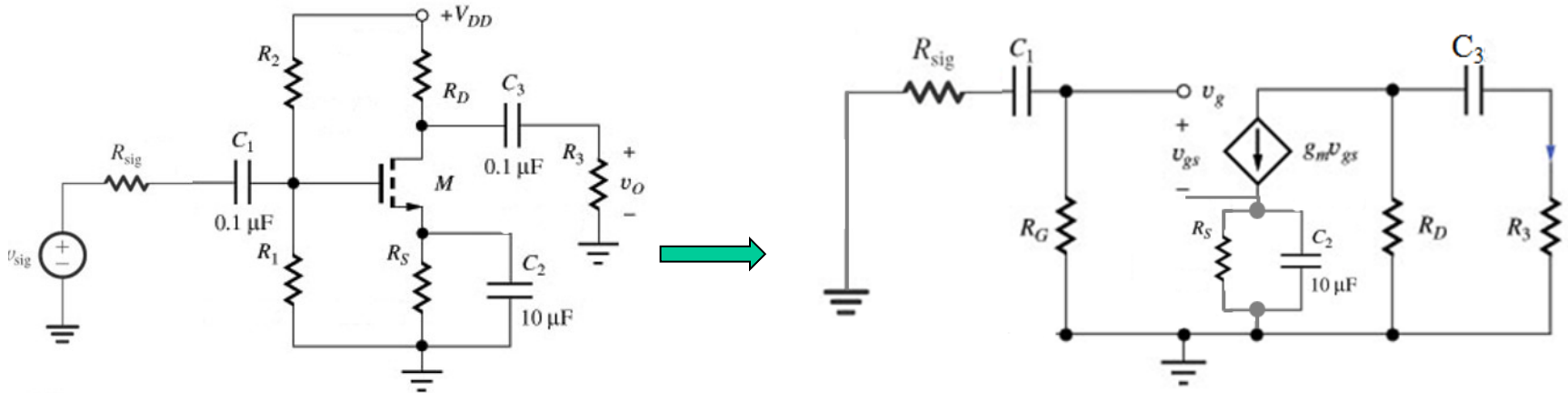
- la somma è estesa a tutte la capacità di accoppiamento e bypass
- R_{iS} è la resistenza “vista” ai capi del condensatore C_i quando tutti gli altri condensatori sono sostituiti da cortocircuiti e tutti i generatori indipendenti sono disattivati (i generatori di tensione cortocircuitati).

Stima di ω_L un amplificatore a source comune

Applichiamo il metodo delle costanti di tempo all'amplificatore a source comune, includendo nell'analisi anche la resistenza R_S ed il condensatore C_2 in figura:

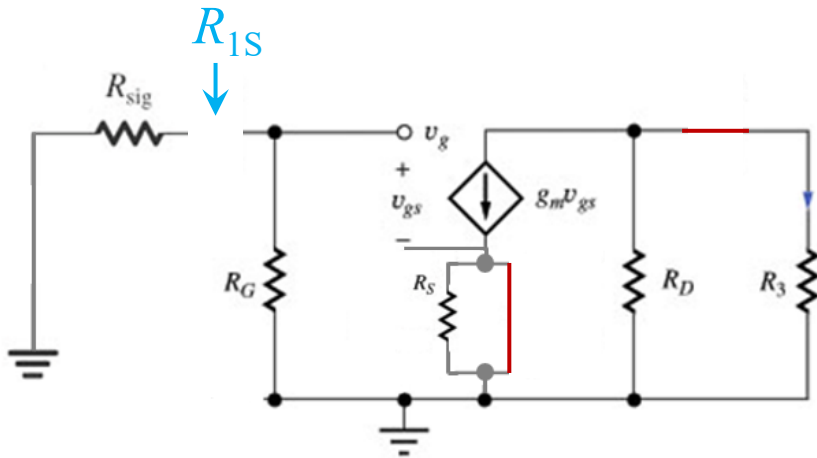


Stima di ω_L un amplificatore a source comune



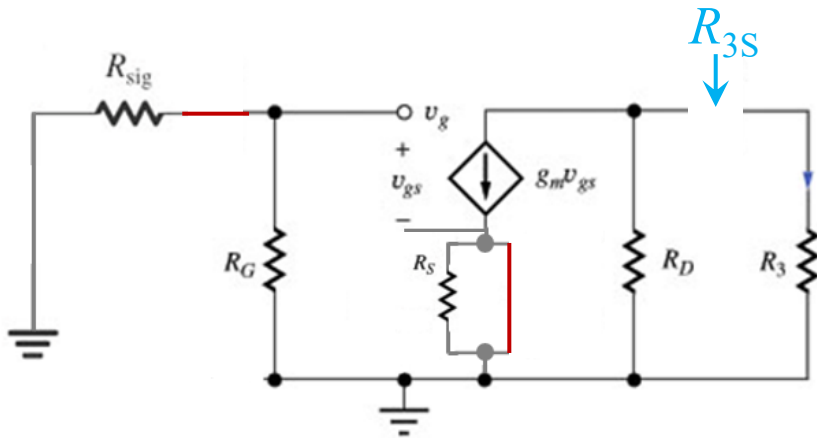
Da notare che il generatore di segnale di ingresso viene cortocircuitato

Calcolo della capacità "vista" da C_1



$$R_{1S} = R_{sig} + R_G$$

Calcolo della capacità "vista" da C_3

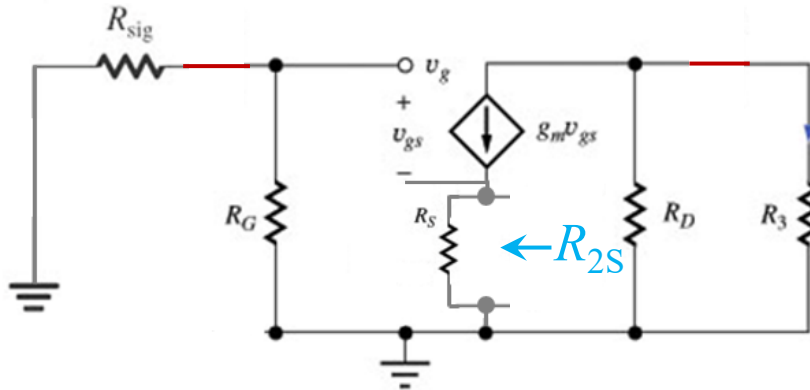


Avendo spento il generatore v_{sig} , è facile vedere che $v_{gs} = 0$.

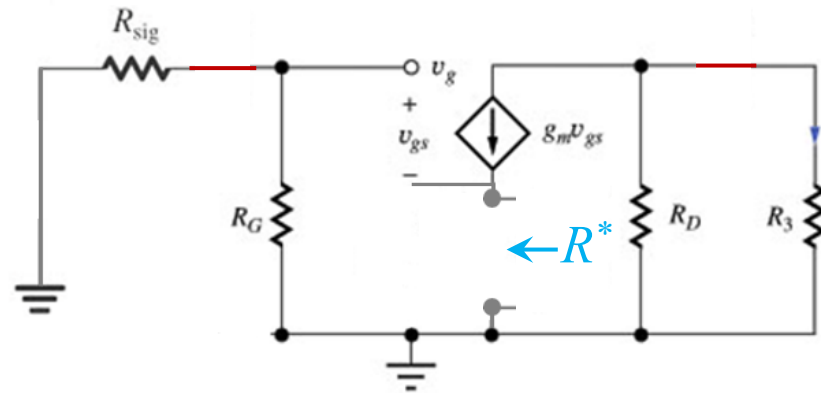
Si spegne pertanto anche il generatore $g_m v_{gs}$ e risulta quindi:

$$R_{3S} = R_D + R_3$$

Calcolo della capacità "vista" da C_2



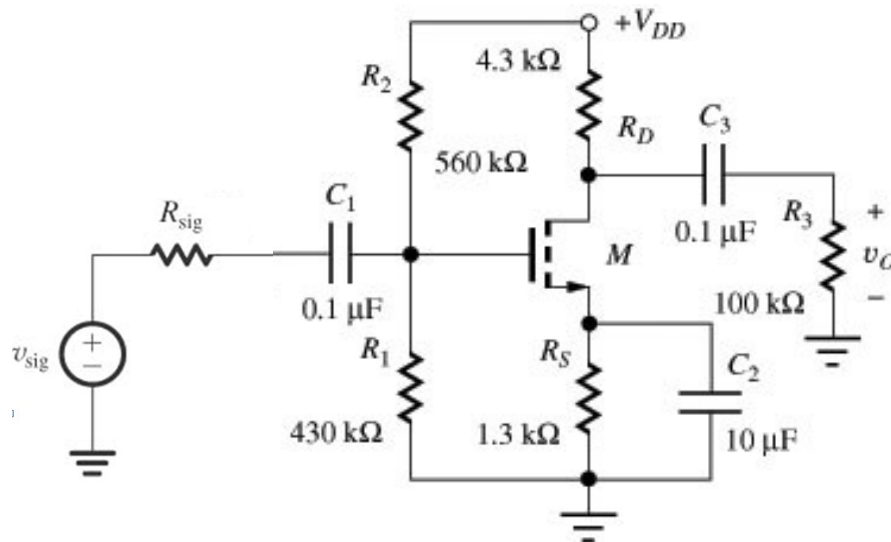
La R_{2S} è il parallelo di R_S e della resistenza R^* del circuito in basso:



Una semplice analisi del circuito mostra che $R^* = 1/g_m$ e quindi:

$$R_{2S} = R_S \parallel (1/g_m)$$

Stima di ω_L un amplificatore a source comune



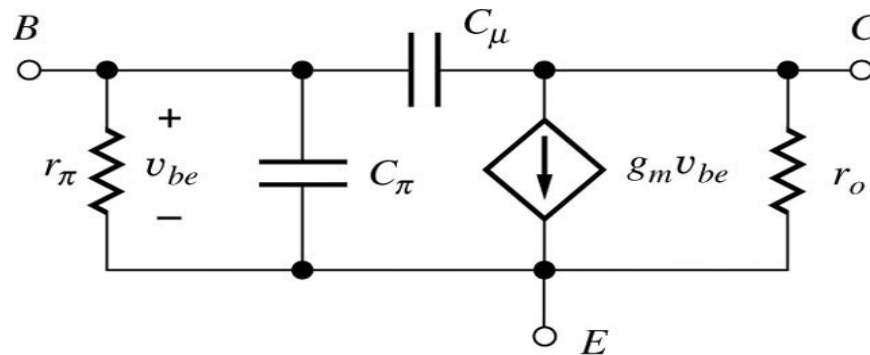
$$\omega_L \approx \frac{1}{C_1 (R_{sig} + R_G)} + \frac{1}{C_2 [R_S \parallel (1/g_m)]} + \frac{1}{C_3 (R_D + R_3)}$$

Risposta in alta frequenza

Modello in alta frequenza per il BJT (modello a pigreco ibrido)

Aumentando sempre di più la frequenza, il guadagno di un amplificatore comincia a decrescere. Questo fenomeno è dovuto alle capacità interne dei dispositivi.

