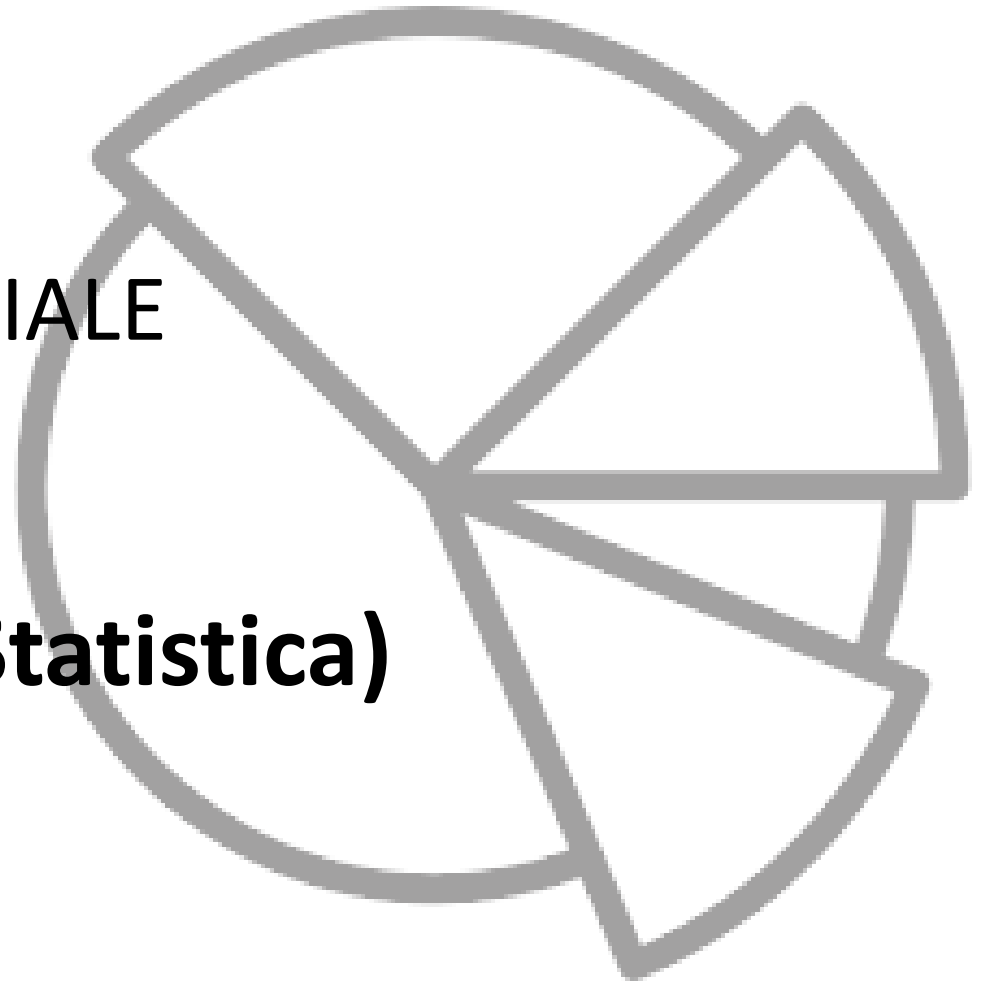


Corso di laurea in
SCIENZE DEL TURISMO AD
INDIRIZZO MANAGERIALE

**Analisi dei Dati e Revenue
Management (Modulo di Statistica)**

Docente: Prof.ssa Maria Spano email: maria.spano@unina.it



Teoria dei test statistici

- Oltre alla stima puntuale e intervallare, una delle maggiori aree di interesse dell'inferenza statistica riguarda la **verifica delle ipotesi statistiche**
- La verifica delle ipotesi statistiche trova **ampia applicazione in problemi reali** nelle aree più svariate
- Si tratta di **verificare la plausibilità di una ipotesi attraverso l'osservazione** dei dati

Un esempio

Si pensi ad un tour operator che, dopo aver lanciato una campagna promozionale, intende verificare se il fatturato medio mensile sia effettivamente aumentato rispetto ai livelli pre-campagna.

Si tratta di comparare due affermazioni (o ipotesi) riguardanti il fatturato:

- «il fatturato medio non è aumentato»
- «il fatturato medio è aumentato»

Un esempio (2)

Le due affermazioni sul fatturato medio del tour operator possono ricondursi alla formulazione di due ipotesi sul valore del parametro (la media μ) di una popolazione X

Effettuare un test statistico significa utilizzare una procedura inferenziale che, attraverso l'estrazione campionaria, determina quale delle due ipotesi possa reputarsi maggiormente plausibile

Il concetto di base è ancora la casualità che rende il campione statistico «rappresentativo» e quindi «somigliante» alla popolazione da cui è estratto

Test statistico

Si chiama test statistico ogni procedura atta a verificare la conformità (o plausibilità) probabilistica tra un campione casuale e una popolazione al fine di determinare l'accettazione o il rigetto di un'ipotesi riguardante la popolazione.

