

Corso di Fisica Matematica per Ingegneria Meccanica

Prof. G. Fiore

Parte 2: Cinematica dei moti rigidi e vincolati

1 Moti rigidi

Definizione 1 Un sistema materiale \mathcal{S} si dice rigido se la distanza tra due sue qualsiasi particelle é vincolata a rimanere inalterata qualunque sia il moto:

$$\|P(t) - Q(t)\| = \|P_* - Q_*\| \quad \forall t. \quad (1.1)$$

Qui P_*, Q_* denotano le posizioni delle due particelle ad un istante di riferimento t_* prefissato, $P(t), Q(t)$ le loro posizioni all'istante t , o *attuali*. Indicheremo con $\mathcal{B}_*, \mathcal{B}_t$ le regioni occupate da \mathcal{S} agli istanti t_*, t (v. Fig. 1 sinistra). Denoteremo un corpo rigido anche come un *solido*.

Definizione 2 Un sistema materiale si muove rigidamente se verifica la (1.1).

(anche una mozzarella si può muovere rigidamente, cioè come se fosse rigida).

Nota: date tre particelle qualsiasi di posizioni attuali P, Q, R di un sistema materiale in moto rigido, anche gli angoli del triangolo PQR rimangono inalterati!! Quindi

Proposizione 1 \mathcal{S} si muove rigidamente $\Leftrightarrow \exists$ terna $\mathcal{T}' = (\Omega', \underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3)$ (che diremo *solidale*) in cui é in quiete. (v. Fig. 1 destra)

Dim: \Rightarrow : scelgo 4 particelle di \mathcal{S} che con le loro posizioni individuino a $t = t_*$ l'origine Ω'_* e gli estremi P_{i*} dei vettori \underline{e}'_i di una terna ortonormale \mathcal{T}' . Per le proprietà precedenti esse continueranno a individuare una terna ortonormale anche per $t > t_*$, ed inoltre le coordinate di una qualunque altra particella \mathcal{P} saranno costanti in questa terna. \Leftarrow : rispetto a \mathcal{T}' le coordinate delle particelle, e quindi anche le loro distanze, saranno costanti. \square

Diremo invece fissa la terna $\mathcal{T} = (\Omega, \underline{e}_i)$ in cui siamo interessati a descrivere il moto. Diremo \mathcal{E}_3 lo spazio puntuale fisso, cioè l'insieme dei punti (geometrici) fermi rispetto a \mathcal{T} , e \mathcal{E}'_3 lo spazio puntuale solidale a \mathcal{T}' , cioè l'insieme dei punti (geometrici) fermi rispetto a \mathcal{T}' . Chiaramente i vettori \underline{e}'_i , visti da \mathcal{E}_3 , *dependono* dal tempo t : $\underline{e}'_i = \underline{e}'_i(t)$.

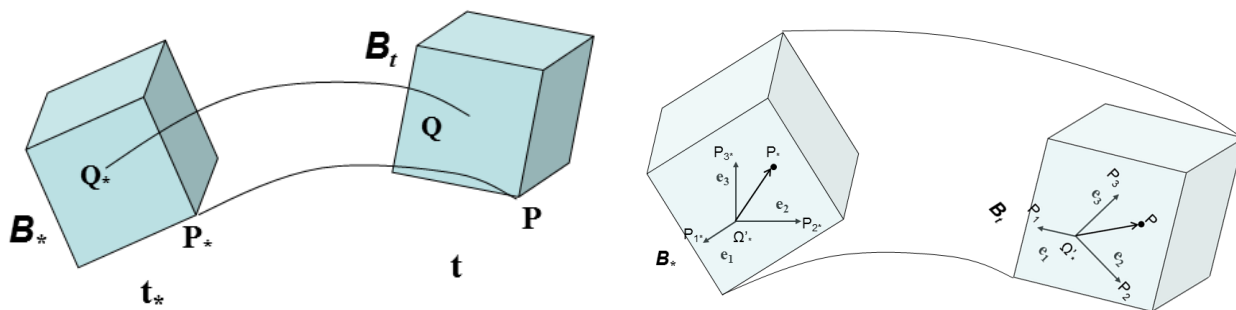


Figure 1:

Abbiamo usato tre lettere per distinguere tre diverse particelle di \mathcal{S} , ma se \mathcal{S} consta di infinite particelle (come accade se queste occupano una regione *continua* tri-, bi-, o mono-dimensionale) né l'alfabeto né l'insieme dei numeri naturali basta ad enumerarle. Per individuarle possiamo invece utilizzare le loro posizioni iniziali $P_* \in \mathcal{B}_*$ come variabili indipendenti (*descrizione lagrangiana*). Conoscere il moto del solido equivale a conoscere $\forall P_* \in \mathcal{B}_*$ e $\forall t$ la posizione $\Pi(P_*, t)$ all'istante t della particella che a t_* aveva posizione P_* . Nella nuova

notazione $P(t), Q(t), R(t)$ saranno indicate risp. come $\Pi(P_*, t), \Pi(Q_*, t), \Pi(R_*, t)$. Per ogni t fissato la corrispondenza

$$P_* \rightarrow \Pi(P_*, t)$$

è evidentemente biunivoca, e quindi invertibile. Possiamo perciò individuare le particelle di \mathcal{S} anche tramite le loro posizioni attuali $P \in \mathcal{B}_t$, cioè scegliere le P come variabili indipendenti (*descrizione euleriana*). La particella passante per (e perciò individuata da) P però cambia al passare di t . Indicheremo con $x_P^i, x_{P_*}^i$ le coordinate di P, P_* in \mathcal{T} , e le chiameremo rispettivamente coordinate euleriane e lagrangiane. Entrambe possono essere utilizzate come “etichette” per individuare le infinite particelle di \mathcal{S} : le coordinate lagrangiane le individuano in modo indipendente da t , quelle euleriane in modo dipendente da t . Conoscere il moto $\Pi(P_*, t)$ del corpo equivale a conoscere ad ogni istante t questa corrispondenza biunivoca tra la terna delle coordinate lagrangiane e la terna delle coordinate euleriane associate a ciascuna particella.

Le nozioni di descrizione e di coordinate lagrangiane/euleriane sono utilizzate per descrivere moti anche non rigidi. Notiamo che (solo per moti rigidi!) le coordinate lagrangiane $x_{P_*}^i$ si possono anche interpretare come le coordinate x_P^i delle particelle del corpo (e piú in generale dei punti dello spazio solidale) a t qualsiasi in un particolare riferimento solidale \mathcal{T}' : quello che a t_* era sovrapposto a quello fisso \mathcal{T} . Infatti l'uguaglianza

$$x_P^i = x_{P_*}^i$$

vale a t_* perché a questo istante P coincide con P_* e \mathcal{T}' coincide con \mathcal{T} ; ma allora vale anche a qualunque altro istante t perché entrambi i membri sono indipendenti da t .

Mostriamo che in un moto rigido la corrispondenza $P_* \leftrightarrow \Pi(P_*, t)$ dipende dal tempo solo attraverso 6 variabili, o in altri termini che la collocazione di un solido nello spazio, o equivalentemente di una sua terna solidale $\mathcal{T}' = (\Omega', \underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3)$, dipende da sole 6 coordinate, v. fig. 2 sinistra: cioè un solido libero ha 6 *gradi di libertà*. Ad ogni istante la posizione di Ω' rispetto a \mathcal{T} é univocamente individuata dalla terna delle sue coordinate $(x_{\Omega'}^1, x_{\Omega'}^2, x_{\Omega'}^3)$. Date queste ultime, la posizione dell'estremo di uno dei tre versori applicati ad Ω' , per es. il punto P_3 estremo di $(\Omega', \underline{e}'_3)$, dovrà trovarsi su una superficie sferica di centro Ω' e di raggio 1, e quindi sarà individuata da due angoli φ, ϑ (per es. longitudine e latitudine). Dati anche questi ultimi, risulteranno determinate le posizioni di tutti i punti dell'asse $\Omega'P_3$, e basterá l'angolo ψ tra un piano fisso e un piano solidale passanti per $\Omega'P_3$ per specificare completamente la posizione della terna solidale. Gli angoli φ, ϑ, ψ , scelti in modo opportuno, sono i cosiddetti *angoli di Eulero*. Riassumendo, P é funzione di P_* e delle 6 variabili $x_{\Omega'}^1, x_{\Omega'}^2, x_{\Omega'}^3, \varphi, \vartheta, \psi$. Esplicitamente,