La figura seguente mostra il modello equivalente in alta frequenza di un BJT



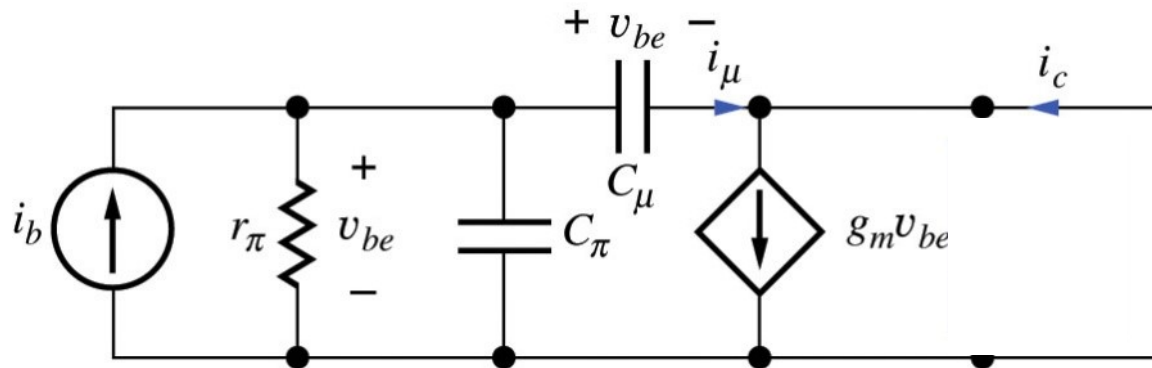
La capacità fra base e collettore, C_μ , è legata ad una giunzione inversamente polarizzata ed è più piccola della capacità fra base ed emettitore, C_π .

Frequenza di transizione

La frequenza di transizione o frequenza di guadagno unitario, f_T , rappresenta un parametro importante per un transistor.

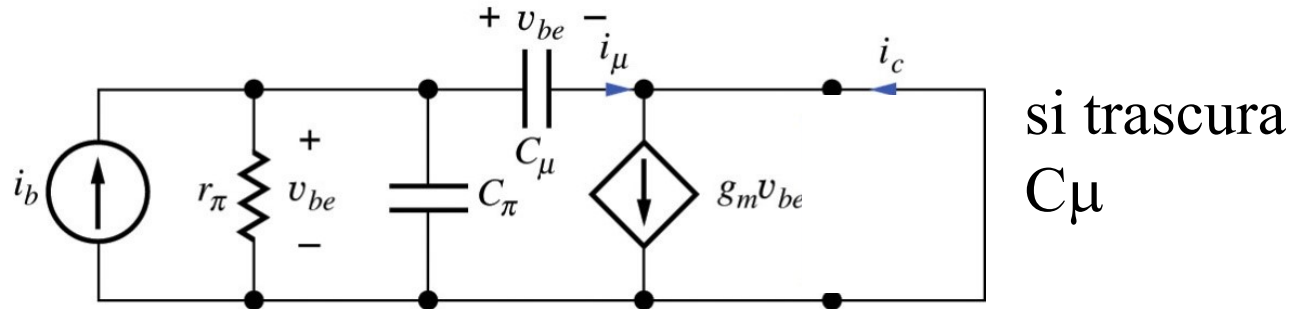
A questa frequenza, **il guadagno di corrente del dispositivo diviene unitario**, ed il dispositivo stesso non è più utile come amplificatore.

Per il calcolo di f_T si considera il guadagno di corrente, assumendo che l'uscita sia in cortocircuito:



$$A_i = \frac{i_c}{i_b}$$

Frequenza di transizione del BJT



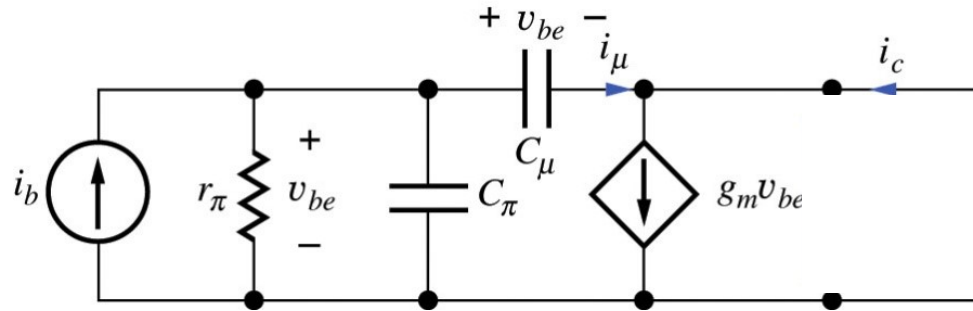
$$i_c = g_m v_{be} = g_m i_b \frac{r_\pi}{1 + j\omega C_\pi r_\pi}$$

$$A_i = \frac{i_c}{i_b} = g_m r_\pi \frac{1}{1 + j\omega / \omega_0} \quad \text{con: } \omega_0 = \frac{1}{C_\pi r_\pi}$$

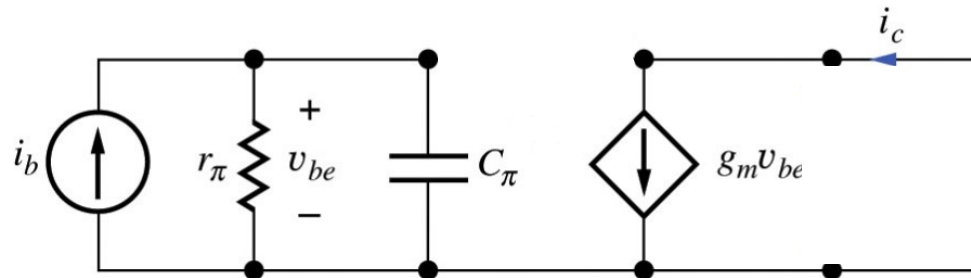
Il guadagno di corrente è massimo per $\omega \ll \omega_0$ e vale $g_m r_\pi = \beta$
 Al crescere della frequenza il guadagno decresce, per divenire unitario alla pulsazione:

$$\omega_T = \beta \omega_0 = g_m r_\pi \frac{1}{C_\pi r_\pi} = \frac{g_m}{C_\pi}$$

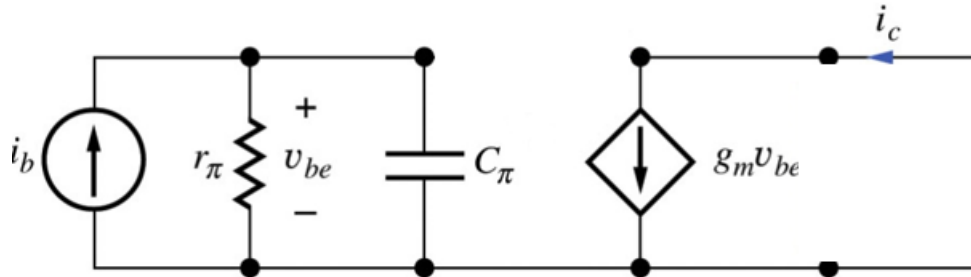
Frequenza di transizione del BJT



si trascura C_μ , per semplificare l'analisi:



Frequenza di transizione del BJT



$$i_c = g_m v_{be}$$

$$v_{be} = i_b \frac{r_\pi}{1 + j\omega C_\pi r_\pi}$$

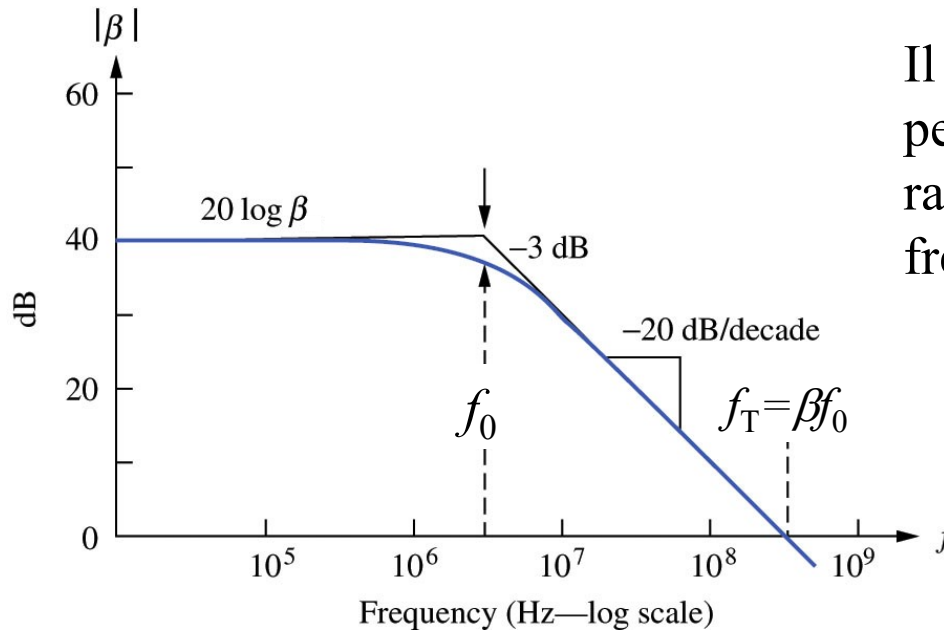
$$A_i = \frac{i_c}{i_b} = g_m r_\pi \frac{1}{1 + j\omega / \omega_0} \quad \text{con: } \omega_0 = \frac{1}{C_\pi r_\pi}$$

