Geometria e Algebra
Corsi di Laurea Triennale in
Ingegneria Aerospaziale e Ingegneria Meccanica
A.A. 2020/2021, suddivisione A-Dao

Prof. Armando Capasso

Università degli Studi di Napoli "Federico II"
Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

E-mail: `armando.capasso@unina.it`

Note inizali.

1. Gli argomenti indicati tra parentesi quadre *[argomenti]* sono <u>facoltativi</u>.

2. (s.d.) significa "senza dimostrazione".

Teoria ingenua degli insiemi. Idee ingenue di insieme, di ente o elemento, della relazione di appartenenza, di proprietà e di sottoinsieme. L'unione, l'intersezione, la differenza di insiemi *[e loro proprietà]*. Insiemi singoli, coppie (non ordinate) e coppie ordinate. Il prodotto cartesiano di insiemi.

Corrispondenze, funzioni e relazioni. Le corrispondenze di insiemi: definizione, il grafico di una corrispondenza. Le relazioni: definizione, proprietà riflessiva, anti-riflessiva simmetrica, asimmetrica, antisimmetrica e transitiva; esempi. Le relazioni di equivalenza: definizione, esempi, le classi di equivalenza e loro proprietà. Le relazioni d'ordine. Elementi minimi e massimi, minimali e massimali di un insieme ordinato. Esempi. Le funzioni: definizione, dominio e codominio, immagine ed anti-immagine di un elemento e di un sottoinsieme. Funzioni iniettive, suriettive e biettive, gli insiemi equipotenti. L'immagine di un insieme, mediante una funzione iniettiva, è equipotente al dominio. Esempi: la funzione costante, la funzione inclusione di un sottoinsieme, la funzione identità di un insieme. Le permutazioni di un insieme.

Le strutture algebriche. Definizione di operazione interna su insieme. L'elemento neutro di un'operazione interna, e sua unicità; le proprietà associativa e commutativa di un'operazione interna. Definizione di monoide (commutativo); esempi: $(\mathbb{N}_{\geq 0}, +), (\mathbb{Z}, \cdot)$. Elementi invertibili; unicità dell'elemento inverso, in un monoide. I gruppi (abeliani); i gruppi simmetrici o delle permutazioni di un insieme. Esempi: $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}[x]_{\leq d}, +)$ e $(\mathrm{Sym}(3), \circ)$. Gli anelli commutativi unitari; esempi: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$. I campi; esempi: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Le operazioni esterne (destre e sinistre) di una struttura algebrica; esempi: $(\mathbb{R}; \mathbb{R} \setminus \{0\}, /)$. Le sottostrutture algebriche, i sottogruppi; esempi: $(\{-1, 1\}, \cdot)$ è un sottogruppo di $(\mathbb{Z}, \cdot)$, mentre $(\{0\}, \cdot)$ è solo una sua sottostruttura algebrica.

Gli spazi vettoriali. Definizione; esempi: $(\mathbb{R}^n, +; \mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{R}[x], +; \mathbb{R}, \cdot)$. Proprietà degli spazi vettoriali. I sottospazi vettoriali. Esempi: $(\mathbb{Q}, +; \mathbb{Q}.\cdot)$ è uno spazio vettoriale (razionale) ma non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}$*[; $]0,1[$ è strutturabile a spazio vettoriale (reale) ma non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}$]*. Le intersezione di sottospazi vettoriali. Le combinazioni lineari di vettori. La convenzione degli indici ripetuti o di Einstein. Caratterizzazioni dei sottospazi vettoriali. Sottospazio vettoriale generato da un insieme, e sua caratterizzazione. Somma (finita) di sottospazi vettoriali e sue proprietà. Somma diretta (finita) di sottospazi vettoriali, e sue proprietà. Sistemi di generatori, in particolare minimali. Sistemi (finiti) di vettori linearmente indipendenti o liberi, in particolare massimali; e linearmente dipendenti o legati; proprietà. Le somme dirette e i sistemi liberi. Esempi: $\{\underline{0}\}$ e $\{\underline{v}\}$ con $\underline{v} \neq \underline{0}$. Definizioni equivalenti di base (di uno spazio vettoriale). Teorema della Base (s.d.) Esempi: le basi canoniche di $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}[x], \mathbb{R}[x]_{\leq d}$; sola esistenza della base di $(\mathbb{R}, +; \mathbb{Q}, \cdot)$. Basi ordinate e i sistemi di riferimento vettoriali. *[Esempio: lo spazio vettoriale delle successioni a valori reali $(\mathbb{R}^\infty, +; \mathbb{R}, \cdot)$, e il problema delle coordinate dei suoi elementi.]* I lemmi di Steinitz. Il metodo degli scarti successivi. Teorema dell'equipotenza delle basi di uno spazio vettoriale: dimostrazione nel solo caso finito-dimensionale. La dimensione di uno spazio vettoriale. Proprietà della dimensione dei sottospazi vettoriali. Formula di Graßmann, e dimensione delle somme dirette. Rappresentazioni parametrica e cartesiana di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Il teorema di classificazione degli spazi vettoriali di dimensione finita.