$$\sum_{j=1}^3 \underline{e}_j x_P^j = P - \Omega = [P - \Omega'] + [\Omega' - \Omega] = \sum_{i=1}^3 \underline{e}'_i x_{P_*}^i + \sum_{j=1}^3 \underline{e}_j x_{\Omega'}^j = \sum_{i,j=1}^3 (\underline{e}'_i \cdot \underline{e}_j) \underline{e}_j x_{P_*}^i + \sum_{j=1}^3 \underline{e}_j x_{\Omega'}^j, \quad (1.2)$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la decomposizione di \underline{e}'_i nella base ortonormale (\underline{e}_j) ; i coseni direttori $A_j^i := \underline{e}'_i \cdot \underline{e}_j$ dipendono esclusivamente da φ, ϑ, ψ . Da questa relazione vediamo che $P = \Pi(P_*, t)$ dipende da t solo attraverso $x_{\Omega'}^1, x_{\Omega'}^2, x_{\Omega'}^3, \varphi, \vartheta, \psi$. In termini delle coordinate, omettendo i pedici P, P_* , la relazione precedente ha la forma della trasformazione delle coordinate nel cambio di riferimento $\mathcal{T}' \mapsto \mathcal{T}$:

$$x^j = \sum_{i=1}^3 A_i^j(t) x'^i + x_{\Omega'}^j, \quad A_i^j(t) := \underline{e}_j \cdot \underline{e}'_i(t). \quad (1.3)$$

Teorema 1 (Formule di Poisson) In un moto rigido ad ogni istante $t \exists!$ vettore $\underline{\omega}(t)$, detto velocità angolare, indipendente dalla particolare terna solidale $(\Omega', \underline{e}'_i)$ scelta e tale che

$$\frac{d}{dt} \underline{e}'_i(t) = \underline{\omega}(t) \times \underline{e}'_i(t) \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.4)$$

Esso è dato da

$$\underline{\omega} := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \underline{e}'_j \times \dot{\underline{e}}'_j. \quad (1.5)$$

Dim:

1. Esistenza. Innanzitutto derivando rispetto a t la relazione di ortonormalità $\underline{e}'_j \cdot \underline{e}'_i = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq i \\ 1 & \text{se } j = i \end{cases}$ si trova per ogni $i, j = 1, 2, 3$

$$\dot{\underline{e}}'_j \cdot \underline{e}'_i = -\underline{e}'_j \cdot \dot{\underline{e}}'_i. \quad (1.6)$$

Inoltre ricordiamo che dall'ortonormalità segue anche, qualunque sia il vettore \underline{x} ,

$$\underline{x} = \sum_{j=1}^3 \underline{e}'_j (\underline{e}'_j \cdot \underline{x}) \quad (1.7)$$

in particolare per $\underline{x} = \dot{\underline{e}}'_i$. Infine ricordiamo la seguente proprietà del doppio prodotto vettoriale:

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{a}(\underline{b} \cdot \underline{c}), \quad (1.8)$$

che useremo ponendo $\underline{a} = \underline{e}'_j$, $\underline{b} = \dot{\underline{e}}'_j$, $\underline{c} = \underline{e}'_i$. Allora

$$\dot{\underline{e}}'_i \stackrel{(1.7)}{=} \sum_{j=1}^3 \underline{e}'_j (\underline{e}'_j \cdot \dot{\underline{e}}'_i) \stackrel{(1.6)}{=} - \sum_{j=1}^3 \underline{e}'_j (\dot{\underline{e}}'_j \cdot \underline{e}'_i) \stackrel{(1.8)}{=} \sum_{j=1}^3 [(\underline{e}'_j \times \dot{\underline{e}}'_j) \times \underline{e}'_i - \dot{\underline{e}}'_j (\underline{e}'_j \cdot \underline{e}'_i)] = \left(\sum_{j=1}^3 \underline{e}'_j \times \dot{\underline{e}}'_j \right) \times \underline{e}'_i - \dot{\underline{e}}'_i$$