L'accettazione o il rigetto di un'ipotesi avviene quindi verificando la ragionevolezza della stesso rispetto alla evidenza empirica

Alcuni cenni storici

- Una prima formalizzazione al problema dei test è stata data da R.A. Fisher con l'approccio dei **test di significatività** basati sul concetto di discrepanza statistica tra l'ipotesi formulata (*ipotesi nulla*) e i dati osservati
- Successivamente, J. Neyman e E.S. Pearson formularono **la moderna teoria dei test statistici** esplicitando l'esistenza di un'*ipotesi alternativa* a quella nulla
- La teoria dei test illustrata in questo corso si basa sull'**impostazione «Neyman-Pearson»**

Definizione di un test statistico

La definizione di test statistico si basa sui seguenti passi:

- *Definizione delle ipotesi statistiche*
- *Individuazione delle regioni di accettazione e di rigetto*
- *Scelta di una statistica test*
- *Scelta del livello di significatività del test*
- *Definizione della regola di decisione del test*

Ipotesi statistiche

Il primo passo nella costruzione di un test statistico consiste nella formulazione delle due possibili ipotesi

Si definisce **ipotesi statistica** una congettura riguardante un parametro θ sulla popolazione X

Nell'approccio Neyman-Pearson, si distinguono due ipotesi contrapposte:

- ***Ipotesi nulla***, indicata con H_0
- ***Ipotesi alternativa***, indicata con H_1

Ipotesi statistiche (2)

Ipotesi nulla H_0

Si intende l'ipotesi preesistente all'osservazione dei dati campionari, ossia quella ritenuta vera fino a prova contraria

Si dice nulla in quanto essa rappresenta lo «status quo»

Ipotesi alternativa H_1

È l'ipotesi formulata sulla base di dubbi per i quali si cerca una conferma/smentita sulla base di un'evidenza empirica

L'aggettivo «alternativa» sta ad indicare la sua contrapposizione allo «status quo» definito nell'ipotesi nulla

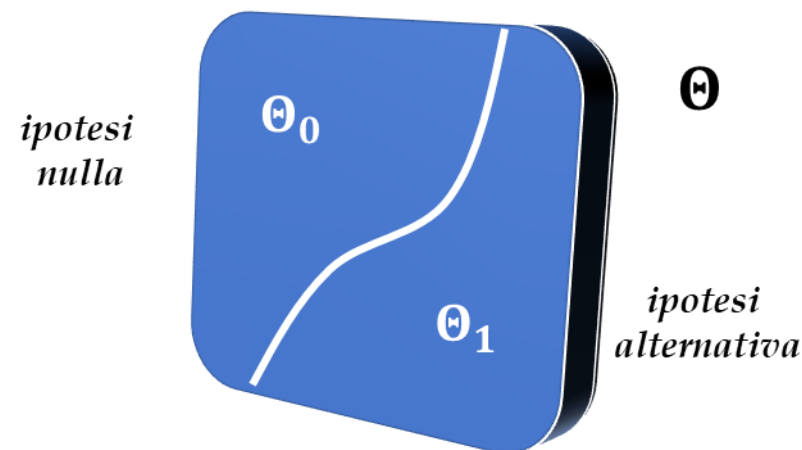
Ipotesi statistiche (3)

Data una popolazione X , si indica con Θ lo spazio parametrico, ossia l'insieme di tutti i possibili valori che può assumere θ

La formulazione delle ipotesi nulla e alternativa definisce una partizione dello spazio parametrico in due parti:

$$\begin{cases} H_0: \theta \in \Theta_0 \\ H_1: \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

$$\text{con } \Theta_1 = \bar{\Theta}_0$$



Ipotesi semplici e composte

Le ipotesi possono essere semplici o composte:

- Un'**ipotesi semplice** individua un valore puntuale per θ e quindi specifica completamente la popolazione X
- Un'**ipotesi composta** individua un intervallo di valori per θ e quindi non specifica un'unica popolazione ma un insieme di popolazioni

Esempio, data una popolazione $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con σ^2 nota

Il sistema di ipotesi
$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \geq \mu_1 \end{cases}$$

Tale sistema definisce un'ipotesi nulla semplice e un'ipotesi alternativa composta

Ipotesi unidirezionali e bidirezionali

L'ipotesi composta può essere unidirezionale o bidirezionale:

- **Ipotesi unidirezionale**

Quando individua, per il parametro θ , un unico intervallo di valori

$$\theta < \theta_0 \quad \text{oppure} \quad \theta > \theta_0$$

- **Ipotesi bidirezionale**

Quando individua, per il parametro θ , due intervalli di valori

$$\theta \neq \theta_0 \quad \text{che equivale a} \quad \theta < \theta_0 \cup \theta > \theta_0$$