Il guadagno di corrente è massimo per $\omega \ll \omega_0$ e vale $g_m r_\pi = \beta$

Al crescere della frequenza il guadagno decresce, per divenire unitario alla pulsazione:

$$\omega_T = \beta \omega_0 = g_m r_\pi \frac{1}{C_\pi r_\pi} = \frac{g_m}{C_\pi}$$

Frequenza di transizione del BJT



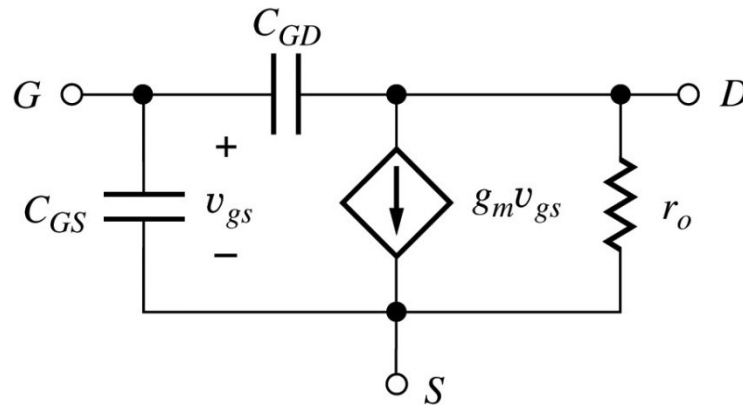
Il guadagno di corrente a basse frequenze è $\beta = g_m r_\pi$

Il guadagno decresce di 20dB/decade per frequenze maggiori di f_0 , e raggiunge il valore unitario alla frequenza $f_T = \omega_T / (2\pi)$

$$\omega_0 \cong \frac{1}{C_\pi r_\pi}$$

$$\omega_T = \beta \omega_0 = \frac{\beta}{C_\pi r_\pi} = \frac{g_m}{C_\pi}$$

Modello in alta frequenza del MOS



Anche per il MOS il modello in alta frequenza prevede la presenza di due capacità.

La capacità fra gate e drain, C_{GD} , e la capacità fra gate e source, C_{GS} , sono di valore confrontabile.

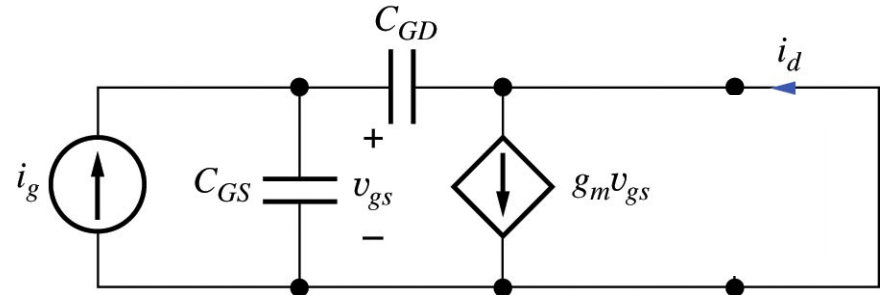
Frequenza di transizione del MOS

E' definita in maniera analoga al BJT, come la frequenza in cui il guadagno di corrente in cortocircuito diviene unitario.

Trascurando C_{GD} si ha:

$$i_d = g_m v_{gs} = g_m i_g \frac{1}{j\omega C_{GS}}$$

$$A_i = \frac{i_d}{i_g} = \frac{g_m}{j\omega C_{GS}}$$



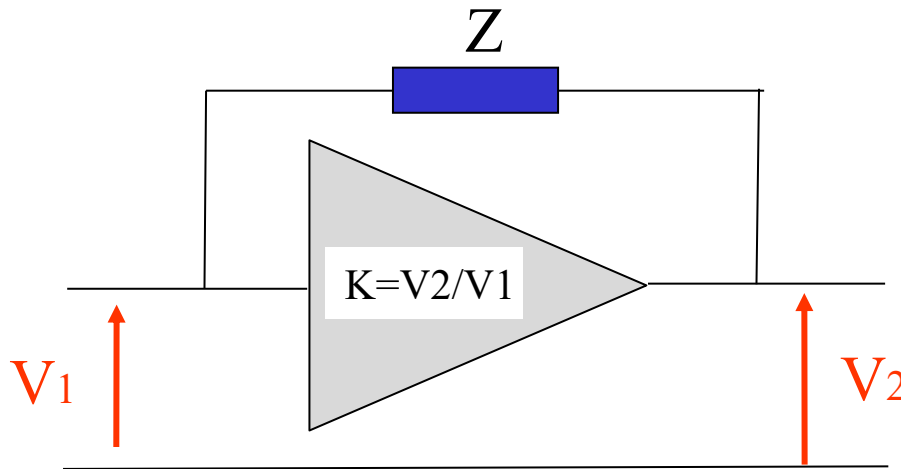
Il guadagno di corrente è infinito per $\omega \rightarrow 0$.

Al crescere della frequenza il guadagno decresce, per divenire unitario alla pulsazione: $\omega_T = g_m / C_{GS}$

Trasformazione di Miller

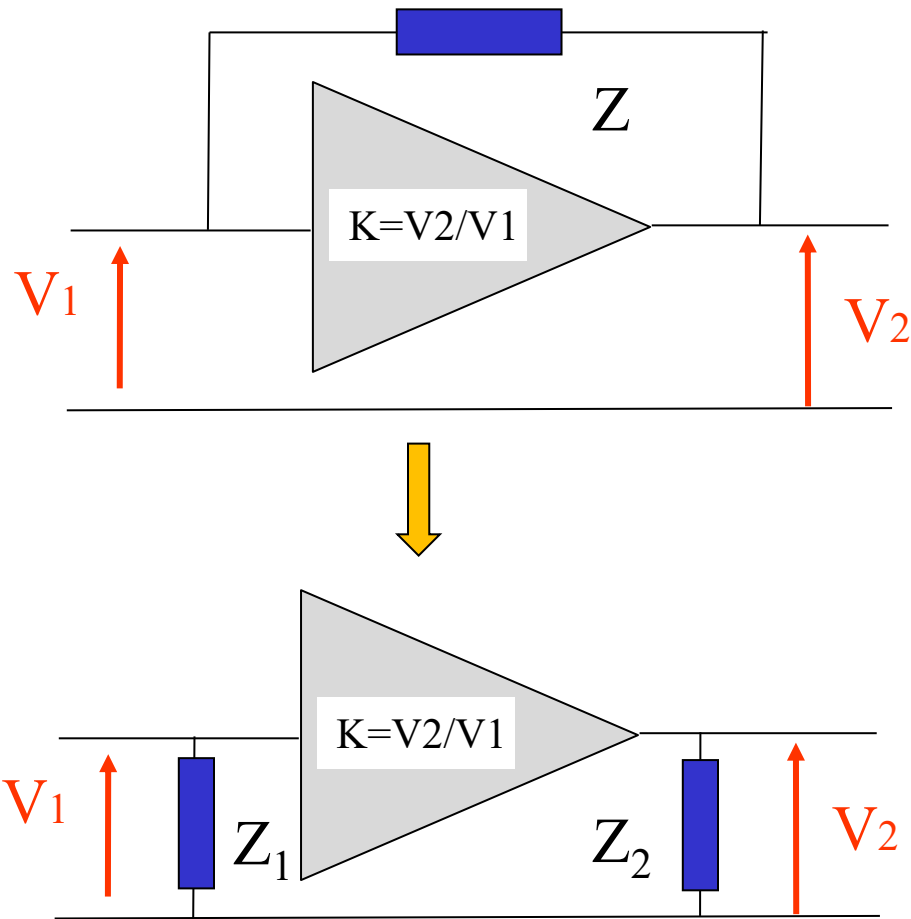
Consente di semplificare lo studio di un sistema in cui ci sia un amplificatore di guadagno noto, K , con un'impedenza Z collegata fra i morsetti di ingresso e di uscita.

Si sottolinea che la tecnica risulta utile solo nel caso in cui il guadagno K sia noto o comunque facilmente calcolabile.



Trasformazione di Miller

La trasformazione di Miller sostituisce l'impedenza Z con le due impedenze Z_1 e Z_2 . Il circuito trasformato (riportato in basso) è equivalente al circuito iniziale.



Trasformazione di Miller – maglia di ingresso

Per mantenere l'equivalenza dei due circuiti, è necessario che si abbia la stessa corrente I_Z nella maglia di ingresso, sia nel circuito iniziale che in quello trasformato.

Nel circuito originario:

$$I_Z = (V_1 - V_2) / Z = V_1 (1 - K) / Z$$

In quello trasformato:

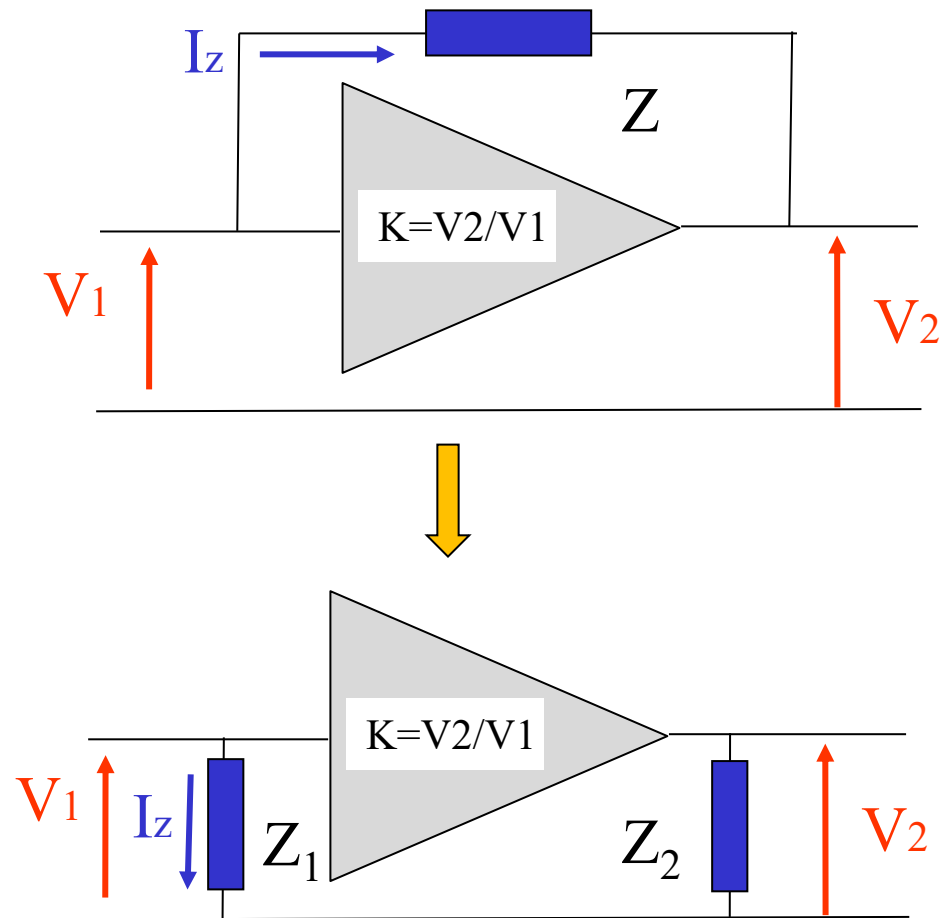
$$I_Z = V_1 / Z_1$$

Eguagliando la I_Z si ha:

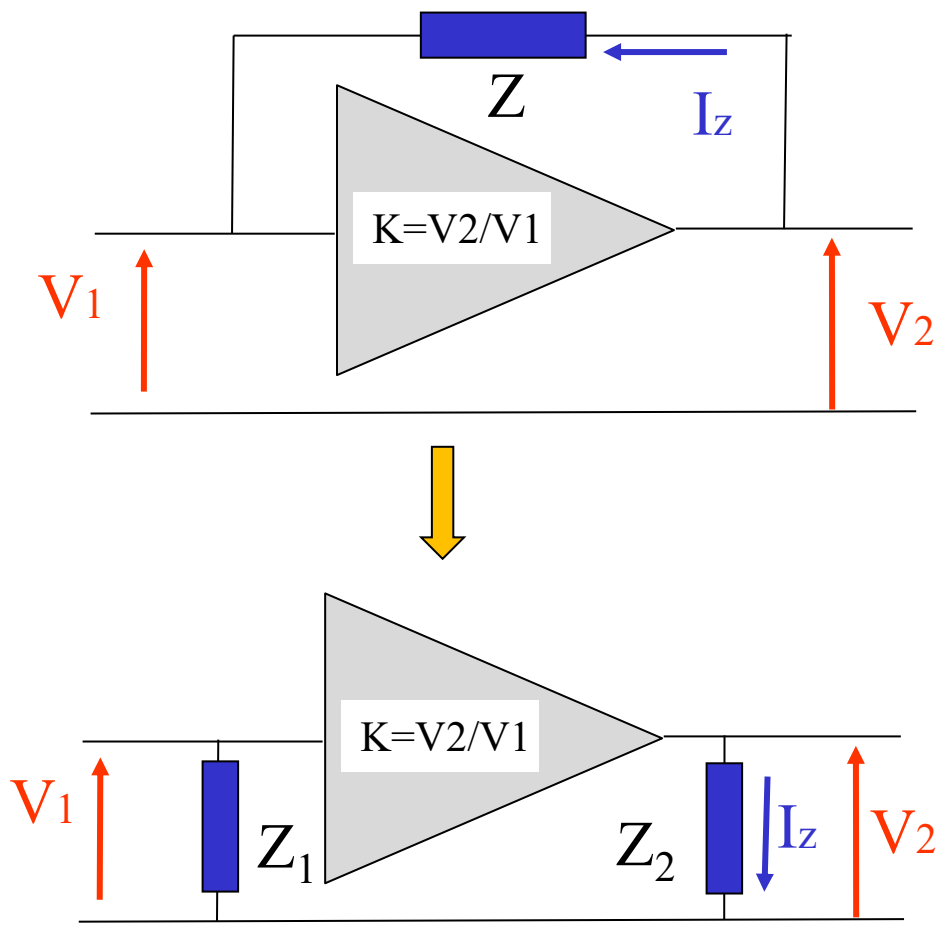
$$(1 - K) / Z = 1 / Z_1$$

da cui:

$$Z_1 = Z \frac{1}{1 - K}$$



Trasformazione di Miller – maglia di uscita



Per mantenere l'equivalenza dei due circuiti, è necessario che si abbia la stessa corrente I_Z nella maglia di uscita, sia nel circuito iniziale che in quello trasformato.

Nel circuito originario:

$$I_Z = (V_2 - V_1)/Z = V_2 (1 - 1/K)/Z$$

In quello trasformato:

$$I_Z = V_2/Z_2$$

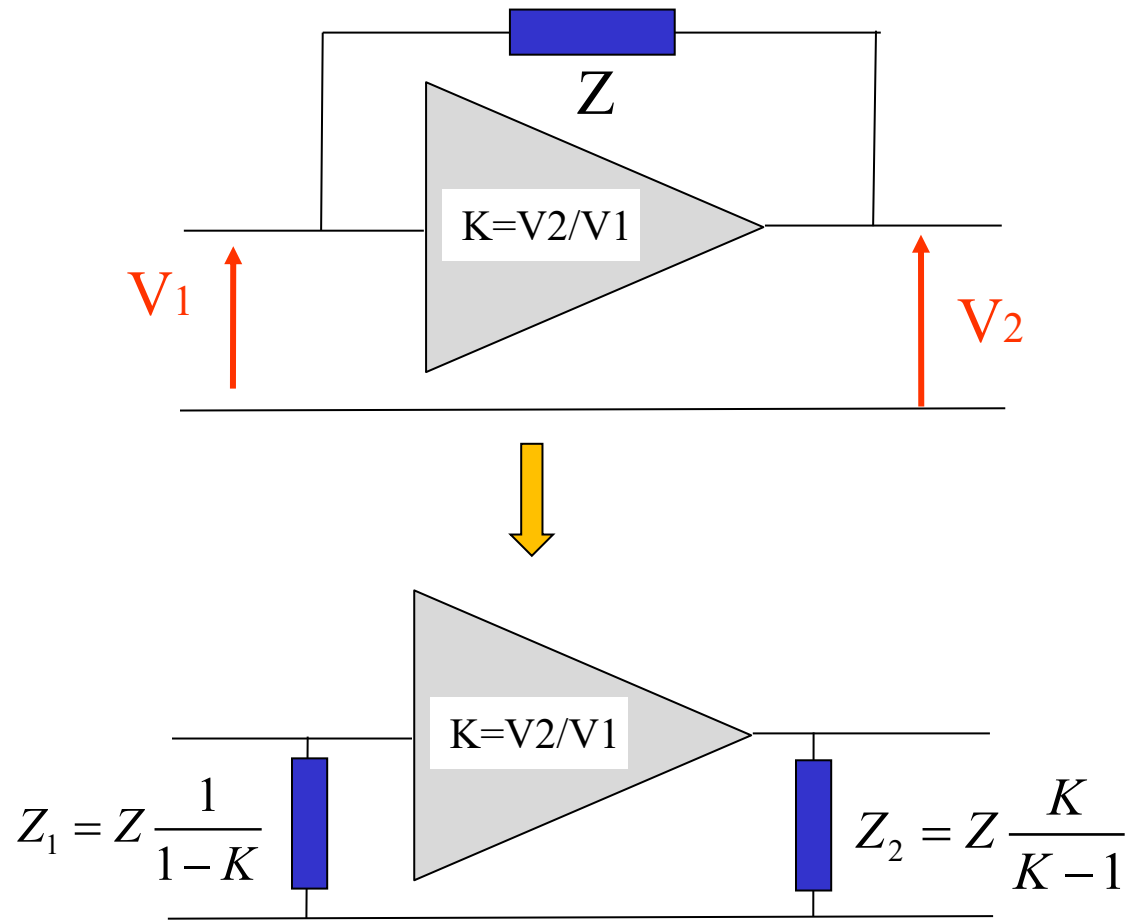
Eguagliando la I_Z si ha:

$$(1 - 1/K)/Z = 1/Z_2$$

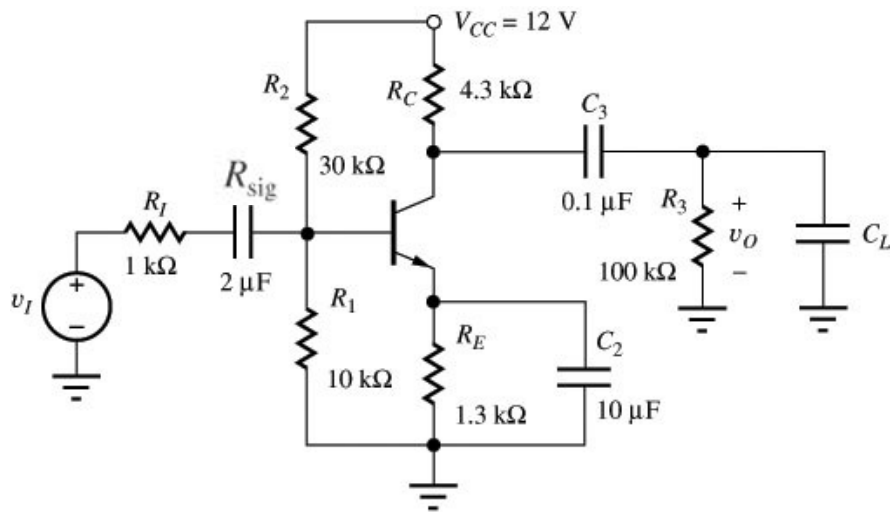
da cui:

$$Z_2 = Z \frac{1}{1 - 1/K} = Z \frac{K}{K - 1}$$

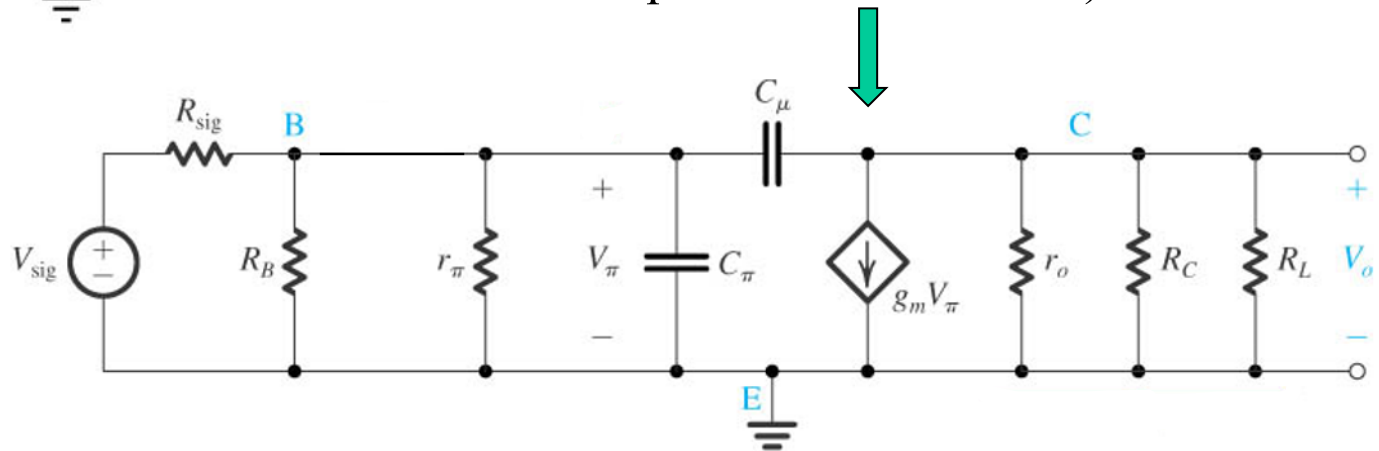
Trasformazione di Miller



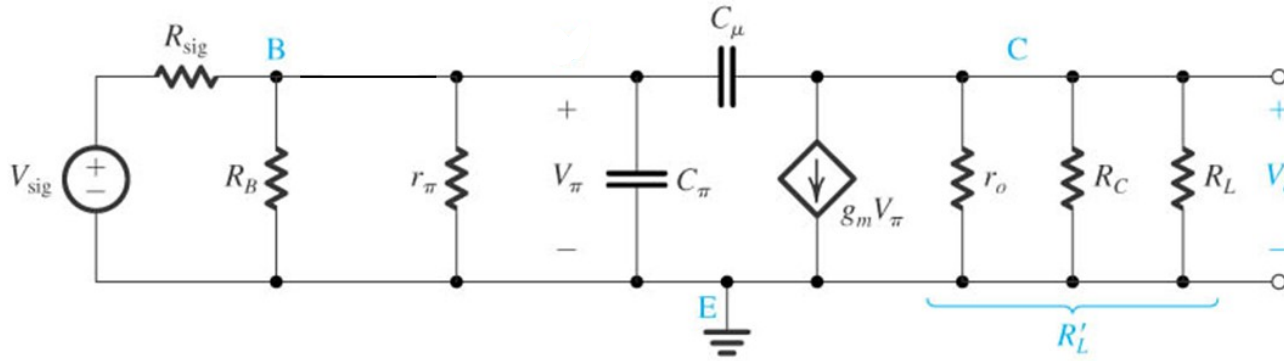
Risposta in alta frequenza dell'amplificatore ad Emettitore Comune



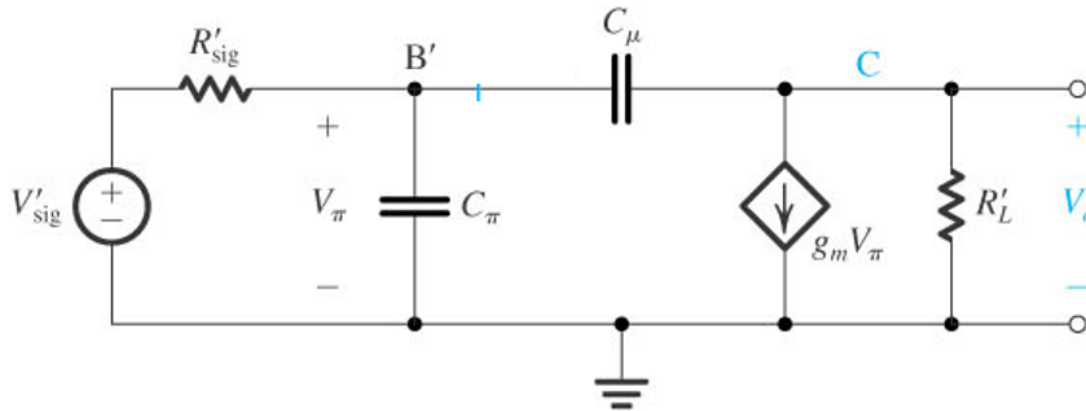
Disegniamo dapprima il modello a piccoli segnali del circuito. Utilizziamo il modello equivalente in alta frequenza del BJT e consideriamo i condensatori di accoppiamento e bypass come cortocircuiti (dato che siamo a frequenza molto elevate).



Risposta in alta frequenza dell'amplificatore ad Emittitore Comune



Semplifico il modello, applicando Thevenin alla maglia di ingresso ed osservando che in uscita ci sono tre resistenze in parallelo

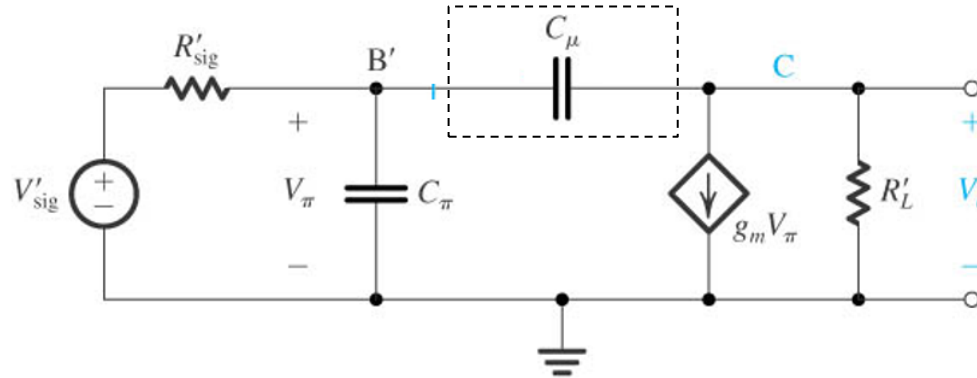


$$V'_{sig} = V_{sig} \frac{R_B \parallel r_\pi}{R_{sig} + R_B \parallel r_\pi}$$

$$R'_{sig} = R_{sig} \parallel R_B \parallel r_\pi$$

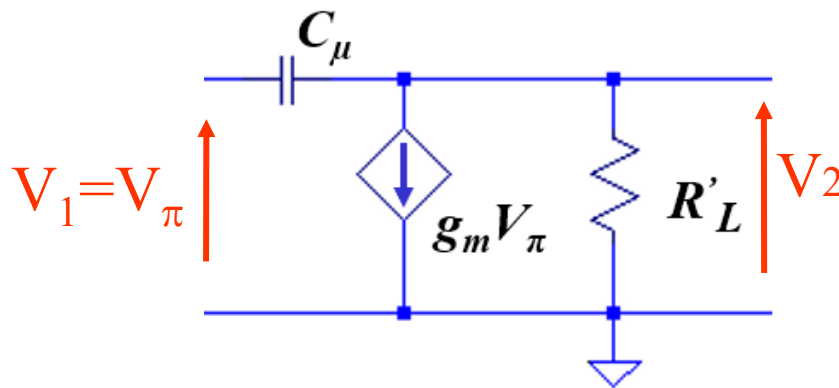
$$R'_L = r_o \parallel R_C \parallel R_L$$

Risposta in alta frequenza dell'amplificatore ad Emettitore Comune



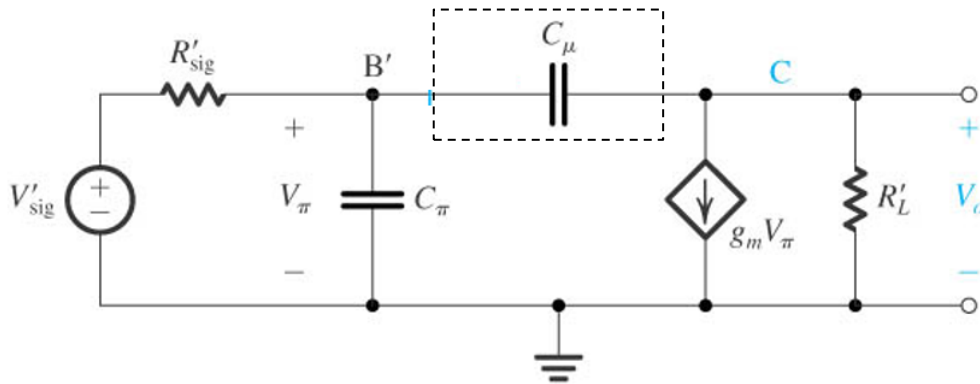
$$Z = \frac{1}{j\omega C_\mu}$$

Applico la trasformazione di Miller alla C_μ . A tal fine, procedo al calcolo di K , che (per semplificare l'analisi) viene valutato trascurando la presenza della C_μ



$$K = V_2/V_1 = -g_m R'_L$$

Risposta in alta frequenza dell'amplificatore ad Emettitore Comune



$$K = -g_m R'_L$$

$$Z = \frac{1}{j\omega C_\mu}$$

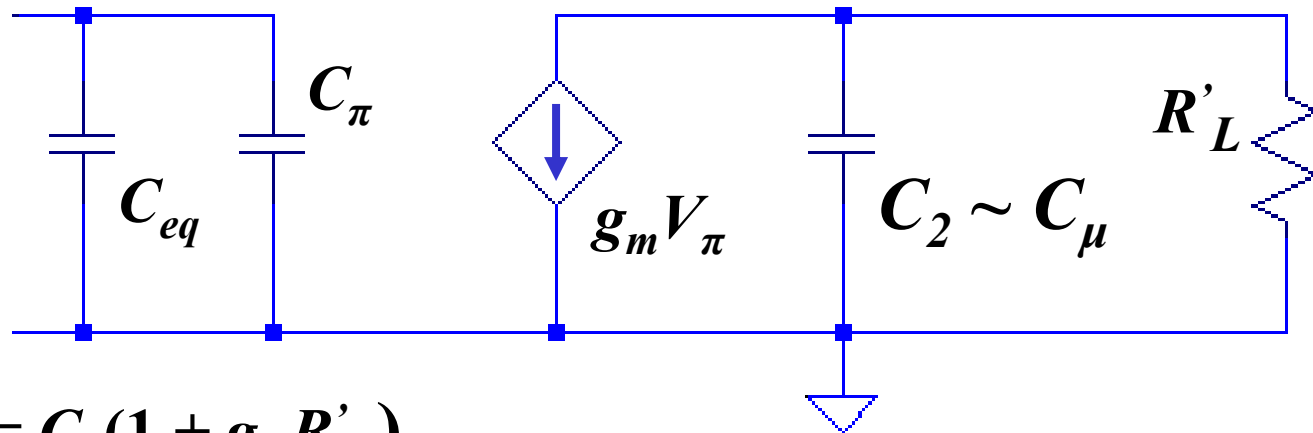
$$Z_1 = \frac{Z}{1-K} = \frac{1/(j\omega C_\mu)}{1+g_m R'_L} = \frac{1}{j\omega C_\mu (1+g_m R'_L)}$$