(nell'ultima uguaglianza abbiamo di nuovo usata la relazione di ortonormalità), da cui

$$2\dot{\underline{e}}'_i = \left(\sum_{j=1}^3 \underline{e}'_j \times \dot{\underline{e}}'_j \right) \times \underline{e}'_i \stackrel{(1.5)}{=} 2\underline{\omega} \times \underline{e}'_i \quad \Rightarrow \quad (1.4).$$

2. Unicità. Detto $\underline{\omega}^*$ un vettore con analoghe proprietà, sarà $\frac{d}{dt} \underline{e}'_i(t) = \underline{\omega}^*(t) \times \underline{e}'_i(t)$. Sottraendo membro a membro troviamo

$$[\underline{\omega}(t) - \underline{\omega}^*(t)] \times \underline{e}'_i(t) = 0 \quad i = 1, 2, 3;$$

$(\underline{\omega}(t) - \underline{\omega}^*(t))$, dovendo essere quindi parallelo a $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3$, sarà quindi nullo.

3. Indipendenza dalla terna solidale. Sia $(\Omega'', \underline{e}''_j(t))$, un'altra terna ortonormale solidale; allora i 9 coseni direttori $O_i^j := \underline{e}'_j \cdot \underline{e}''_i$ sono *indipendenti* da t (essi formano una matrice O ortogonale, per la precisione) e tali che $\underline{e}''_i(t) = \sum_{j=1}^3 \underline{e}'_j(t) O_i^j$. Derivando rispetto a t troviamo

$$\frac{d}{dt} \underline{e}''_i = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^3 \underline{e}'_j(t) O_i^j = \sum_{j=1}^3 \dot{\underline{e}}'_j(t) O_i^j \stackrel{(1.4)}{=} \sum_{j=1}^3 \underline{\omega} \times \underline{e}'_j(t) O_i^j = \underline{\omega} \times \sum_{j=1}^3 \underline{e}'_j(t) O_i^j = \underline{\omega} \times \underline{e}''_i. \quad \square$$

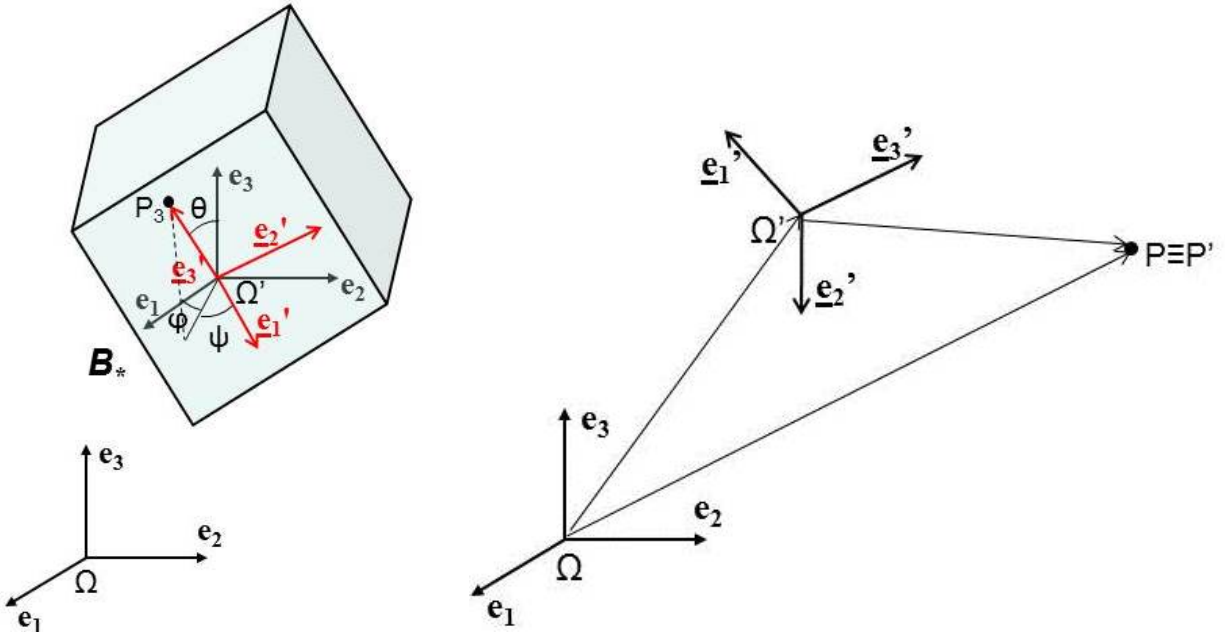


Figure 2:

Proprietá delle velocità dei moti rigidi

Siano $P(t), Q(t)$ le posizioni nello spazio fisso \mathcal{E}_3 all'istante t di due particelle del solido \mathcal{S} , o piú in generale due punti dello spazio \mathcal{E}'_3 solidale a \mathcal{S} . Le derivate rispetto a t $\underline{v}_P = \dot{P}$, $\underline{v}_Q = \dot{Q}$ saranno le loro velocità rispetto a \mathcal{E}_3 .