Le matrici. Definizione. Matrici trasposte. Matrici quadrate, simmetriche ed antisimmetriche, triangolari inferiori e superiori. Le sottomatrici. Rango per righe e per colonne. Teorema del Rango. Il rango di una matrice è minore o uguale al minimo tra il numero delle righe ed il numero delle colonne. Invarianza del rango per permutazioni e per trasposizioni. Una matrice ha rango 0 se e solo se è la matrice nulla. Rango delle sottomatrici. Le trasformazioni elementari o mosse di Gauß. Ogni matrice è triangolarizzabile, e il rango di una matrice triangolare ridotta. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n_m$ delle matrici di tipo $[m, n]$, dimensione e la base canonica. Il prodotto righe per colonne di matrici. L'anello unitario non commutativo delle matrici quadrate. La matrice identità. Il simbolo di Kronecker. Le matrici invertibili: definizione. Le matrici simili. Le matrici ortogonali. La traccia di una matrice.

I sistemi di equazioni lineari. Definizioni. Lo spazio vettoriale delle soluzioni di un sistema di m equazioni lineari omogenee in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Rappresentazione matriciale. Sistemi di equazioni lineari ridotti, e invarianza dell'insieme delle soluzioni rispetto alla riduzione. Il teorema di Rouché-Capelli: compatibilità di un sistema di equazioni lineari, le variabili libere e la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenee. Un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n-m$ è l'insieme delle soluzioni di un sistema di m equazioni lineari omogenee in n incognite.

Applicazioni lineari. Gli omomorfismi od applicazioni lineari di spazi vettoriali. Esempi di applicazioni lineari: il morfismo nullo; l'identità; il prodotto per uno scalare; le inclusioni di sottospazi vettoriali; la trasposizione di una matrice; la derivata e l'integrale di un polinomio; valutazione di un polinomio*[; traslazioni destra e sinistra di una successione di numeri reali]*. Un'applicazione tra spazi vettoriali è lineare se e solo se trasforma le combinazioni lineari di vettori del dominio nelle combinazioni lineari dei vettori immagini del codominio. Il *kernel* di un'applicazione lineare è un sottospazio vettoriale del dominio. un'applicazione lineare è iniettiva se e solo se il nucleo è banale. L'insieme immagine di un'applicazione lineare è un sottospazio vettoriale del codominio. Il teorema fondamentale delle applicazioni lineari.

Un'applicazione lineare iniettiva trasforma una base in un sistema libero di vettori. Un'applicazione lineare suriettiva trasforma una base in un sistema di generatori. Un'applicazione lineare biettiva trasforma una base in una base. Monomorfismi lineari, epimorfismi lineari ed isomorfismi lineari. Rappresentazione di un'applicazione lineare rispetto a delle basi ordinate. Applicazione lineare associata a una matrice, e sua unicità rispetto a dei fissati riferimenti vettoriali. Endomorfismi lineari ed automorfismi lineari. Il cambio di sistema di riferimento vettoriale. Il cambio di rappresentazione di un'applicazione lineare. La composizione di applicazioni lineari e il prodotto di matrici. Formula nullità più rango.

