SUCCESSIONI IN R

esercizi

R. Argiolas

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=?$$

Questa piccola raccolta di esercizi sulle successioni nel campo dei reali è rivolta a tutti gli studenti del corso di analisi matematica I, ma è bene precisare fin da ora che possedere e svolgere gli esercizi di questa dispensa **non è condizione né necessaria né sufficiente per il superamento dell'esame stesso. Questa dispensa non sostituisce il libro di testo adottato, ne sostituisce le esercitazioni svolte dal docente. Questa dispensa è solo di supporto a tutti coloro che vogliano approfondire la loro preparazione all'esame con ulteriori esercizi oltre quelli del libro di testo suggerito dal docente.**
In questa dispensa sono stati raccolti alcuni degli esercizi svolti a lezione e assegnati alle prove scritte, sono quindi esercizi che possono trovarsi in un qualsiasi testo di analisi matematica del primo anno del corso di studi. Lo scopo della dispensa è di fornire una guida per la soluzione degli esercizi.
Rispetto alla versione precedente (Successioni nel campo reale, anno accademico 2002/2003) sono stati aggiunti anche alcuni grafici che evidenziano l'andamento della successione e sono stati aggiunti esempi di successioni da risolvere sfruttando le stime asintotiche.
Ringrazio anticipatamente tutti coloro che vorranno segnalarmi eventuali errori presenti nella dispensa e darmi utili suggerimenti per migliorare il mio lavoro.

R.A.

N.B. Il limite di una successione si calcola SEMPRE per $n \to +\infty$. Mi sono accorto che in diversi esercizi presenti nella dispensa ho omesso erroneamente il segno "+" davanti al simbolo di infinito, ma tutti i limiti vanno intesi come calcolati per $n \to +\infty$.

Alcuni Richiami Teorici

Operazioni sui limiti di successioni

Siano a_n, b_n due successioni convergenti rispettivamente a $a,\ b \in \Re$, allora valgono le seguenti operazioni:

A. $a_n + b_n \to a + b$

B. $a_n - b_n \to a - b$

C. $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

D. $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$ se $b \neq 0$

Valgono inoltre le seguenti proprietà per successioni divergenti:

$a + \infty = +\infty$
$a - \infty = -\infty$
$+\infty + \infty = +\infty$
$-\infty - \infty = -\infty$
$a \cdot \infty = \infty$ $\quad$ $a \neq 0$
$\dfrac{a}{0} = \infty$ $\quad$ $a \neq 0$
$\dfrac{a}{\infty} = 0$

Limiti di successioni:

Dovendo calcolare il limite di una successione che si presenta come polinomio nella variabile n è facile verificare che l'andamento della successione dipende dal termine con esponente maggiore.

1. Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\left(4n^2-3n+5\right)$

soluzione

$$\lim_{n\to+\infty}\left(4n^2-3n+5\right)=\left[\infty-\infty\right]=\lim_{n\to\infty}n^2\left(4-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}\right)=+\infty$$

2. Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\left(-2n^4-3n^2+5n^3-1\right)$

soluzione

$$\lim_{n\to\infty}\left(-2n^4-3n^2+5n^3-1\right)=\lim_{n\to\infty}n^4\left(-2-\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^4}\right)=-\infty$$

3. Calcolare $\lim_{n\to\infty}\left(2n^5-3n^4+5n^3+7n^2-8n+4\right)$

soluzione

$$\lim_{n\to\infty}\left(2n^5-3n^4+5n^3+7n^2-8n+4\right)=\lim_{n\to\infty}n^5\left(2-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{7}{n^3}-\frac{8}{n^4}+\frac{4}{n^5}\right)=+\infty$$

Forme indeterminate

Osservazione

Dire che un dato limite presenta una ***forma indeterminata*** non significa dire che il limite non esiste ma significa che esso non è immediatamente calcolabile utilizzando le operazioni tipiche dei limiti.

Le forme indeterminate:

$+\infty-\infty$	$0\cdot\infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$
$1^{\pm\infty}$	0^0	$(+\infty)^0$	

Quando si vuole determinare il limite del rapporto tra due successioni ognuna costituita dalla somma di potenze di n, è utile, talvolta, dividere numeratore e denominatore per la potenza maggiore.
Si ricordi inoltre che:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha>0 \\ 1 & \text{se } \alpha=0 \\ 0 & \text{se } \alpha<0 \end{cases}$$

Quando si vuole calcolare il limite di una successione è sempre meglio verificare prima se presenta una forma indeterminata.

Esercizi

4. Calcolare $\lim_{n\to\infty}\frac{n-3}{2n+4}$

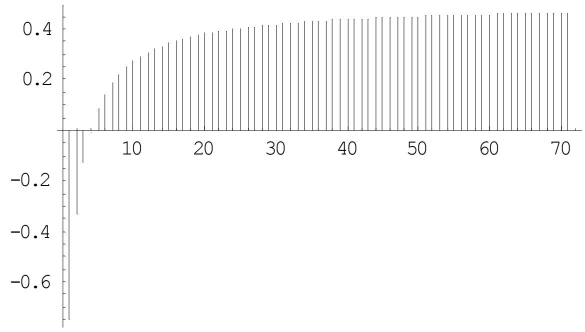
soluzione

Verifichiamo prima la presenza di una forma indeterminata, passiamo poi al calcolo del limite mettendo in evidenza a numeratore e denominatore.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-3}{2n+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\frac{3}{n}\right)}{n\left(2+\frac{4}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{3}{n}\right)}{\left(2+\frac{4}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2}$$

Ricordiamo che il limite di una costante è la costante stessa.

Il seguente grafico evidenzia l'andamento della successione per valori di n da 1 a 70.