Proposizione 2 (*Formula fondamentale dei moti rigidi*)

$$\underline{v}_P(t) = \underline{v}_Q(t) + \underline{\omega}(t) \times (P(t) - Q(t)) \quad (1.9)$$

Dim. Nel riferimento solidale $P(t) - Q(t) = \sum_{i=1}^3 (x'_P{}^i - x'_Q{}^i) \underline{e}'_i(t)$. Derivando rispetto a t e ricordando che le coordinate lagrangiane $x'_P{}^i, x'_Q{}^i$ sono indipendenti da t si trova

$$\underline{v}_P - \underline{v}_Q = \sum_{i=1}^3 (x'_P{}^i - x'_Q{}^i) \dot{\underline{e}}'_i = \sum_{i=1}^3 (x'_P{}^i - x'_Q{}^i) \underline{\omega} \times \underline{e}'_i = \underline{\omega} \times \sum_{i=1}^3 (x'_P{}^i - x'_Q{}^i) \underline{e}'_i = \underline{\omega} \times (P - Q). \quad \square$$

Corollario 1 $(\underline{v}_P - \underline{v}_Q) \perp (P - Q), \underline{\omega}$.

(La prima ortogonalitá si puo' dimostrare anche derivando $\|P(t) - Q(t)\|^2 = const$).

Parentesi: cenni di cinematica relativa. Sia $P(t)$ la posizione all'istante t di un punto materiale \mathcal{P} , $x^i_{\mathcal{P}}(t)$ le sue coordinate rispetto alla terna fissa $\mathcal{T} = (\Omega, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Derivando la definizione $P(t) - \Omega = \sum_{i=1}^3 x^i_{\mathcal{P}}(t) \underline{e}_i$ rispetto a t troviamo che la sua velocità rispetto allo spazio fisso \mathcal{E}_3 è data da $\underline{v}_{\mathcal{P}}(t) = \sum_{i=1}^3 \dot{x}^i_{\mathcal{P}} \underline{e}_i$. D'altro canto,

$$P(t) - \Omega = [P(t) - \Omega'(t)] + [\Omega'(t) - \Omega] = \sum_{i=1}^3 x'^i_{\mathcal{P}}(t) \underline{e}'_i(t) + [\Omega'(t) - \Omega]$$

(v. fig. 2 destra), ove $x'^i_{\mathcal{P}}(t)$ sono le coordinate di \mathcal{P} rispetto alla terna mobile $\mathcal{T}' = (\Omega', \underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3)$. Se \mathcal{P} è solidale a \mathcal{T}' le $x'^i_{\mathcal{P}}$ sono indipendenti da t e la formula si riduce alla (1.2). Derivando rispetto a t troviamo

$$\begin{aligned}\underline{v}_{\mathcal{P}} &= \sum_{i=1}^3 \underline{e}_i \dot{x}^i_{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}'^i_{\mathcal{P}}(t) \underline{e}'_i(t) + \sum_{i=1}^3 x'^i_{\mathcal{P}}(t) \dot{\underline{e}}'_i(t) + \underline{v}_{\Omega'} \\ \underline{a}_{\mathcal{P}} &= \sum_{i=1}^3 \underline{e}_i \ddot{x}^i_{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}'^i_{\mathcal{P}}(t) \underline{e}'_i(t) + 2 \sum_{i=1}^3 \dot{x}'^i_{\mathcal{P}}(t) \dot{\underline{e}}'_i(t) + \sum_{i=1}^3 x'^i_{\mathcal{P}}(t) \ddot{\underline{e}}'_i(t) + \underline{a}_{\Omega'}\end{aligned}$$