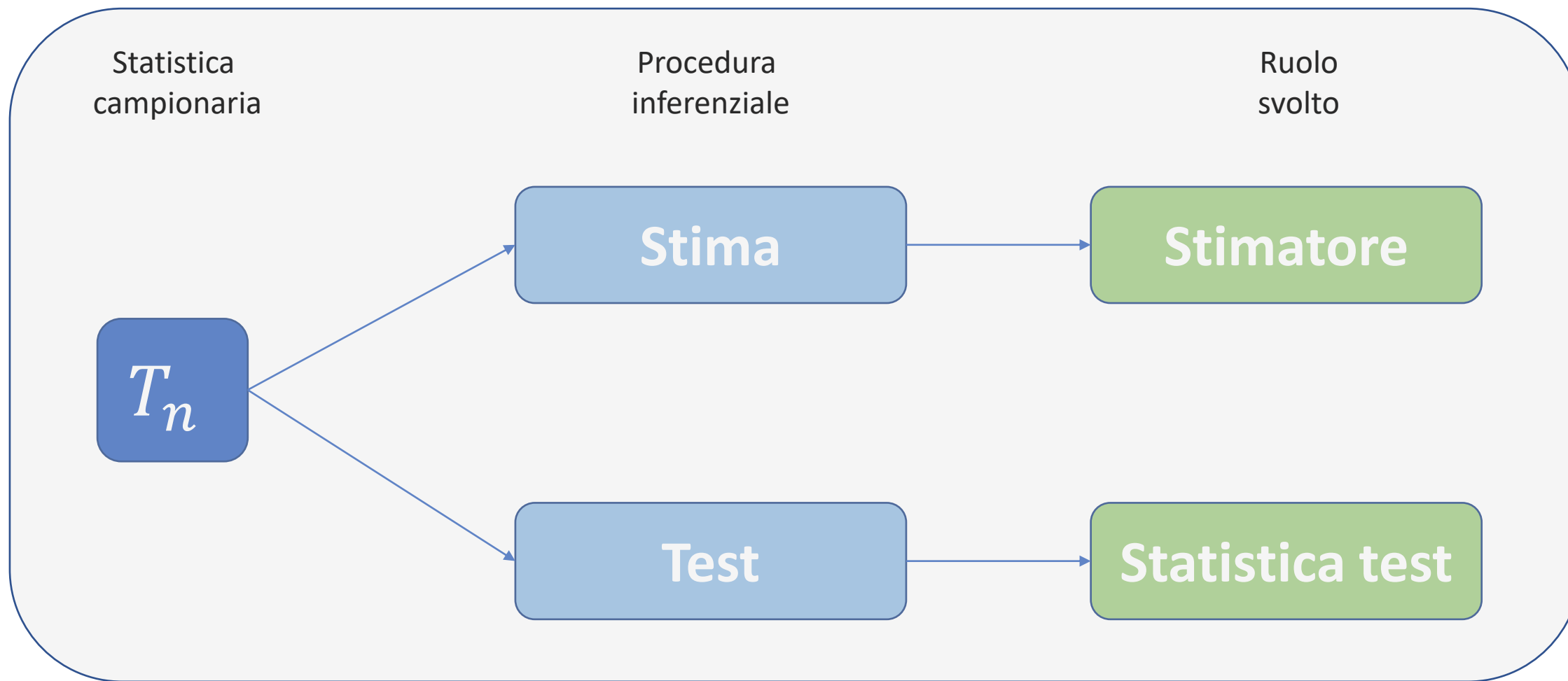
Regione di accettazione e di rifiuto

- Il campione osservato determina l'accettazione o il rifiuto dell'ipotesi nulla
- Se l'informazione ricavata dal campione è in evidente contrasto con l'ipotesi nulla allora si propenderà per il rifiuto della stessa.
- In caso contrario, una «somiglianza» dell'informazione campionaria all'ipotesi nulla porterà ad una decisione di accettazione della stessa.

Statistica test

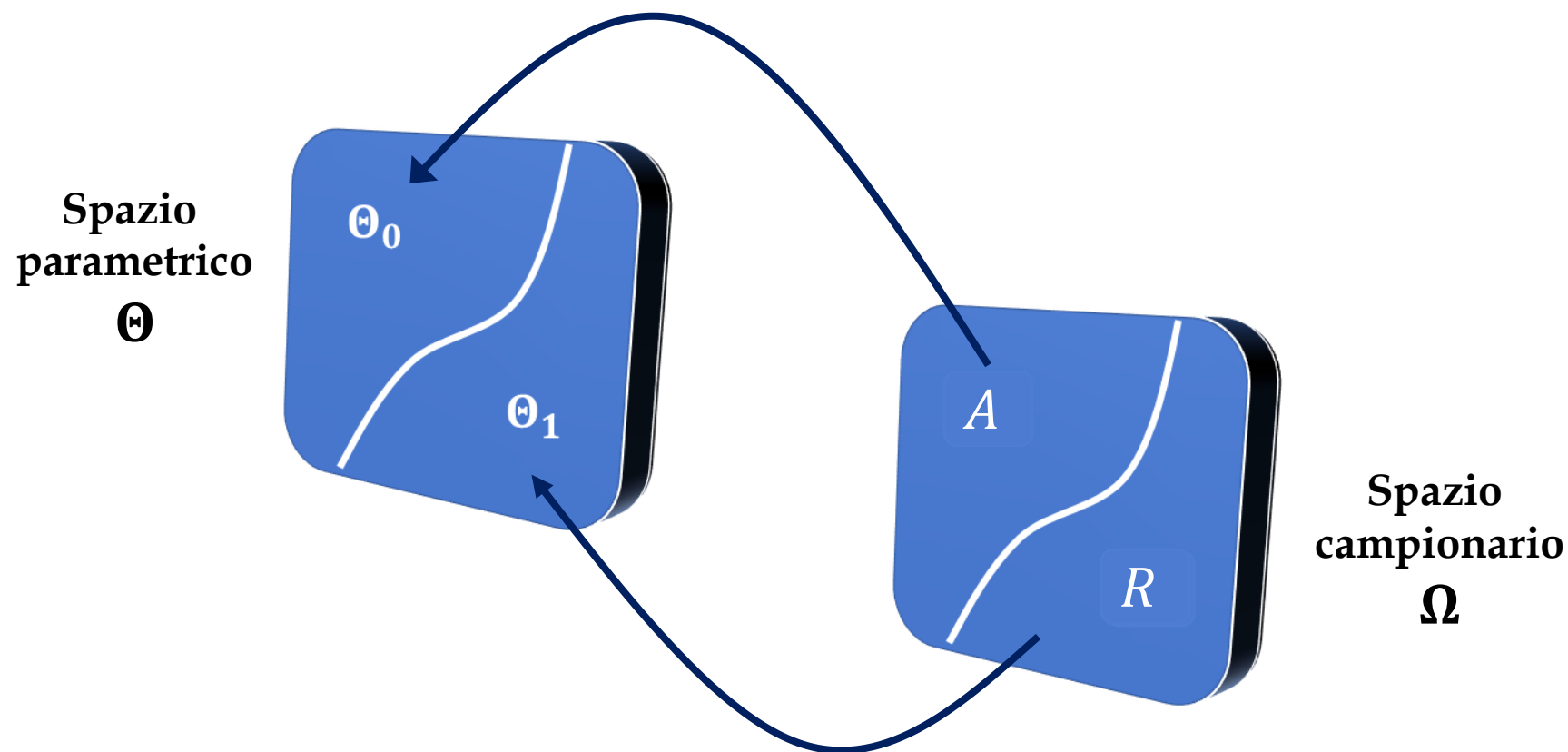
- Una statistica test è la statistica campionaria utilizzata per effettuare la verifica di conformità probabilistica del campione rispetto alle ipotesi formulate sulla popolazione
- La scelta della statistica test è speculare a quella dello stimatore. Essa deve godere di alcune proprietà desiderabili affinché la procedura di verifica delle ipotesi sia accurata
- In altre parole una statistica campionaria (che gode delle proprietà desiderabili) assumerà il ruolo di stimatore quando è impiegata in un processo di stima mentre assumerà il ruolo di statistica test quando è invece impiegata in una procedura di test statistico