L'impedenza Z_1 è una capacità di valore:
 $C_\mu(1+g_m R'_L)$

$$Z_2 = \frac{Z}{1-1/K} = \frac{1/(j\omega C_\mu)}{1+\frac{1}{g_m R'_L}} \approx \frac{1}{j\omega C_\mu}$$

L'impedenza Z_2 è una capacità di valore pari all'incirca a C_μ

Risposta in alta frequenza dell'amplificatore ad Emittitore Comune

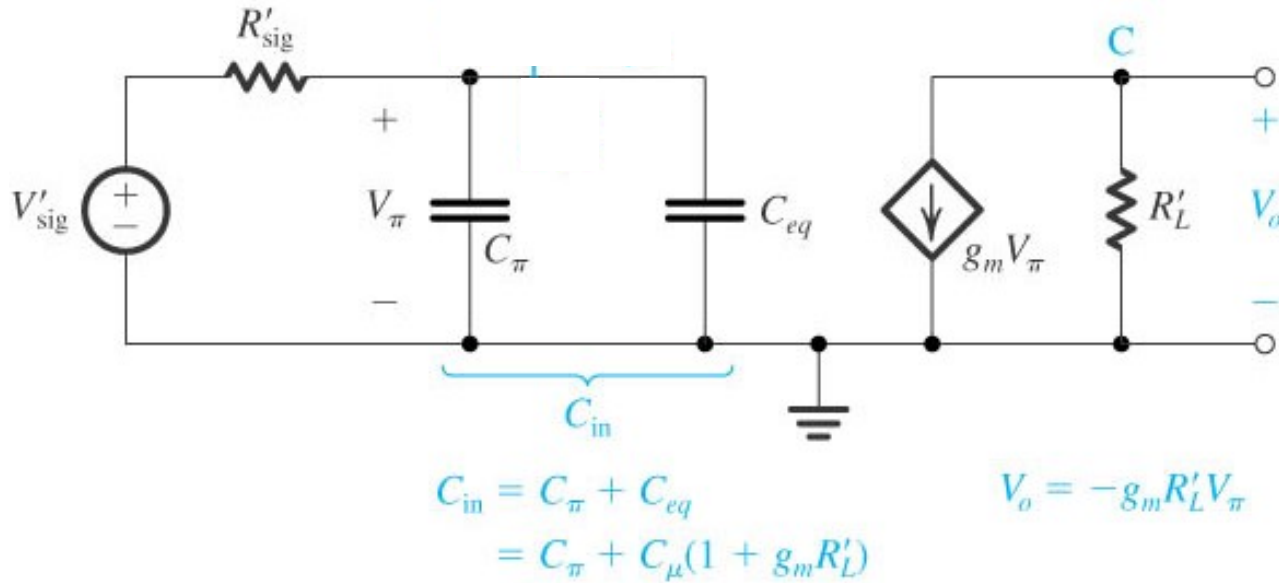


$$C_{eq} = C_{\mu}(1 + g_m R'_L)$$

La capacità nella maglia di ingresso è molto maggiore di C_{μ} (si parla di "effetto Miller").

La capacità della maglia di uscita è pari all'incirca a C_{μ} ; è molto più piccola della capacità della maglia di ingresso e verrà trascurata nel seguito.

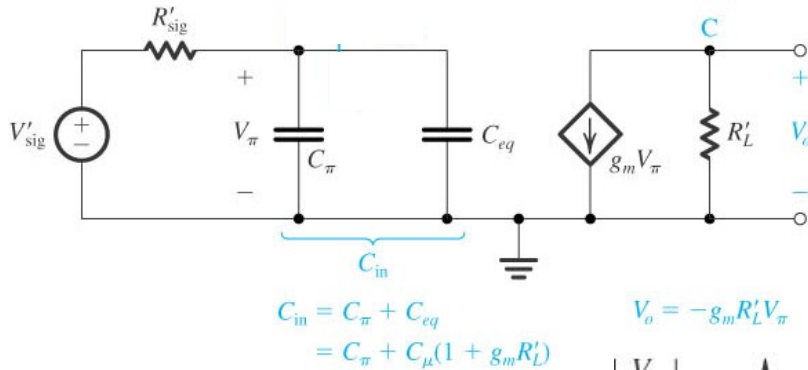
Risposta in alta frequenza dell'amplificatore ad Emittitore Comune



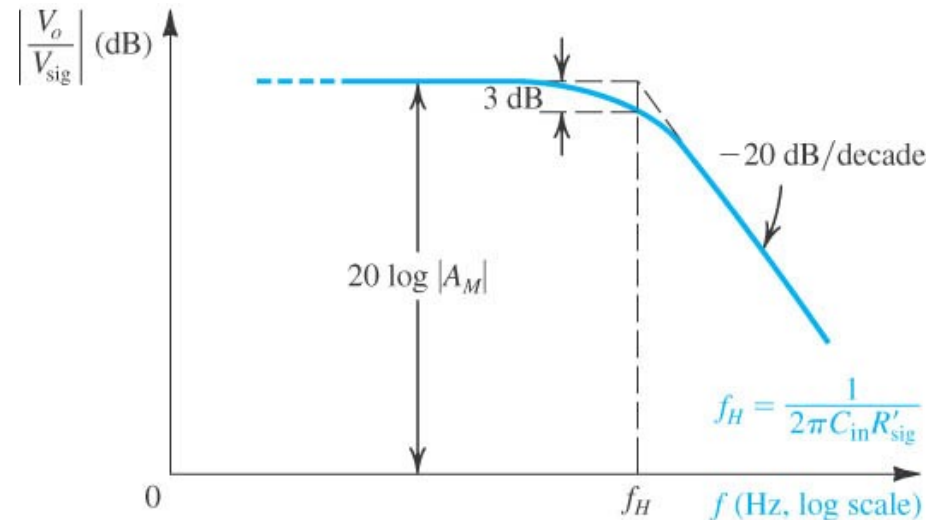
Abbiamo un sistema di tipo passa-basso, con una costante di tempo:

$$\tau_H \approx R'_{sig} \left[C_{\pi} + C_{\mu} (1 + g_m R'_L) \right]$$

Risposta in alta frequenza dell'amplificatore ad Emittitore Comune

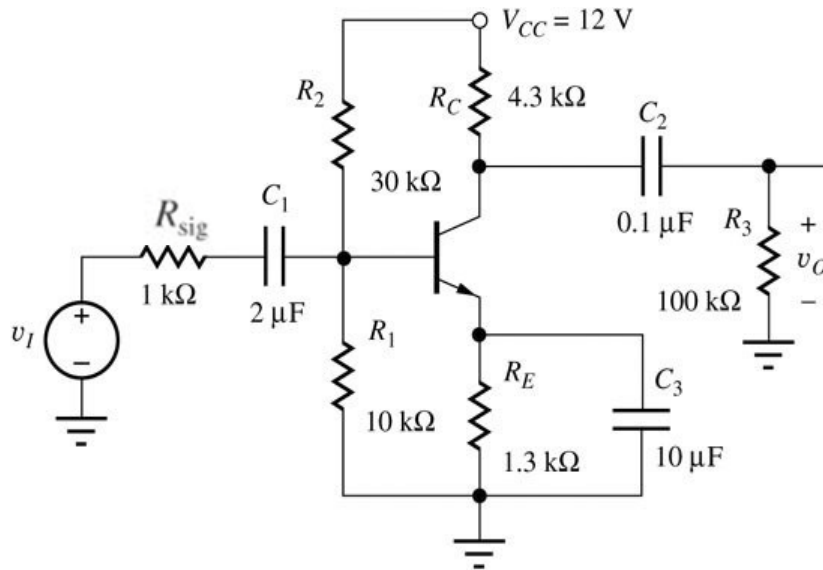


$$\tau_H \approx R'_{sig} \left[C_{\pi} + C_{\mu} (1 + g_m R'_L) \right]$$



(d)

Risposta in alta frequenza di un amplificatore ad Emittitore Comune - Esempio



- **Problema:** Calcolare la frequenza di taglio superiore, f_H .
- **Dati:** Punto di lavoro = (1.60 mA, 3.00V), $f_T = 500$ MHz, $\beta = 100$, $C_\mu = 0.5$ pF