Gli spazi vettoriali euclidei. Le forme n-lineari: definizione. Le forme 2-lineari del tipo $s : (\underline{v}, \underline{w}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \underline{v}^T \times A \times \underline{w} \in \mathbb{R}$, ove $A \in \mathbb{R}^n_n$. Teorema di rappresentazione delle forme 2-lineari (s.d.) I prodotti scalari: definizione. Il prodotto scalare *standard* su $\mathbb{R}^n$. Spazi vettoriali euclidei. $\mathbb{R}^n$ col prodotto scalare *standard* come esempio di spazio vettoriale euclideo. Definizione di vettori ortogonali. Un insieme di vettori ortogonali non nulli sono un sistema libero. Il complemento ortogonale di un insieme è un sottospazio vettoriale. Il complemento ortogonale di un sistema di vettori è uguale al complemento ortogonale dello spazio vettoriale che esso genera. Un sottospazio vettoriale (euclideo) è in somma diretta col suo complemento ortogonale. Basi ortonormali: definizione, l'algoritmo di Gram-Schmidt (s.d.) e loro esistenza nel caso finito-dimensionale (s.d.) Le righe\colonne di una matrice ortogonale formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ (rispetto al prodotto scalare standard). Le matrici ortogonali e i cambi di sistemi di riferimento ortonormali. Definizione di isometria lineare di uno spazio vettoriale euclideo. Uno spazio vettoriale euclideo finito-dimensionale è somma diretta di ogni suo sottospazio vettoriale e del suo complemento ortogonale. Ogni sottospazio vettoriale è contenuto nel suo doppio complemento ortogonale, e sono uguali nel caso finito-dimensionale. *[Lo spazio vettoriale euclideo delle successioni a quadrato sommabile, e il doppio complemento ortogonale del sottospazio vettoriale delle successioni a supporto finito.]* Le diseguaglianze di Cauchy-Schwarz e di Hölder-Minkowski.

Il determinante di una matrice quadrata. Forme n-lineari alternanti. Proprietà delle forme alternanti: se due vettori sono uguali allora la forma si annulla; se un vettore è combinazione lineare degli altri vettori, allora la forma si annulla. Il teorema di esistenza e unicità del determinante di una matrice quadrata (s.d.) Formula esplicita del determinante (s.d.) Il determinante di una matrice è uguale al determinante della sua trasposta (s.d.) Il teorema di Binét (s.d.) Una matrice invertibile ha determinante non nullo. Una matrice a determinante non nullo è invertibile (s.d.) Il complemento algebrico di un elemento di una matrice quadrata. Le formule di Laplace per il determinante (s.d.) Una matrice ha rango massimo se e solo se ha determinante diverso da 0. Il determinante di una matrice triangolare è il prodotto degli elementi sulla diagonale. Il discriminante di un'equazione di secondo grado come determinante di una matrice simmetrica di ordine 2. Il determinante delle matrici ortogonali.

La diagonalizzazione degli endomorfismi lineari. Definizione di endomorfismo lineare diagonalizzabile. Definizione di autovalore, autovettore ed autospazio (relativo ad un autovalore) di un endomorfismo lineare. Esempi: il *kernel* di un endomorfismo lineare come autospazio relativo all'autovalore 0. Ogni autovettore è associato a un unico autovalore. Gli autospazi di un endomorfismo lineare sono in somma diretta. *[Esempi: traslazioni destra e sinistra di una successione di numeri reali].* Un endomorfismo lineare è diagonalizzabile se e solo se la somma (diretta) dei suoi autospazi è lo spazio vettoriale ambiente. Un endomorfismo lineare è diagonalizzabile se e solo se esiste una base dello spazio vettoriale ambiente formata da soli autovettori. Molteplicità geometrica di un autovalore. Una matrice ammette autovettori

λ se e solo se la matrice $A - \lambda I_n^n$ non ha rango massimo. Il polinomio caratteristico di una matrice quadrata; il calcolo degli autovalori, e dei relativi autovettori ed autospazi. Invarianza del polinomio caratteristico di una matrice, rispetto alle basi di rappresentazione. Molteplicità algebrica di un autovalore. Diseguaglianza tra le molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Una matrice è diagonalizzabile se e solo se le molteplicità algebriche e geometriche dei suoi autovalori coincidono. Formula generale del polinomio caratteristico delle matrici di ordine 2. Il polinomio caratteristico di una matrice quadrata di ordine n: traccia e determinante come suoi termini di grado, rispettivamente, $n-1$ e 0. Il teorema spettrale (in dimensione finita) (s.d.)