Statistica test (2)



Statistica test (3)

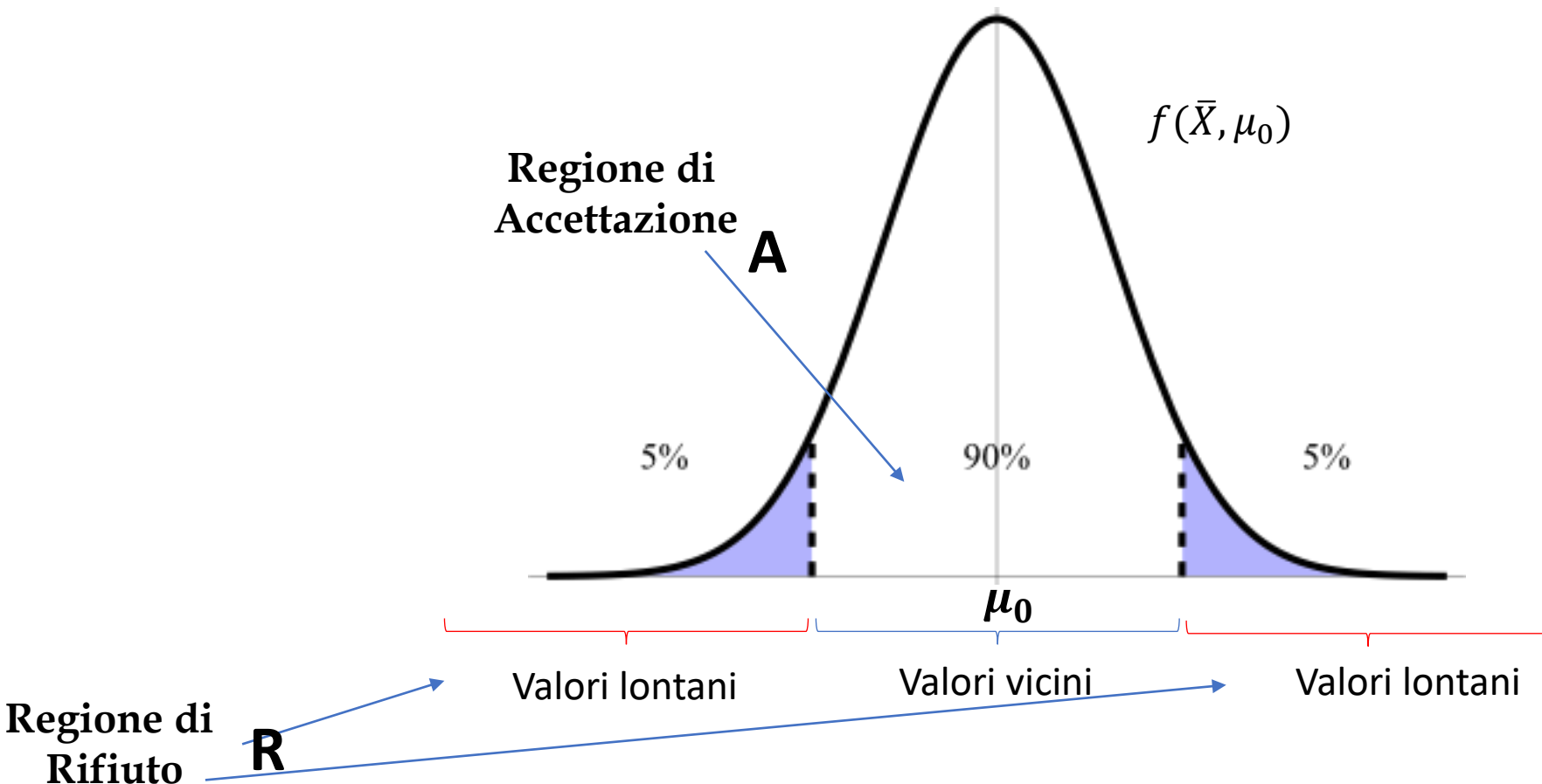
La statistica test crea
una corrispondenza
tra lo spazio
parametrico e lo
spazio campionario



Regione di accettazione e di rifiuto: un esempio

- Si immagini una popolazione $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con media μ da sottoporre a verifica
- Si definisce il seguente sistema di ipotesi sulla media:
$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$
- Sia $\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ la statistica test considerata, sotto l'assunzione che l'ipotesi nulla sia vera

Regione di accettazione e di rifiuto: un esempio (2)