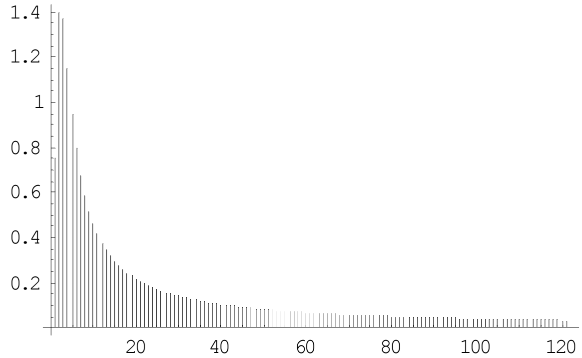
5. Calcolare $\lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{n^2+4}$

soluzione

Il procedimento è analogo all'esercizio precedente.
Si ha:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{n^2+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(4+\frac{3}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(4+\frac{3}{n}\right)}{n\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\infty}=0$$

Il seguente grafico indica l'andamento della successione per valori di n da 0 a 120.



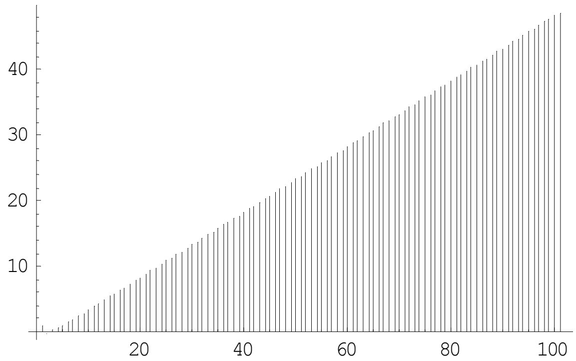
6. Calcolare $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+1}{2n+1}$

soluzione

Si ha che:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+1}{2n+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\infty}{2}=+\infty$$

Il seguente grafico indica l'andamento della successione per valori di n da 0 a 100.



7. Calcolare $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-5n+2}{3n^2+4n+5}$

soluzione

Si ottiene:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-5n+2}{3n^2+4n+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1-\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}=\frac{1}{3}$$

8. Calcolare $\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)}{n+9}$

soluzione

Si ha che:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)}{n+9}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{9}{n}\right)}=+\infty$$

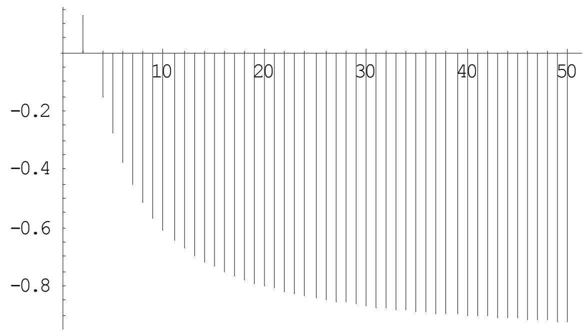
9. Calcolare $\lim_{n\to\infty}\frac{(1-n)(n-3)}{n^2+4}$

soluzione

Si ottiene:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1-n)(n-3)}{n^2+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}=-1$$

Il grafico della successione per grandi valori di n



10. Calcolare $\lim_{n\to\infty}\frac{n-3}{n^3-4}$

soluzione

Si ottiene:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-3}{n^3-4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\frac{3}{n}\right)}{n^3\left(1-\frac{4}{n^3}\right)}=0$$

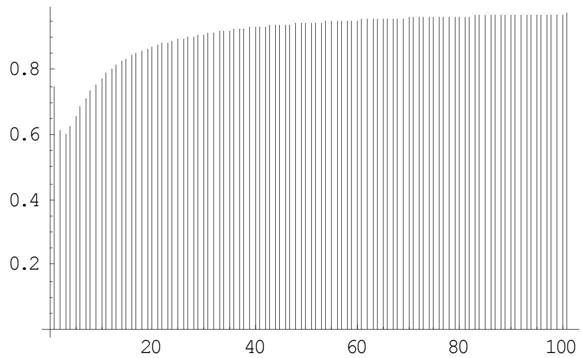
11. Calcolare $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5}}{n+3}$

soluzione

Si ottiene:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5}}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}=1$$

Il seguente grafico evidenzia l'andamento della successione per grandi valori di n.

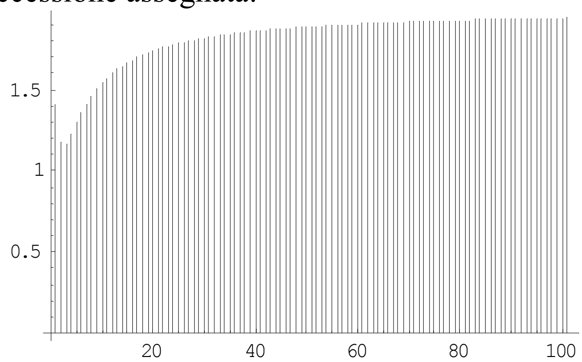


12.Calcolare $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5}+\sqrt{n^2+4}}{n+3}$

soluzione

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5}+\sqrt{n^2+4}}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}\right)}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}=2$$

Grafico della successione assegnata:



13. Calcolare $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n^2+2}}$

soluzione

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n^2+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}{n\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}=0$$

14. Calcolare $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^3+2}}{2\sqrt{1+n^3}}$

soluzione

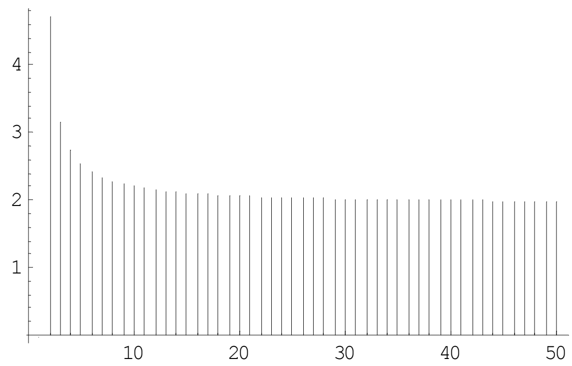
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^3+2}}{2\sqrt{1+n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^3}}\right)}{2n^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{n^3}+1}}=\frac{1}{2}$$

15. Calcolare $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n+5}+\sqrt{n}}{\sqrt{2n-3}}$

soluzione

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n+5}+\sqrt{n}}{\sqrt{2n-3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{3+\frac{5}{n}}+1\right)}{\sqrt{n}\sqrt{2-\frac{3}{n}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$$

Grafico della successione:



Osservazione

Un procedimento per risolvere limiti che si presentano sotto forma indeterminata $\infty-\infty$, consiste nel far passare al numeratore l'irrazionalità del denominatore e viceversa, con procedimenti analoghi a quelli che si usano per razionalizzare le espressioni algebriche.