Geometria affine (euclidea). I punti (affini); i vettori applicati e i vettori liberi. Biezioni tra l'insieme dei vettori applicati $\mathcal{W}_O^n$ in un punto O, i vettori liberi $\mathcal{V}^n$ ed $\mathbb{R}^n$. Il punto medio di due punti: definizione, esistenza e unicità. Lo spazio vettoriale $\mathcal{V}^n$ dei vettori liberi. Gli isomorfismi canonici degli spazi vettoriali dei vettori liberi ed applicati con $\mathbb{R}^n$. Lo spazio affine reale di dimensione n. Indipendenza della definizione di spazio affine dallo spazio direttore. Esempio: lo spazio affine reale canonico $\mathbb{A}^n$ di dimensione n. Formalizzazione della frase "un punto sta tra due punti". I segmenti. Lo spazio vettoriale $\mathcal{W}_O^n$ dei vettori applicati in un punto O. I sistemi di riferimento affini. Le coordinate dei punti, del punto medio di due punti. Spazio direttore di uno spazio affine, esistenza ed unicità (s.d.); direzione di una retta, giacitura di un piano. Le varietà lineari affini: definizione, dimensione. Esempi: il vuoto, il punto, la retta, il piano e gli iperpiani come varietà lineari affini di dimensioni, rispettivamente, -1, 0, 1, 2 ed $n-1$. Esistenza ed unicità della retta passante per due punti distinti. Il punto medio e i punti tra due punti distinti di una retta sono punti della retta medesima. Definizione di tre punti non allineati. Esistenza ed unicità del piano passante per tre punti non allineati. Un sottoinsieme S di $\mathbb{A}^n$ è una varietà lineare affine se e solo se S è vuoto oppure contiene le rette passanti per i suoi punti. Varietà lineari affini parallele: definizione. Le varietà lineari affini parallele sono disgiunte oppure l'una è contenuta nell'altra. Per ogni varietà lineare affine, e per ogni punto non appartenente ad essa, esiste un'unica varietà lineare affine, di medesima dimensione, parallela alla prima e passante per il dato punto. L'intersezione di varietà lineari affini. La varietà lineari affini sghembe. Rappresentazioni parametrica e cartesiana di una varietà lineare affine. L'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari è una varietà lineare affine, e l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato è lo spazio direttore della medesima. Spazi affini euclidei: definizione. I sistemi di riferimento affini ortonormali. Distanza di due punti: proprietà, in particolare la diseguaglianza triangolare. Il teorema di Pitagora. I numeri direttori di una retta affine ed angolo di rette. L'iperpiano asse di due punti. Varietà lineari affini ortogonali di dimensioni complementari. Esistenza ed unicità della varietà lineare affine ortogonale a una varietà lineare affine data passante per un punto, di dimensioni complementari. Varietà lineari affini ortogonali di dimensioni complementari non sono disgiunte. Delle rette affini sono ortogonali se e solo se i loro numeri direttori sono ortogonali. Le rette in varietà lineari affini ortogonali di dimensioni complementari, sono anch'esse ortogonali. Delle varietà lineari affini sono ortogonali se e solo se l'una è parallela alle rette ortogonali all'altra.

Geometria affine (euclidea) in $\mathbb{A}^2$ ed $\mathbb{A}^3$. In $\mathbb{A}^2$ per ogni retta e punto esterno ad essa esiste ed è unica la retta parallela alla retta data e passante per il dato punto, ovvero il postulato di Playfair. Intersezioni di rette in $\mathbb{A}^2$ ed $\mathbb{A}^3$; intersezioni di piani in $\mathbb{A}^3$; intersezioni di rette e piani in $\mathbb{A}^3$. I fasci di rette in $\mathbb{A}^2$. Per ogni coppia di rette sghembe e per ogni punto non appartenente ad esse, esiste un'unica retta passante per tale punto ed intersecante le rette date. L'asse di un segmento è ortogonale al segmento. Unicità ed esistenza della retta ortogonale ed incidente a due rette sghembe in $\mathbb{A}^3$.

Le coniche.

*[**Applicazioni dell'algebra lineare alla fisica matematica.** Moto di rotolamento senza strisciamento di una circonferenza su una retta.]*

Riferimenti bibliografici

[1] M. Brundu, G. Landi - *Note di Algebra e Geometria.*
Università degli Studi di Trieste. A.A. 2014/2015
`https://dmi.units.it/geo-ing/materiale_did/mater_corso/progr_disp.html`

[2] M. Brundu, G. Sacchiero (1997) *Algebra Lineare e Geometria. Teoria ed Esercizi.*
Edizioni Goliardiche

[3] M. Brunetti (2012) *Esercizi di Algebra Lineare e Geometria, 2a edizione.* Edises

[4] A. Capasso - *Materiale didattico.* Università degli Studi di Napoli "Federico II"
`https://www.docenti.unina.it/armando.capasso`

[5] C. Carrara - *Esercizi di Algebra Lineare.* Università degli Studi di Trento.
`https://www.science.unitn.it/~carrara/ESERCIZIARIO/riunisci.pdf`