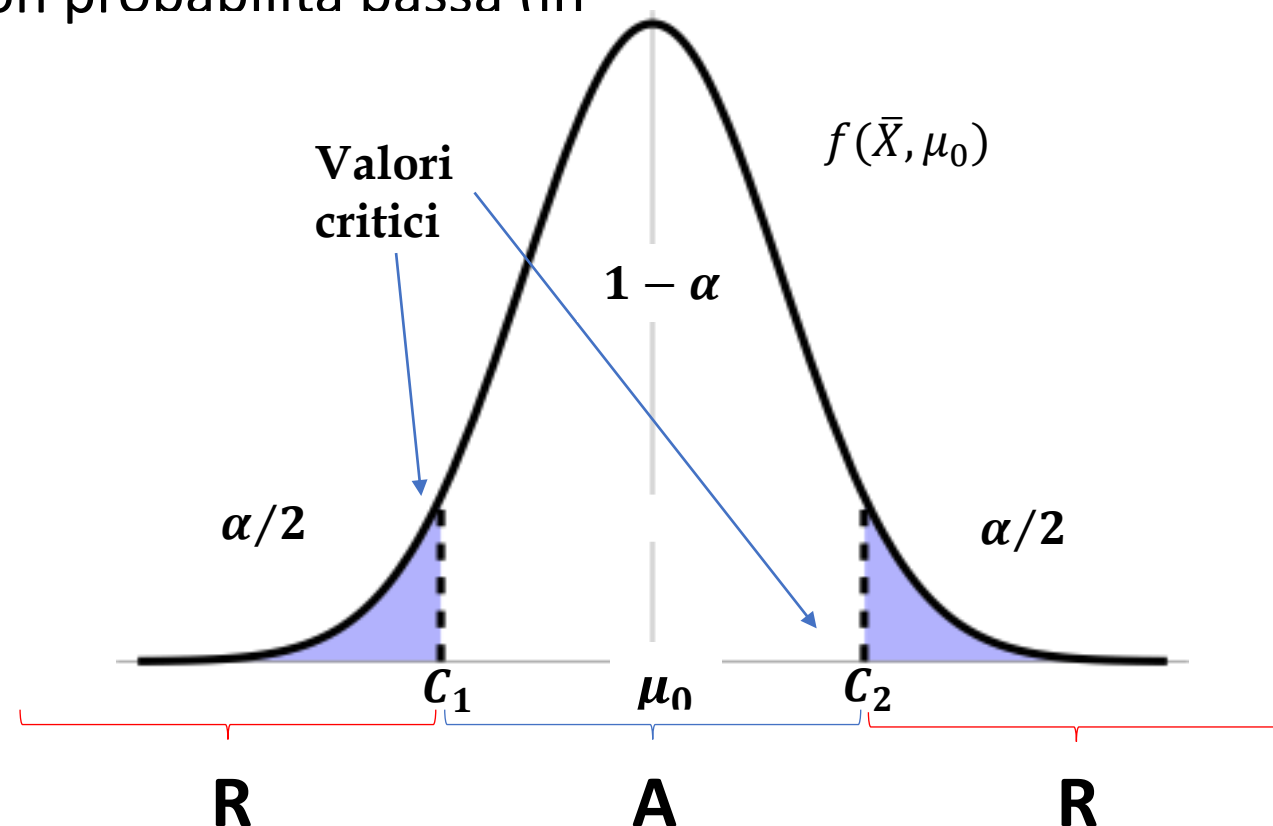


- Se l'ipotesi nulla è vera allora la distribuzione di $\bar{X}$ sarà centrata su μ_0 , cioè $f(\bar{X}, \mu_0)$, e per la maggior parte dei campioni si otterranno valori della statistica test prossimi a μ_0

Regione di accettazione e di rifiuto: un esempio (3)

- In altre parole, la regione di rifiuto è determinata dall'insieme dei campioni a cui sono associati statistiche test che assumono valori nelle code della distribuzione e quindi con probabilità bassa (in questo caso α)

- Le soglie C_1 e C_2 si chiamano **valori critici** e determinano il limite tra le regioni di accettazione e di rifiuto
- La scelta delle soglie è legata alla probabilità α scelta
- Il valore α è detto **livello di significatività del test**



Errori del primo e del secondo tipo

- Nell'eseguire un test statistico si possono distinguere quattro diverse situazioni in cui si evincono due diversi tipi di errore

		Decisione del test	
Stato della realtà		<i>Accetto H_0</i>	<i>Rifiuto H_0</i>
	H_0 è vera	Decisione corretta $1 - \alpha$	Errore di I° tipo E_1 α
	H_0 è falsa	Errore di II° tipo E_2 β	Decisione corretta $1 - \beta$

Errori del primo e del secondo tipo (1)

- α è la probabilità dell'errore del primo tipo, cioè di rifiutare l'ipotesi nulla quando invece questa è vera

$$P(\text{rifiuto } H_0 | H_0) = P(E_1) = \alpha$$

- β è la probabilità dell'errore del secondo tipo, cioè di accettare l'ipotesi nulla quando invece questa è falsa

$$P(\text{accetto } H_0 | \overline{H_0}) = P(E_2) = \beta$$

- $1 - \beta$ è la probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla quando questa è falsa. Essa è detta **potenza del test**

$$P(\text{rifiuto } H_0 | \overline{H_0}) = 1 - \beta$$

Esecuzione di un test statistico: fasi

Nell'approccio classico dei test statistici, l'errore E_1 è ritenuto quello più grave da commettere in quanto esso presuppone la rimozione dello status quo quando non è necessario