Ricordiamo che per razionalizzare la quantità: $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

basta moltiplicare numeratore e denominatore per la stessa quantità cambiata di segno:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b},$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}.$$

Si procede in modo analogo se si vuole razionalizzare il numeratore:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\ ,$$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\ .$$

Esercizi

16.Calcolare $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n+5}-\sqrt{n}\right)$

soluzione

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n+5}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{3n+5}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{3n+5}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{3n+5}+\sqrt{n}\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{\left(\sqrt{3n+5}+\sqrt{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2+\dfrac{5}{n}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{3+\dfrac{5}{n}}+1\right)}=+\infty$$

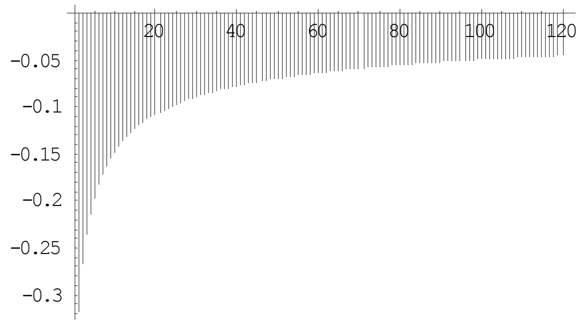
17.Calcolare $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{2+n}\right)$

soluzione

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+2\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{2+n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{2+n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{2+n}\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{2+n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{\dfrac{2}{n}+1}\right)}=0$$

Grafico della successione

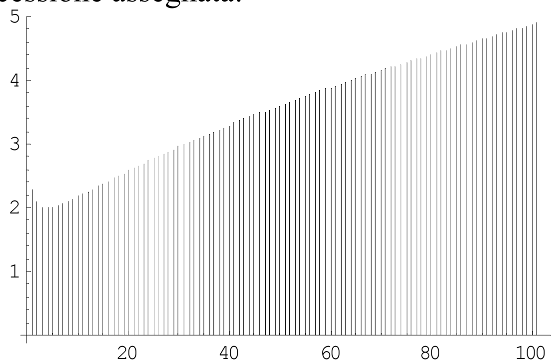


18.Calcolare $\lim_{n\to\infty}\left(2\sqrt{3n+7}-3\sqrt{1+n}\right)$

soluzione

$$\lim_{n\to\infty}\left(2\sqrt{3n+7}-3\sqrt{1+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2\sqrt{3n+7}-3\sqrt{1+n}\right)\left(2\sqrt{3n+7}+3\sqrt{1+n}\right)}{\left(2\sqrt{3n+7}+3\sqrt{1+n}\right)}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+19}{\left(2\sqrt{3n+7}+3\sqrt{1+n}\right)}=+\infty$$

Grafico della successione assegnata:



19. Calcolare $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{2+n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+3}}$

soluzione

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{2+n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+3}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{2+n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{2+n}\right)}{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+3}\right)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+3}\right)}\cdot\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{2+n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{2+n}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}+1}\right)}{\sqrt{n}\left(1+\sqrt{\frac{3}{n}+1}\right)}=\frac{1}{3}$$

20.Calcolare $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2}-\sqrt{1+n^2}}{\sqrt{n^2+9}-\sqrt{n^2+3}}$

soluzione

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{1+n^2}}{\sqrt{n^2+9}-\sqrt{n^2+3}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{1+n^2}\right)\left(\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{1+n^2}\right)}{\left(\sqrt{n^2+9}-\sqrt{n^2+3}\right)\left(\sqrt{n^2+9}+\sqrt{n^2+3}\right)}\cdot\frac{\sqrt{n^2+9}+\sqrt{n^2+3}}{\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{1+n^2}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{6}\cdot\frac{\sqrt{n^2+9}+\sqrt{n^2+3}}{\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{1+n^2}}=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(\sqrt{1+\frac{9}{n^2}}+\sqrt{\frac{3}{n^2}+1}\right)}{n\left(\sqrt{2+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}\right)}=+\infty$$

Teorema di unicità del limite:

"Se il limite di una successione esiste, questo è unico."

Si consideri la successione $a_n = (-1)^n$, a seconda del valore assunto da n (ad esempio se pari o dispari) la successione assume rispettivamente i valori 1 e –1, quindi il limite di tale successione, non essendo unico, non esiste.
Utilizzando questo procedimento si può andare a stabilire se un limite esiste o meno.

Esercizi

Determinare quale delle seguenti successioni hanno limite:

21. $a_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n-1}$

soluzione

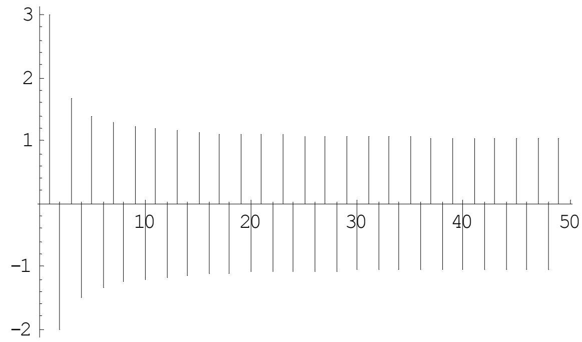
Se il limite di una successione esiste questo deve essere unico. Studiamo quindi il comportamento della successione per differenti valori di n.