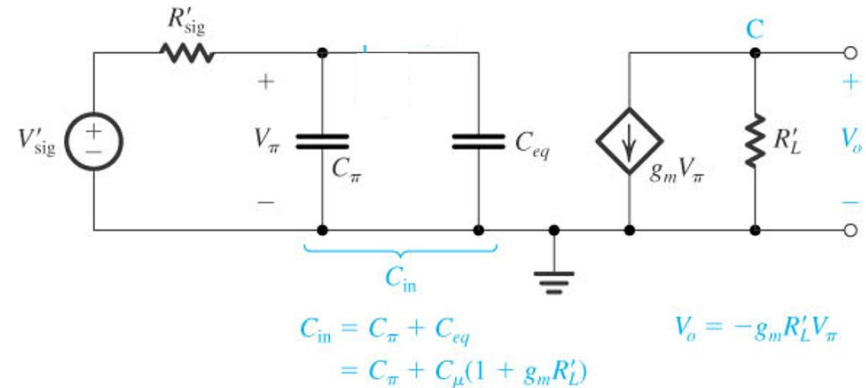
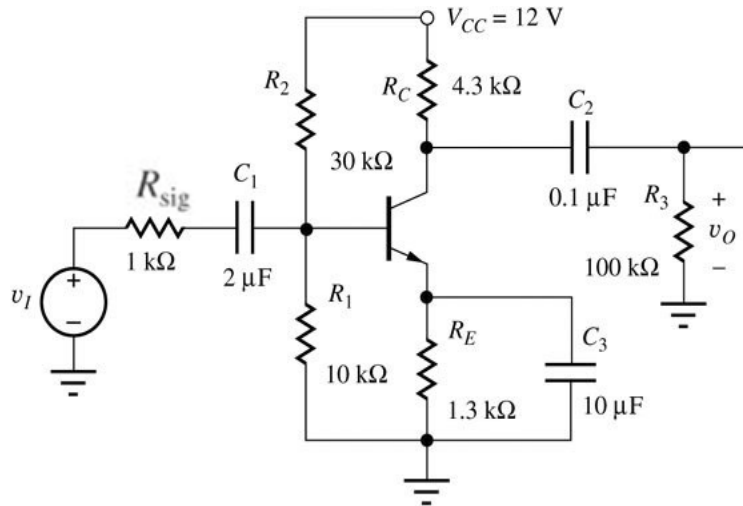
Calcoliamo i parametri differenziali:

$$g_m = I_C / V_{th} = 40 I_C = 40(0.0016) = 64 \text{ mS}$$

$$r_\pi = \beta_o / g_m = 1.56 \text{ k}\Omega$$

$$\text{Per } C_\pi, \text{ ricordiamo che: } \omega_T = g_m / C_\pi \Rightarrow C_\pi = g_m / (2\pi f_T) \approx 20 \text{ pF}$$

Risposta in alta frequenza di un amplificatore ad Emittitore Comune - Esempio



$$R'_{sig} = R_B \parallel R_{sig} \parallel r_{\pi} = 30\text{k}\Omega \parallel 10\text{k}\Omega \parallel 1\text{k}\Omega \parallel 1.56\text{k}\Omega \approx 560\Omega$$

$$R'_L = R_C \parallel R_L = 4.3\text{k}\Omega \parallel 100\text{k}\Omega = 4.12\text{k}\Omega$$

$$g_m R'_L = 64 \times 4.12 \approx 260$$

$$C_{in} = C_{\pi} + C_{\mu}(1 + g_m R'_L) = 20 + 130 = 150\text{pF}$$

$$f_H = 1/(2\pi R'_{sig} C_{in}) \approx 1.9\text{MHz}$$

Metodo delle costanti di tempo a circuito aperto

Il metodo delle costanti di tempo in cortocircuito consente di ottenere una stima approssimata della pulsazione di taglio superiore, ω_H .

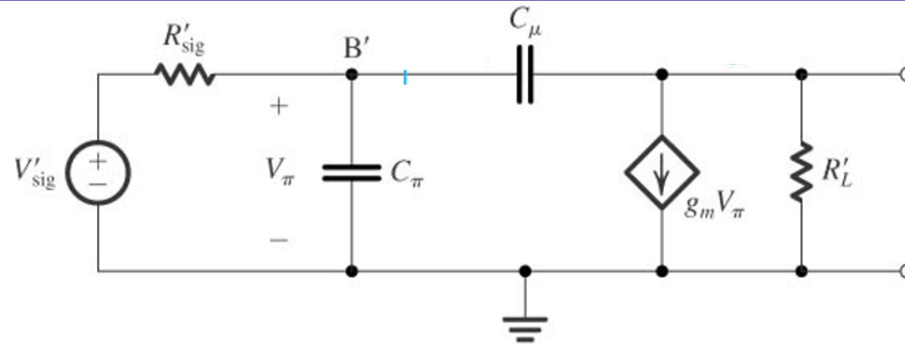
La pulsazione di taglio superiore è approssimata come:

$$\tau_H = \sum_i C_i R_{iO}; \quad \omega_H \approx \frac{1}{\tau_H}$$

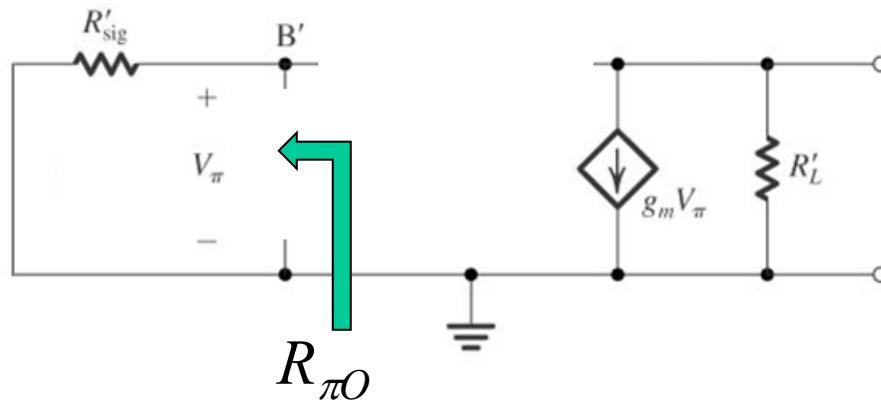
dove:

- la somma è estesa a tutte la capacità interne dei dispositivi
- R_{iO} è la resistenza “vista” ai capi del condensatore C_i quando tutti gli altri condensatori sono sostituiti da circuiti aperti e tutti i generatori indipendenti sono disattivati (i generatori di tensione cortocircuitati).

Stima di ω_H utilizzando il metodo delle costanti di tempo a circuito aperto

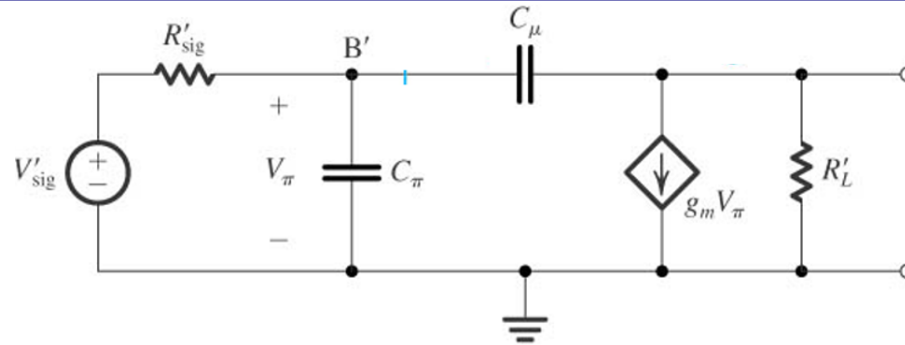


Per calcolare la resistenza equivalente vista ai capi di C_π , devo cortocircuitare il generatore di segnale V'_{sig} e devo considerare C_μ un circuito aperto:

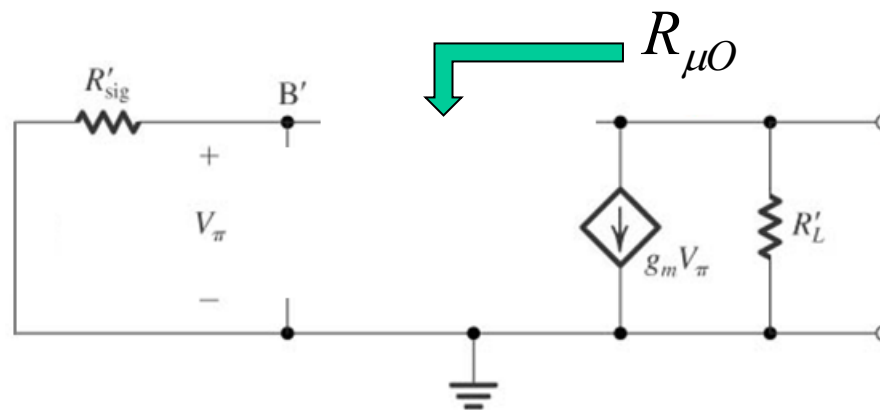


$$R_{\pi O} = R'_{sig}$$

Stima di ω_H utilizzando il metodo delle costanti di tempo a circuito aperto

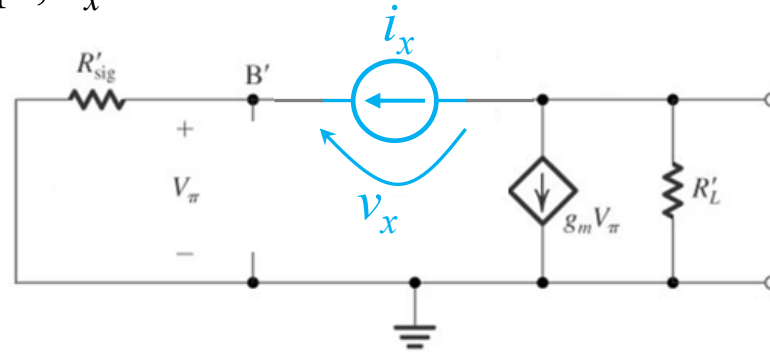


Per calcolare la resistenza equivalente vista ai capi di C_μ , devo cortocircuitare il generatore di segnale V'_{sig} e devo considerare C_π un circuito aperto:



Stima di ω_H utilizzando il metodo delle costanti di tempo a circuito aperto

Per calcolare $R_{\mu O}$ applico un generatore di corrente di test, i_x , e ne valuto la tensione ai suoi capi, v_x



$$V_\pi = i_x R'_{sig}; \quad v_O = -(i_x + g_m V_\pi) R'_L$$

$$v_x = V_\pi - v_O = i_x R'_{sig} + (i_x + g_m i_x R'_{sig}) R'_L$$

$$\begin{aligned} R_{\mu O} &= R'_{sig} + (1 + g_m R'_{sig}) R'_L = \\ &= R'_L + R'_{sig} (1 + g_m R'_L) \simeq R'_{sig} (1 + g_m R'_L) \end{aligned}$$