Il ricercatore procede quindi nello scegliere una soglia α , ritenuta apriori accettabile
(si fissa il livello di significatività del test)



Da ciò si deriva il valore della soglia critica



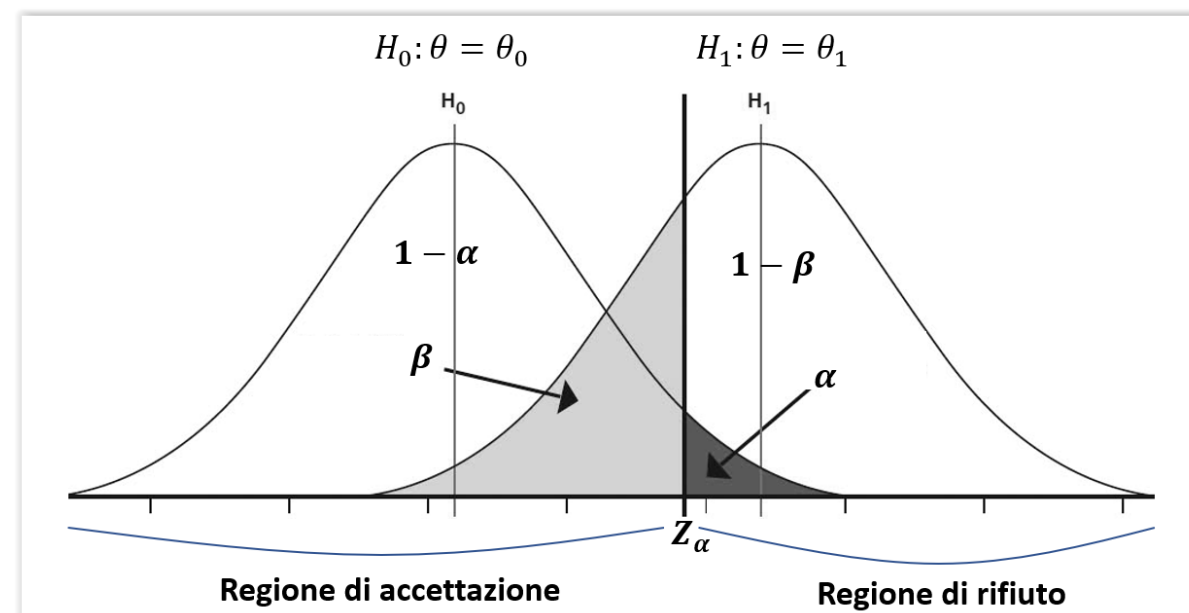
Successivamente da tale soglia si definiscono le
regioni di accettazione e rifiuto