$a_n = \dfrac{n+1}{n-1} \to 1$ per n pari

$\Rightarrow$ il limite, non essendo unico, non esiste

$a_n = -\dfrac{n+1}{n-1} \to -1$ per n dispari

Grafico della successione:



22. $a_n = (-1)^n \dfrac{n^3+2}{n}$

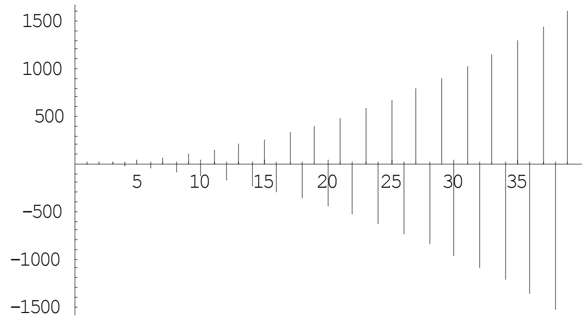
soluzione

$$a_n = \frac{n^3+2}{n} \to +\infty \qquad \text{per n pari}$$

$\Rightarrow$ il limite, non essendo unico, non esiste

$$a_n = -\frac{n^3+2}{n} \to -\infty \qquad \text{per n dispari}$$

Il grafico della successione è il seguente:



23. $a_n = (-1)^n \dfrac{n^2+2n+1}{n+4}$

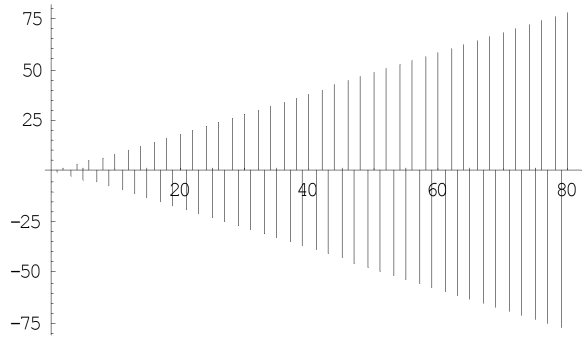
soluzione

$$a_n = \frac{n^2 + 2n + 1}{n + 4} \to +\infty \qquad \text{per n pari}$$

$\Rightarrow$ il limite, non essendo unico, non esiste

$$a_n = -\frac{n^2 + 2n + 1}{n + 4} \to -\infty \qquad \text{per n dispari}$$

Grafico della successione:



24. $a_n = \frac{(-1)^n n + 3n}{n - 1}$

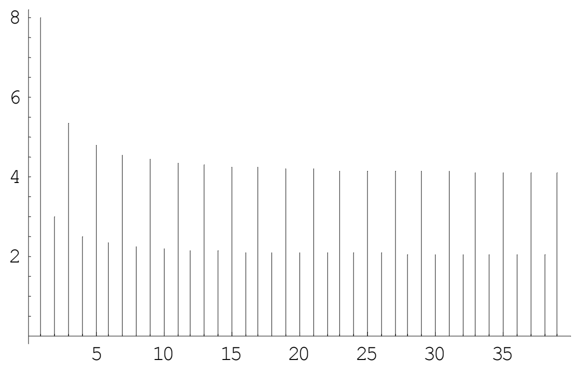
soluzione

$$a_n = \frac{n + 3n}{n - 1} = \frac{4n}{n - 1} \to 4 \qquad \text{per n pari}$$

$\Rightarrow$ il limite, non essendo unico, non esiste

$$a_n = \frac{-n + 3n}{n - 1} = \frac{2n}{n - 1} \to 2 \qquad \text{per n dispari}$$

Il grafico della successione è il seguente:



25. $a_n = \dfrac{(-1)^n n^2 + 3n^2 + 1}{n^2 + 6}$

soluzione

$a_n = \dfrac{n^2 + 3n^2 + 1}{n^2 + 1} = \dfrac{4n^2 + 1}{n^2 + 1} \to 4$ per n pari

$\Rightarrow$ il limite, non essendo unico, non esiste

$a_n = \dfrac{-n^2 + 3n^2 + 1}{n^2 + 1} = \dfrac{2n^2 + 1}{n^2 + 1} \to 2$ per n dispari

26. $a_n = \dfrac{(-1)^n n - 4n^2 + 7}{3n^2 - 8}$

soluzione

$a_n = \dfrac{(-1)^n n - 4n^2 + 7}{3n^2 - 8} = \dfrac{-4n^2 + n + 7}{3n^2 - 8} \to \dfrac{-4}{3}$ per n pari

$\Rightarrow$ il limite, essendo unico, esiste

$a_n = \dfrac{(-1)^n n - 4n^2 + 7}{3n^2 - 8} = \dfrac{-4n^2 - n + 7}{3n^2 - 8} \to \dfrac{-4}{3}$ per n dispari

Alcuni limiti notevoli

Il numero di Nepero

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Osservazione

Il limite notevole, detto di Nepero, così come tutti i limiti notevoli, può essere applicato quando la successione di cui dobbiamo calcolare il limite soddisfa le "condizioni" del limite di Nepero. Supponiamo sia assegnato il seguente esercizio:

Esempio 1

Calcolare: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^n$

Questo limite, sebbene ricordi il limite notevole di Nepero, **non ha** la struttura del limite di Nepero, infatti la successione che si trova a denominatore (all'interno della parentesi tonda)è differente dalla successione che si trova ad esponente. **Non possiamo** quindi applicare **direttamente** il limite di Nepero, possiamo però operare dei piccoli "trucchi" che ci permettono di ricondurre il limite assegnato al limite notevole di Nepero.
Per poter applicare il limite notevole basterebbe che l'esponente fosse, non la successione n, ma bensì la successione n+3, possiamo allora scrivere, senza modificare il testo, in questo modo:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+3}\right)^{\frac{n}{n+3}}$$

Calcolando separatamente il limite della base e il limite dell'esponente si ottiene:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+3}=e \quad \text{(questo è proprio il limite notevole desiderato!)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+3}=1$$

Da quanto detto sopra segue che:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+3}\right)^{\frac{n}{n+3}}=e^{1}=e$$

Esempio 2

Calcolare $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5n+6}{n^2-9n+20}\right)^{2n-1}$