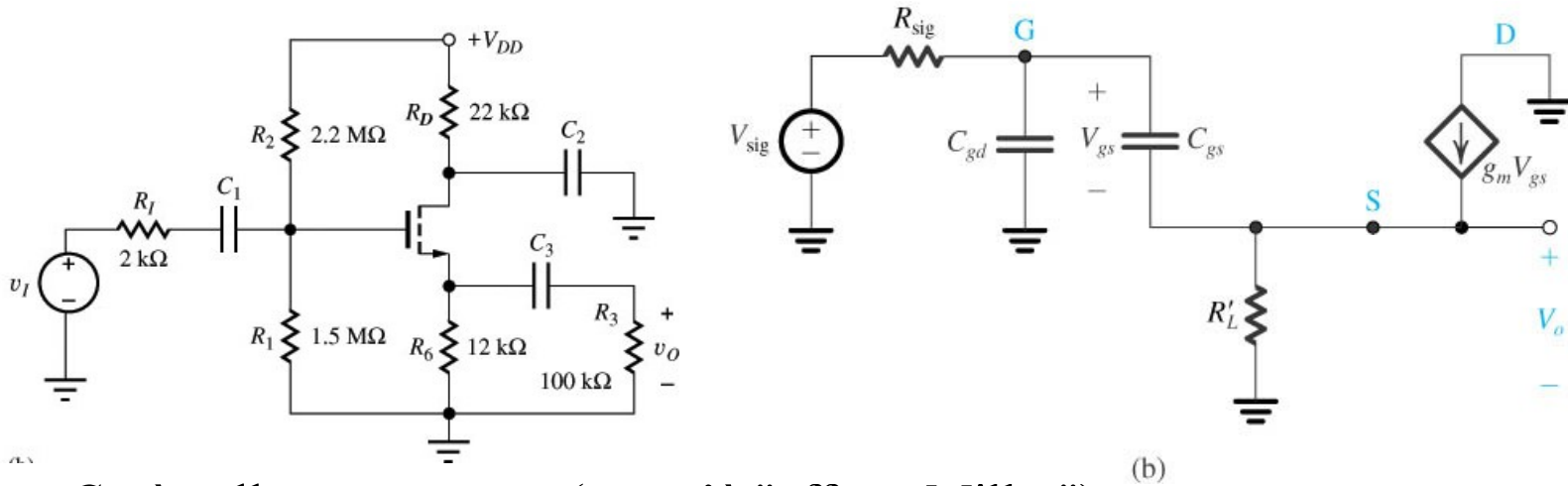
Stima di ω_H utilizzando il metodo delle costanti di tempo a circuito aperto

$$\tau_H \cong R_{\pi O} C_\pi + R_{\mu O} C_\mu = R'_{sig} C_\pi + \left[(1 + g_m R'_L) R'_{sig} \right] C_\mu$$

Espressione analoga a quella ottenuta applicando la trasformazione di Miller

Altre configurazioni:
Collettore/Drain comune

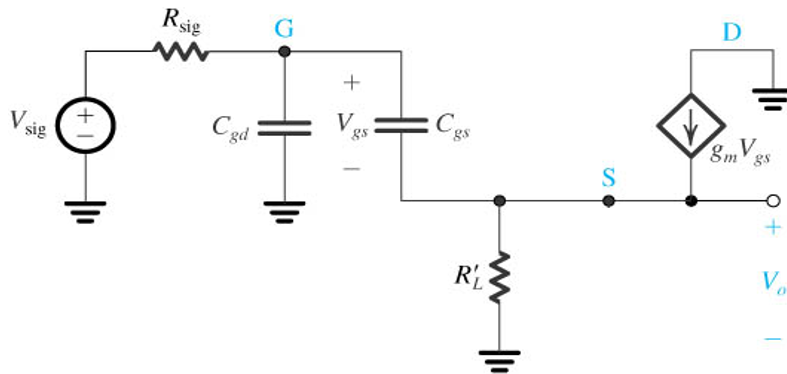
Risposta in alta frequenza dell'amplificatore a Drain Comune



C_{gd} è collegata a massa (non c'è "effetto Miller").

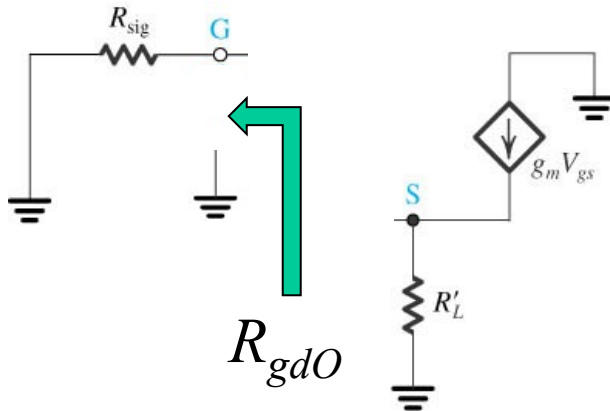
La capacità C_{gs} è invece collegata a cavallo fra ingresso ed uscita. Si deve tuttavia osservare che il guadagno del circuito è positivo e prossimo all'unità; pertanto la capacità effettiva si riduce, anziché aumentare come nell'amplificatore C-E. Se ne conclude che la frequenza di taglio superiore dell'amplificatore a Drain comune è molto maggiore rispetto alla configurazione ad Source comune. Analoga considerazione vale per gli amplificatori a BJT

Risposta in alta frequenza dell'amplificatore a Drain Comune



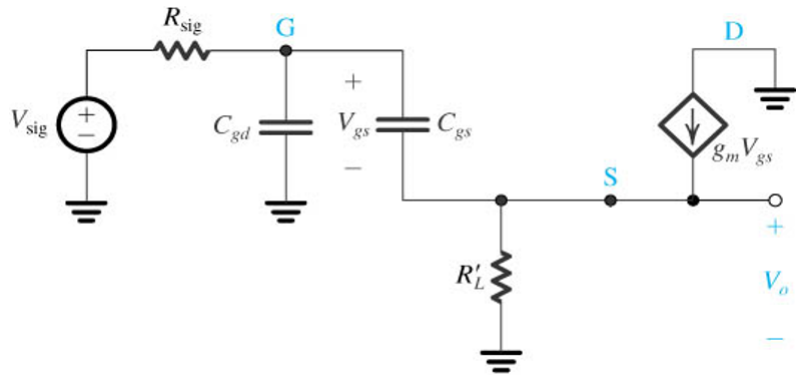
otteniamo la frequenza di taglio superiore applicando il metodo delle costanti di tempo

Per calcolare la resistenza equivalente vista ai capi di C_{gd} , devo cortocircuitare il generatore di segnale v_{sig} e devo considerare C_{gs} un circuito aperto:

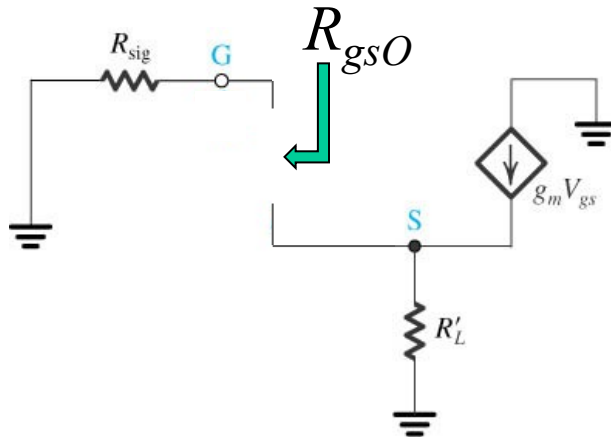


$$R_{gdO} = R_{sig}$$

Risposta in alta frequenza dell'amplificatore a Drain Comune

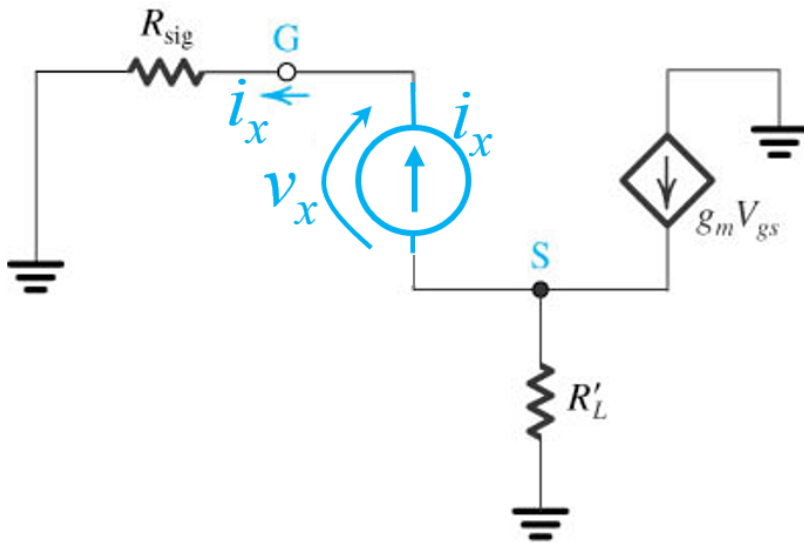


Per calcolare la resistenza equivalente vista ai capi di C_{gs} , devo cortocircuitare il generatore di segnale v_{sig} e devo considerare C_{gd} un circuito aperto.



Risposta in alta frequenza dell'amplificatore a Drain Comune

Per calcolare R_{gsO} applico un generatore di corrente di test, i_x , e ne valuto la tensione ai suoi capi, v_x . Si noti che $v_x = v_{gs}$



$$v_s = (g_m V_{GS} - i_x) R'_L = (g_m v_x - i_x) R'_L$$

$$v_g = i_x R_{sig}$$

$$v_x = v_g - v_s = i_x R_{sig} - (g_m v_x - i_x) R'_L$$

$$v_x (1 + g_m R'_L) = i_x (R_{sig} + R'_L)$$

$$R_{gsO} = \frac{v_x}{i_x} = \frac{R_{sig} + R'_L}{1 + g_m R'_L}$$

$$\tau_{eq} = R_{gdO} C_{gd} + R_{gsO} C_{gs} = R_{sig} C_{gd} + \frac{R_{sig} + R'_L}{1 + g_m R'_L} C_{gs}; \quad f_H = \frac{1}{2\pi\tau_{eq}}$$