Quindi si estrae il campione



Infine si calcola la statistica test e si prende
la decisione

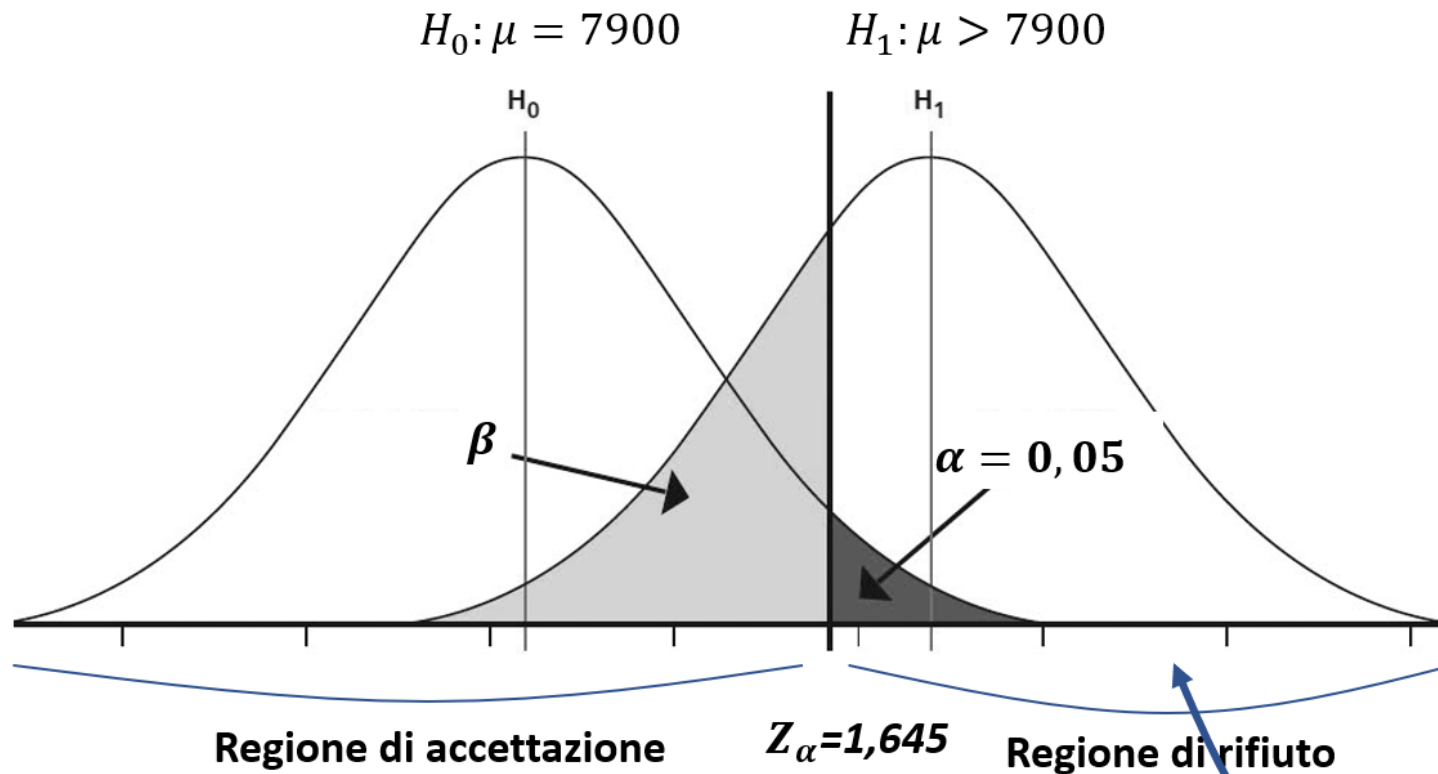


Un esempio passo per passo

Una catena alberghiera vuole verificare se la campagna pubblicitaria abbia effettivamente prodotto un aumento del numero di camere vendute per weekend rispetto alla stagione precedente quando era pari a $\mu = 7900$. Si suppone inoltre che il numero di camere vendute si distribuisce normalmente con $\sigma^2 = 12500$.

1. **Definizione delle ipotesi:** $H_0: \mu = 7900$ contro $H_1: \mu > 7900$
2. **Scelta della statistica test:** si sceglie la media campionaria standardizzata $Z = (\bar{X} - 7900) / (\sqrt{12500/n})$
3. **Scelta del livello di significatività e della numerosità campionaria:** Si fissa ad esempio $\alpha = 0.05$ da cui deriva $Z_\alpha = 1,645$ e si sceglie una dimensione campionaria $n = 50$ alberghi della catena scelti a caso
4. **Definizione della regola di decisione:** $Rd = \begin{cases} \text{Regione di Accettazione: } z < 1,645 \\ \text{Regione di Rifiuto: } z \geq 1,645 \end{cases}$
5. **Estrazione del campione:** si calcola la media campionaria, ottenendo $\bar{x} = 7990$. Il valore della statistica test sarà quindi pari a $z = \frac{(7990 - 7900)}{\left(\sqrt{\frac{12500}{50}}\right)} = 5,69$
6. **Decisione:** siccome il valore della statistica test ricade nella regione di rifiuto allora si può ritenere che il numero di camere vendute sia aumentato (si rifiuta l'ipotesi nulla)

Un esempio passo per passo (2)



$z_{oss} = 5,69$

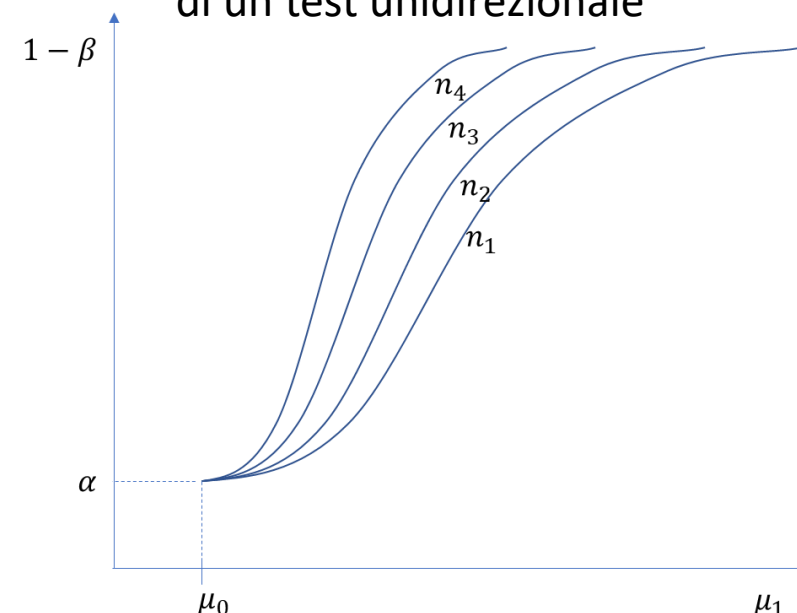
Si rifiuta
l'ipotesi nulla!

La funzione di potenza del test

- La potenza del test corrisponde alla probabilità $1 - \beta$
- Il valore della potenza del test dipende da α e dal valore assunto dall'ipotesi alternativa θ_1 e dalla dimensione campionaria n
- La funzione di potenza del test $\pi(\theta)$ è la funzione che descrive la probabilità $1 - \beta$ al variare del valore dell'ipotesi alternativa

- La potenza raggiunge il suo minimo, pari ad α quando le due ipotesi coincidono (es. $\mu_0 = \mu_1$)
- La potenza cresce al divergere delle due ipotesi
- La pendenza della funzione $\pi(\theta)$ dipende dalla numerosità campionaria, maggiore è n e maggiore sarà $1 - \beta$ a parità delle altre scelte in merito al test