Svolgimento

Conviene inizialmente operare le divisione polinomiale tra numeratore e denominatore

$$\frac{n^2-5n+6}{n^2-9n+20}=1+\frac{4n-14}{n^2-9n+20}$$

da cui segue che

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5n+6}{n^2-9n+20}\right)^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n-14}{n^2-9n+20}\right)^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-9n+20}{4n-14}}\right)^{2n-1}$$

procedendo come illustrato nell'esercizio precedente si ottiene:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-9n+20}{4n-14}}\right)^{2n-1}=\left(\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-9n+20}{4n-14}}\right)^{\frac{n^2-9n+20}{4n-14}}\right)^{\frac{4n-14}{n^2-9n+20}}\right)^{2n-1}$$

da cui si ricava:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-9n+20}{4n-14}}\right)^{2n-1}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-9n+20}{4n-14}}\right)^{\frac{n^2-9n+20}{4n-14}}\right)^{\frac{(4n-14)(2n-1)}{n^2-9n+20}}$$

infine:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-9n+20}{4n-14}}\right)^{\frac{n^2-9n+20}{4n-14}}=e$$

mentre

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(4n-14)(2n-1)}{n^2-9n+20}=8$$

il risultato del limite assegnato è:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5n+6}{n^2-9n+20}\right)^{2n-1}=e^8.$$

Esempio 3

Calcolare $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-8n+5}{n^2-5n+6}\right)^{1-4n}$

Svolgimento

Conviene inizialmente operare le divisione polinomiale tra numeratore e denominatore

$$\frac{n^2-8n+5}{n^2-5n+6}=1-\frac{3n+1}{n^2-5n+6}$$

da cui segue che

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-8n+5}{n^2-5n+6}\right)^{1-4n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3n+1}{n^2-5n+6}\right)^{1-4n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n^2-5n+6}{3n+1}}\right)^{1-4n}$$

procedendo come illustrato nell'esercizio precedente si ottiene:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n^2-5n+6}{3n+1}}\right)^{1-4n}=\left(\left(\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n^2-5n+6}{3n+1}}\right)^{\frac{n^2-5n+6}{3n+1}}\right)^{\frac{3n+1}{n^2-5n+6}}\right)^{1-4n}$$

da cui si ricava:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n^2-5n+6}{3n+1}}\right)^{1-4n}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n^2-5n+6}{3n+1}}\right)^{\frac{n^2-5n+6}{3n+1}}\right)^{\frac{(1-4n)(3n+1)}{n^2-5n+6}}$$

infine:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\dfrac{n^2-5n+6}{3n+1}}\right)^{\frac{n^2-5n+6}{3n+1}}=e^{-1}$$

mentre

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1-4n)(3n+1)}{n^2-5n+6}=-12$$

il risultato del limite assegnato è:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-8n+5}{n^2-5n+6}\right)^{1-4n}=\left(e^{-1}\right)^{-12}=e^{12}.$$

Esercizi

Calcolare i seguenti limiti di successioni:

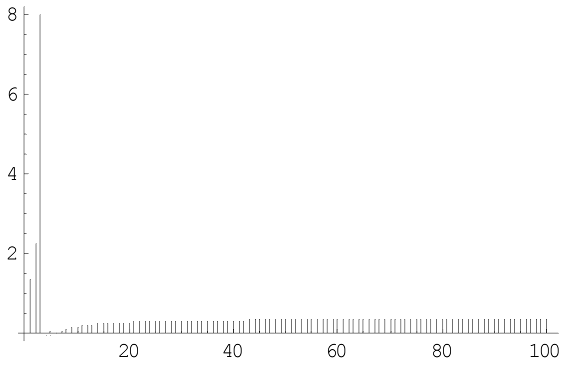
27. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n-4}\right)^{n}$

soluzione

si ottiene:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n-4}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\left(1-\frac{1}{n-4}\right)^{n-4}\right)^{\frac{1}{n-4}}\right)^{n}=\frac{1}{e}$$

Il grafico della successione è il seguente:



28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n}{n^2+4}\right)^{2n}$

soluzione

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{n^2+4}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+4}{n}}\right)^{\frac{n^2+4}{n}}\right)^{\frac{n}{n^2+4}}\right)^{2n} = e^2$$

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n-2}\right)^{2n+1}$

soluzione

Si ha:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n-2}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{n-2}\right)^{n-2}\right)^{\frac{2n+1}{n-2}} = e^6$$

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+4}\right)^{3n}$

soluzione

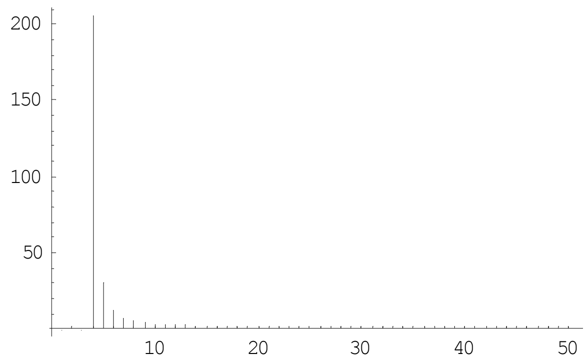
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+4}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n+4}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{4}{n+4}\right)^{n+4}\right)^{\frac{3n}{n+4}}=e^{-12}$$

31. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-9}\right)^{n+2}$

soluzione

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-9}\right)^{n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{10}{n^2-9}\right)^{n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{10}{n^2-9}\right)^{n^2-9}\right)^{\frac{n+2}{n^2-9}}=1$$

Grafico della successione:



Esercizi

Calcolare i seguenti limiti di successioni:

32. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)^{n+1}$

soluzione

$$\left(1+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)^{n+1}=\begin{cases}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} & \text{per n pari}\\ \left(1+\dfrac{-1}{n+1}\right)^{n+1} & \text{per n dispari}\end{cases}$$

passando al limite si ha che:

$$\left(1+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)^{n+1}\to\begin{cases}\mathrm{e} & \text{per n pari}\\ \dfrac{1}{\mathrm{e}} & \text{per n dispari}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \text{il limite non esiste.}$$

33. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{(-1)^n}{n-1}\right)^{n+2}$

soluzione

si ha che:

$$\left(1-\frac{(-1)^n}{n-1}\right)^{n+2}=\begin{cases}\left(1-\dfrac{1}{n-1}\right)^{n+2} & \text{per n pari}\\ \left(1-\dfrac{-1}{n-1}\right)^{n+2} & \text{per n dispari}\end{cases}$$

passando al limite si ha che:

$$\left(1-\frac{(-1)^n}{n-1}\right)^{n+2}\to\begin{cases}\mathrm{e}^{-1} & \text{per n pari}\\ \mathrm{e} & \text{per n dispari}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \text{il limite non esiste}$$

34. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n+1}{(-1)^n-2n^2}\right)^{6n}$

soluzione

$$\left(1+\frac{n+1}{(-1)^n-2n^2}\right)^{6n}=\begin{cases}\left(1+\dfrac{n+1}{1-2n^2}\right)^{6n} & \text{per n pari}\\[2ex] \left(1+\dfrac{n+1}{-1-2n^2}\right)^{6n} & \text{per n dispari}\end{cases}$$

passando al limite si ha che:

$$\left(1+\frac{n+1}{(-1)^n-2n}\right)^{6n}\to\begin{cases}\mathrm{e}^{-3} & \text{per n pari}\\ \mathrm{e}^{-3} & \text{per n dispari}\end{cases}$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1}{(-1)^n-2n^2}\right)^{6n}=e^{-3}$$

Si ricordi che:

$$\lim_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}+\infty & \text{se } q>1\\ 1 & \text{se } q=1\\ 0 & \text{se } |q|<1\\ \textit{non esiste} & \text{se } q\leq -1\end{cases}$$

Il fattoriale

Se n è un intero positivo, si definisce n fattoriale e si indica con n! il prodotto dei primi n numeri interi positivi. In formule

$$n!:=\prod_{k=1}^{n}k=1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n$$

Inoltre, si assume per convenzione: $0! = 1$

esempio: $5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Esercizi

Assegnata la successione a_n calcolare il limite della successione $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

35. $a_n = \frac{n!}{n^3}$

soluzione

Dato a_n il termine a_{n+1} si ottiene sostituendo n con n+1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^3}\cdot\frac{n^3}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n!}{(n+1)^3}\cdot\frac{n^3}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1)\cdot\left(\frac{n}{n+3}\right)^3 = +\infty$$

36. $a_n = \frac{n^2}{n!}$

soluzione

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = 0$$

37. $a_n = \frac{(n+1)^2}{(n+2)!}$

soluzione

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{(n+3)!}\cdot\frac{(n+2)!}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+3}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 = 0$$

38. $a_n = \dfrac{4^n}{(n+1)!}$

soluzione

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{4^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n+2} = 0$$

39. $a_n = \dfrac{(n-1)!}{2^{n+1}}$

soluzione

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{2^{n+2}}\cdot\frac{2^{n+1}}{(n-1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2} = +\infty$$

40. $a_n = \dfrac{(n-1)!\,n^n}{2^{n+1}}$

soluzione

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)^{n+1}}{2^{n+2}}\cdot\frac{2^{n+1}}{(n-1)!\,n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = +\infty$$

41. $a_n = \dfrac{n!\,n^n}{(2n)!}$

soluzione

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{n!n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{4}$$

Osservazione

Per risolvere i seguenti limiti è utile ricordare che se a_n è una successione a termini positivi e se esiste finito il $\lim_{n\to\infty} a_n$ allora risulta:

$$\lim_{n\to\infty}\log_b a_n=\log_b\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$$

Esercizi

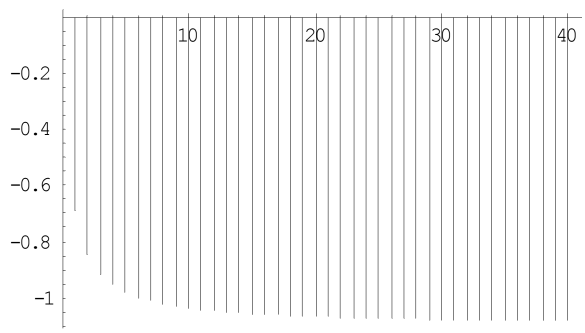
Calcolare i seguenti limiti di successioni:

42. $\lim_{n\to\infty}\log_3\frac{n+1}{3n+1}$

soluzione:

$$\lim_{n\to\infty}\log_3\frac{n+1}{3n+1}=\log_3\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n+1}=\log_3\frac{1}{3}=-1$$

Il seguente grafico evidenzia l'andamento della successione per grandi valori di n.



43. $\lim_{n\to\infty} \log_2 \frac{2n^2+1}{5n^2+1}$

soluzione:

$$\lim_{n\to\infty} \log_2 \frac{2n^2+1}{5n^2+1} = \log_2 \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{5n^2+1} = \log_2 \frac{2}{5} = 1 - \log_2 5$$

44. $\lim_{n\to\infty} \log_7 \sqrt{\frac{n^2+1}{49n^2+1}}$

soluzione:

$$\lim_{n\to\infty} \log_7 \sqrt{\frac{n^2+1}{49n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\log_7 \frac{n^2+1}{49n^2+1} \right) =$$

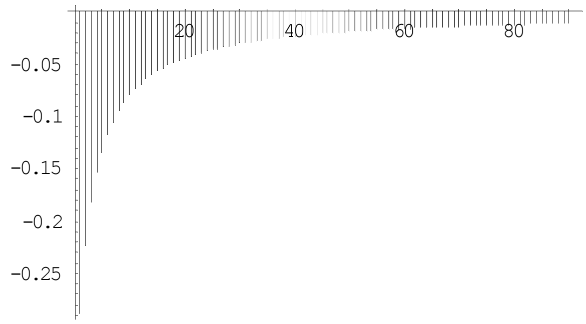
$$\frac{1}{2}\log_7 \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{49n^2+1} = \frac{1}{2}\log_7 \frac{1}{49} = -1$$

45. $\lim_{n\to\infty} [\log_2(n+2) - \log_2(n+3)]$

soluzione:

$$\lim_{n\to\infty} [\log_2(n+2) - \log_2(n+3)] = \lim_{n\to\infty} [\log_2 \frac{n+2}{n+3}] = \log_2\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3} \right) = 0$$

Grafico della successione:



Criterio:

"se a_n è limitato e $b_n \to 0,$ allora $a_n b_n \to 0$"

Esercizi

Calcolare i seguenti limiti, utilizzando il criterio sopra enunciato:

46. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin 2n}{n+1}$

soluzione:

Poichè $\sin 2n$ è limitata, infatti $|\sin 2n| \leq 1$ e $\dfrac{1}{\mathrm{n}+1} \to 0,$ allora si ha che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin 2n}{n+1} = 0$$

47. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos 3n}{n^3+1}$

soluzione:

Poichè $\cos 3n$ è limitata, infatti $\left|\cos 3n\right| \leq 1$ e $\dfrac{1}{\mathrm{n}^3+1} \to 0$, allora si ha che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n^3+1} = 0$$

48. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3+\cos\frac{n}{2}}{n^4+3n+1}$

soluzione:

Poichè $3+\cos\dfrac{n}{2}$ è limitata, infatti $2 \leq 3+\cos\dfrac{n}{2} \leq 4$ e $\dfrac{1}{\mathrm{n}^4+3n+1} \to 0$,

allora si ha che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3+\cos\frac{n}{2}}{n^4+3n+1} = 0$$

Stime asintotiche

Spesso calcolare il limite di una successione può essere particolarmente difficoltoso. Allora, talvolta, si cerca di semplificare la successione utilizzando la relazione di asintotico.
Ricordiamo che dire che a_n è asintotica a b_n e scriveremo

$$a_n \sim b_n$$

se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

E' opportuno che lo studente conosca bene "**la gerarchia degli infiniti**":
" ***Ogni infinito esponenziale è di ordine superiore a ogni infinito potenza, ogni infinito potenza è di ordine superiore a ogni infinito logaritmo***".
Detto in altri termini: "***L'esponenziale va più velocemente all'infinito della potenza, la potenza va più velocemente all'infinito del logaritmo***".

Calcolare i seguenti limiti, utilizzando le stime asintotiche.

49. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+3^n}{4^{n+1}}$

soluzione:

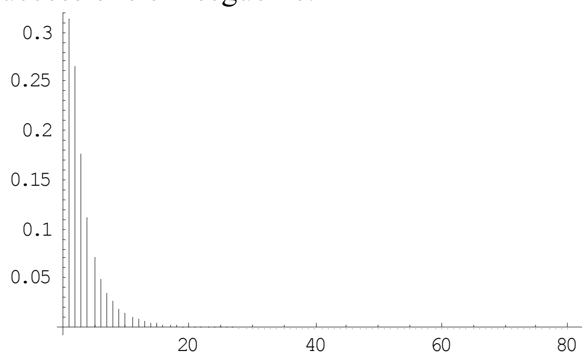
Il limite precedente presenta la forma indeterminata $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

$$\frac{2n^2+3^n}{4^{n+1}} \sim \frac{3^n}{4^{n+1}} \to 0$$

la stima a numeratore segue dal fatto che 3^n è un infinito di ordine superiore rispetto a $2n^2$, questo perché :

$$2n^2+3^n = 3^n\left(\frac{2n^2}{3^n}+1\right) \sim 3^n \quad \text{infatti} \quad \frac{2n^2}{3^n} \to 0 \qquad \left(\frac{2n^2}{3^n}+1\right) \to 1$$

Il grafico della successione è il seguente:



50. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^4+5^{\frac{1}{n}}+\log 2n}{2^{n+1}+e^{-n}+n\log n}$

soluzione:

$$\frac{3n^4 + 5^{\frac{1}{n}} + \log 2n}{2^{n+1} + e^{-n} + n\log n} = \frac{n^4\left(3 + \frac{5^{\frac{1}{n}}}{n^4} + \frac{\log 2n}{n^4}\right)}{2^{n+1}\left(1 + \frac{e^{-n}}{2^{n+1}} + \frac{n\log n}{2^{n+1}}\right)} \sim \frac{3n^4}{2^{n+1}}$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4}{2^{n+1}} = 0$$

51. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{-2} + 2^{\frac{1}{n}} + 3\log^4 n + n}{e^{-3n} + n^4 \log n}$

soluzione:

$$\frac{n^{-2} + 2^{\frac{1}{n}} + 3\log^4 n + n}{e^{-3n} + n^4 \log n} = \frac{n\left(\frac{1}{n^3} + \frac{\sqrt[n]{2}}{n} + \frac{3\log^4 n}{n} + 1\right)}{n^4 \log n} \sim \frac{1}{n^3 \log n}$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3 \log n} = 0$$

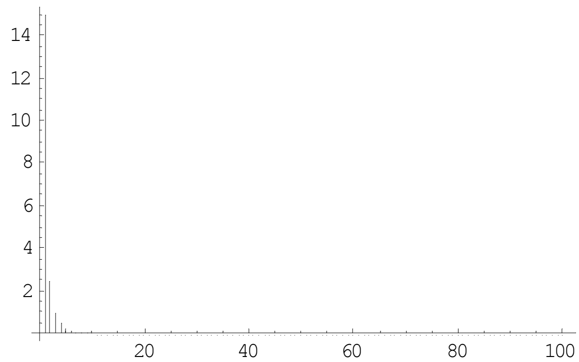
52. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + 7^{\frac{1}{n}+1} + 3\log^4 n}{e^{-n} + e^n + \log^2 n}$

soluzione:

$$\frac{n^2+7^{\frac{1}{n}+1}+3\log^4 n}{e^{-n}+e^n+\log^2 n}=\frac{n^2\left(1+\frac{7^{\frac{1}{n}+1}}{n^2}+\frac{3\log^4 n}{n^2}\right)}{e^n\left(1+\frac{\log^2 n}{e^n}\right)}\sim\frac{n^2}{e^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^n}=0$$

Grafico della successione:



53. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{n^2+4}\right)^{2n}$

soluzione:

$$\left(1+\frac{n}{n^2+4}\right)^{2n}=e^{2n\log\left(1+\frac{n}{n^2+4}\right)}$$

$$2n\log\left(1+\frac{n}{n^2+4}\right)\sim\frac{2n^2}{n^2+4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+4}=2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{n^2+4}\right)^{2n}=e^2$$

La risoluzione dell'esercizio precedente si base sul fatto che

$$\log\left(1+\frac{n}{n^2+4}\right)\sim\frac{n}{n^2+4}$$

infatti ricordiamo che

1) $\log(1+a_n)\sim a_n$ quando $a_n\to 0$ per $n\to\infty$

2) $\log(1+a_n)\sim \log a_n$ quando $a_n\to \infty$ per $n\to\infty$

54. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+\sqrt[3]{n}+2\log^2 n}{7+n^5\sqrt[3]{n+4}}$

soluzione

$$\frac{n^3+\sqrt[3]{n}+2\log^2 n}{7+n^5\sqrt[3]{n+4}}\sim\frac{n^3}{n^{5+\frac{1}{3}}}=\frac{1}{n^{\frac{7}{3}}}$$

quindi :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{7}{3}}}=0$$

55. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{\log 3n+4^n-4^{-n}}$

soluzione

$$\frac{n!}{\log 3n + 4^n - 4^{-n}} \sim \frac{n!}{4^n}$$

quindi :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{4^n} = +\infty$$

Osservazioni

Risolvere i limiti di successione utilizzando le stime asintotiche (quando è possibile!) permette non solo di semplificare la successione stessa e quindi il calcolo del suo limite, ma spesso permette di evitare l'utilizzo di tecniche di risoluzione troppo elaborate. Vediamo alcuni esempi.
A pagina 9 della dispensa abbiamo calcolato il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+5}+\sqrt{n^2+4}}{n+3}$$

mettendo in evidenza a numeratore e a denominatore la "n" con grado massimo. Lo stesso esercizio poteva essere risolto più semplicemente utilizzando le stime asintotiche, infatti, si ha subito che:

$$\frac{\sqrt{n^2+5}+\sqrt{n^2+4}}{n+3} \sim \frac{2n}{n+3}$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+3} = 2$$

ATTENZIONE!

Lo studente deve stare bene attento a non commettere l'errore seguente!

Consideriamo l'esercizio svolto a pagina 12.

- Calcolare $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{2+n}\right)$

Se si risolvesse quest'esercizio utilizzando le stime asintotiche si avrebbe che:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{2+n} \sim \sqrt{n}-\sqrt{n}=0$$

il risultato del limite quindi sarebbe zero. Il risultato, in questo caso, è corretto ma il procedimento è concettualmente scorretto perché ***non si posso sostituire termini asintotici in una somma in cui le parti principali si elidono!*** L'esercizio va risolto razionalizzando.
Si consideri ora l'esercizio:

- Calcolare $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+n^2}\right)$

Utilizzando le stime asintotiche si trova che:

$$\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+n^2} \sim n-n=0$$

Rispetto all'esempio precedente, non solo il procedimento è concettualmente scorretto, ma il risultato è sbagliato. Lo studente verifichi, razionalizzando, che il risultato del limite è $-\frac{1}{2}$.

Si consideri invece l'esercizio

- Calcolare $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n+1}-\sqrt{2+n}\right)$

Utilizzando le stime asintotiche si ha:

$$\sqrt{3n+1}-\sqrt{2+n} \sim \sqrt{3n}-\sqrt{n}=\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{n}$$

passando al limite si ha che la successione diverge. In questo caso il procedimento è corretto perche le parti principali non si elidono. Inoltre non è stato necessario razionalizzare per calcolare il limite (lo studente provi in ogni caso a razionalizzare per verificare che il risultato è lo stesso!).

Esercizi:

Lo studente ripercorra i vari esercizi presenti nella dispensa e li risolva, quando è possibile, utilizzando le stime asintotiche verificando l'esattezza del risultato.

Esercizi riassuntivi

56.Calcolare $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4+1}{n^4-9}\right)^{4n-1}$

(sugg.: inizialmente operare la divisione tra numeratore e denominatore , poi procedere come nell'esempio 2 a pagina 20, sol. $[1]$)

57. Calcolare $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2-9n+5}\right)^{\frac{n+1}{2}}$

(sugg.: inizialmente operare la divisione tra numeratore e denominatore , poi procedere come nell'esempio 2 a pagina 20, sol. $\left[e^{\frac{11}{2}}\right]$)

58.Calcolare $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2(-1)^n}{n+5}\right)^{3n+2}$

(sugg.:procedere come nell'esercizio 32, sol. il limite non esiste)

59.Calcolare $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n}{(-1)^n n+3}\right)^{n+2}$

(sugg.:procedere come nell'esercizio 32, sol. il limite non esiste)

60.Calcolare $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^3+5}+\sqrt{2n^3+1}}{\sqrt{1+3n^3}}$

(sugg.:procedere come nell'esercizio 12, sol. $\left[1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$)

61.Calcolare $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n+2}-\sqrt{7+3n}\right)$

(sugg.:procedere come nell'esercizio 17, sol. $[0]$)

62.Calcolare $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sapendo che $a_n=\frac{(n+4)^3}{(n+3)!}$

(sugg.:procedere come nell'esercizio 35, sol. $[0]$)

63.Calcolare, utilizzando le stime asintotiche,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-4n^4+\sqrt[3]{n}+3\log^7 n+e^{-n}}{2+n^5\sqrt[4]{n^2+4n+5}}$$

(sugg.:procedere come nell'esercizio 49 o 50, sol. $[0]$)

64.Calcolare, utilizzando le stime asintotiche,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\log 3n+n^3\sqrt[4]{n+2}-2\log^5 n+2e^{-3n}}{1+n^2\sqrt{n^2+4n-3}}$$

(sugg.:procedere come nell'esercizio 49 o 50, sol. $[+\infty]$)

65. Risolvere gli esercizi n° 60, 61 utilizzando, quando è possibile le stime asintotiche.