La funzione di potenza del test di un test unidirezionale





UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI NAPOLI FEDERICO II

DiSES

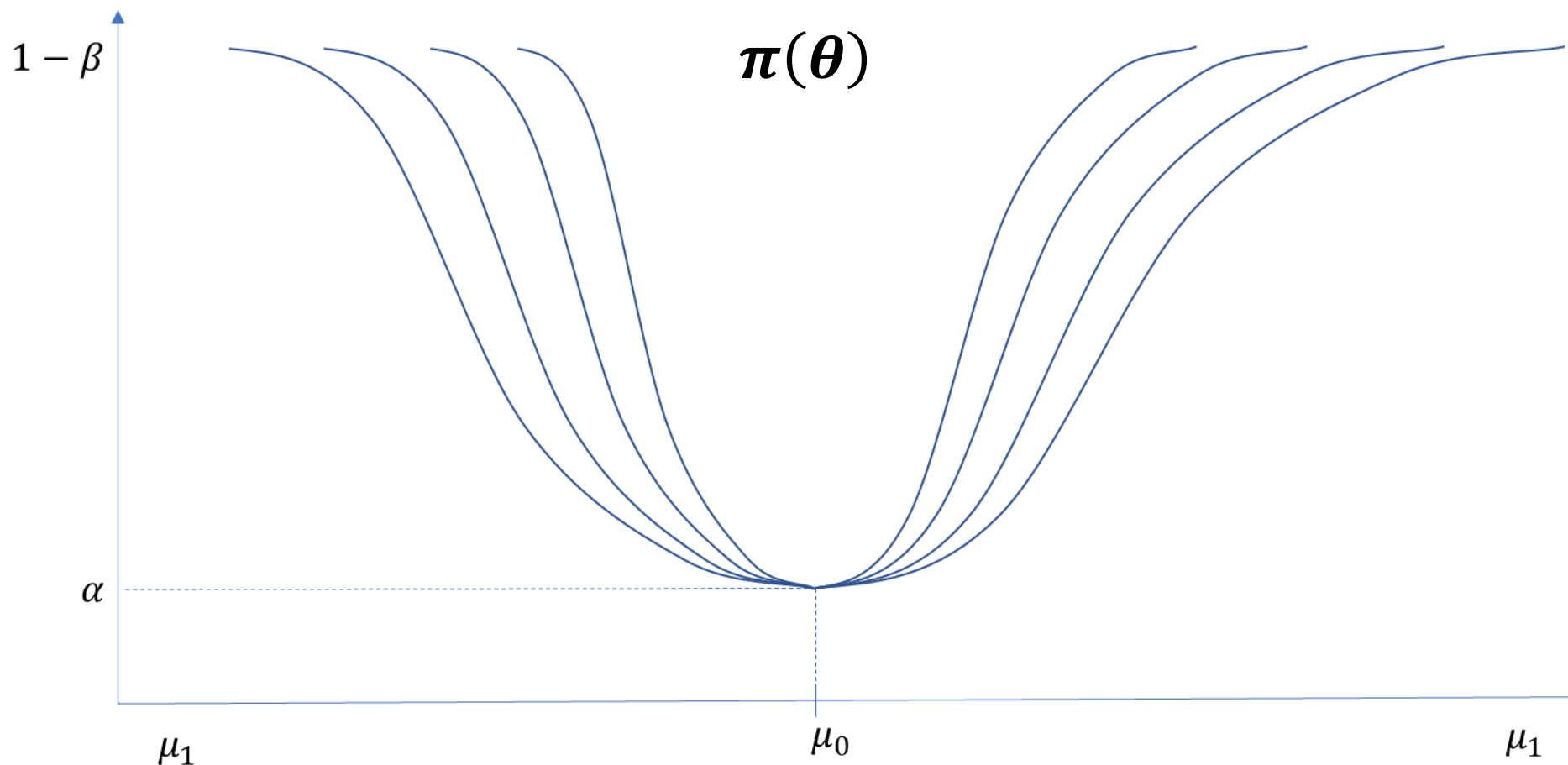
Dipartimento di Scienze Economiche e Statistiche

CdL: SCIENZE DEL TURISMO AD INDIRIZZO MANAGERIALE

Insegnamento: Corso integrato di (Analisi dei Dati e Revenue Management) Modulo di Statistica

Docente: Prof.ssa Maria Spano (maria.spano@unina.it)

La funzione di potenza del test di un test bidirezionale



Test uniformemente più potenti

- Tra tutti i possibili test statistici si preferirà quello che presenta il più piccolo valore sia di α sia di β per ogni possibile valore θ del sottospazio parametrico Θ_1
- L'approccio di Neyman-Pearson, per il quale si fissa α e si sceglie poi la procedura test che minimizza β , conduce alla definizione del **test uniformemente più potente**
- **Un test è detto uniformemente più potente a livello α** se per un dato α

$$\pi^*(\theta) \geq \pi(\theta) \quad \text{per ogni } \theta \in \Theta_1$$

rispetto a qualunque altro test di pari significatività per θ

Test uniformemente più potenti (2)

- Dalla definizione test uniformemente più potente, seguendo l'approccio di Neyman-Pearson si può affermare che:

Un test unidirezionale è uniformemente più potente

rispetto ad un test bidirezionale

effettuato nelle stesse condizioni

(a parità di livello di confidenza, numerosità campionaria, ecc.)

Connessione tra intervalli di confidenza e test

Esiste un importante **legame tra intervalli di confidenza e test di ipotesi**. È possibile costruire test a partire da intervalli di confidenza appropriati

Si consideri il caso del test bidirezionale sulla media di una popolazione normale. La statistica test è:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

H_0 è accettata se la statistica è compresa tra i valori critici

$$-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < z_{\alpha/2}$$

Che equivale a dire che μ_0 sia compreso nell'intervallo di confidenza

$$\bar{X} - z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n} < \mu_0 < \bar{X} + z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}$$

Connessione tra intervalli di confidenza e test

- In altre parole effettuare un test bidirezionale equivale a costruire un intervallo di confidenza e verificare poi se l'ipotesi nulla è compresa o meno nello stesso.
- Nel caso in cui l'ipotesi nulla è compresa nell'intervallo allora si accetterà H_0 ritenendola maggiormente conforme all'osservazione empirica
- Viceversa, se il valore non è compreso nell'intervallo si propenderà per il rifiuto dell'ipotesi nulla.