cioè, usando le (1.4), la legge di trasformazione delle velocità e delle accelerazioni:

$$\underline{v}_{\mathcal{P}} = \underline{v}'_{\mathcal{P}} + \underline{v}_{\tau}, \quad \text{ove} \quad \underline{v}'_{\mathcal{P}} \equiv \sum_{i=1}^3 \dot{x}'^i_{\mathcal{P}} \underline{e}'_i, \quad \underline{v}_{\tau} \equiv \underline{v}_{\Omega'} + \sum_{i=1}^3 x'^i_{\mathcal{P}} \dot{\underline{e}}'_i = \underline{v}_{\Omega'} + \underline{\omega} \times (P - \Omega') \quad (1.10)$$

$$\underline{a}_{\mathcal{P}} = \underline{a}'_{\mathcal{P}} + \underline{a}_{\tau} + \underline{a}_c, \quad \underline{a}'_{\mathcal{P}} \equiv \sum_{i=1}^3 \ddot{x}'^i_{\mathcal{P}} \underline{e}'_i, \quad \underline{a}_{\tau} \equiv \underline{a}_{\Omega'} + \sum_{i=1}^3 x'^i_{\mathcal{P}} \ddot{\underline{e}}'_i, \quad \underline{a}_c \equiv 2 \sum_{i=1}^3 \dot{x}'^i_{\mathcal{P}} \dot{\underline{e}}'_i = 2\underline{\omega} \times \underline{v}'_{\mathcal{P}}. \quad (1.11)$$

$\underline{v}_{\mathcal{P}}, \underline{a}_{\mathcal{P}}$ sono dette velocità ed accelerazione di \mathcal{P} *assolute*, cioè rispetto a \mathcal{E}_3 ; $\underline{v}'_{\mathcal{P}}, \underline{a}'_{\mathcal{P}}$ sono la velocità e l'accelerazione di \mathcal{P} *relative*, cioè rispetto a \mathcal{E}'_3 . Per determinare il significato di $\underline{v}_{\tau}, \underline{a}_{\tau}$, che prendono il nome di velocità ed accelerazione *di trascinamento*, osserviamo che, se applichiamo queste formule al punto P' di \mathcal{E}'_3 per cui si trova a passare \mathcal{P} all'istante t (v. fig. 2 destra), risulta $\underline{v}'_{P'} = \underline{a}'_{P'} = \underline{a}_c = 0$, mentre $x'^i_{\mathcal{P}}(t) = x^i_{P'}$, e quindi risulta $\underline{v}_{\tau} = \underline{v}_{P'}$, $\underline{a}_{\tau} = \underline{a}_{P'}$, cioè la velocità e l'accelerazione di *trascinamento* sono la velocità e l'accelerazione rispetto a \mathcal{E}_3 del punto P' di \mathcal{E}'_3 per cui si trova a passare \mathcal{P} all'istante t . Riassumendo: la velocità assoluta è pari alla somma della velocità relativa e della velocità di trascinamento; l'accelerazione assoluta è pari alla somma delle accelerazioni relativa, di trascinamento e di *Coriolis* \underline{a}_c .

La (1.9) lega le velocità rispetto allo spazio fisso \mathcal{E}_3 di due qualsiasi punti dello spazio \mathcal{E}'_3 solidale al corpo \mathcal{S} . Gli infiniti punti di questo spazio sono individuati (in modo indipendente dal tempo) dalle coordinate lagrangiane, cioè da P_* . In altri termini $\underline{v}_P(t)$ è la funzione $\underline{v}(P_*, t) \equiv \frac{\partial \Pi(P_*, t)}{\partial t}$ che dá la velocità all'istante t della particella (o del punto dello spazio solidale) che aveva posizione P_* all'istante t_* . La formula (1.9) in notazione esplicitamente lagrangiana è

$$\underline{v}(P_*, t) = \underline{v}(Q_*, t) + \underline{\omega}(t) \times [\Pi(P_*, t) - \Pi(Q_*, t)], \quad (1.12)$$

Come già notato, possiamo individuare gli infiniti punti di \mathcal{E}'_3 (in modo dipendente dal tempo) anche tramite le coordinate euleriane, cioè le loro posizioni $P \in \mathcal{E}_3$ all'istante t . Indichiamo con $\underline{u}(P, t)$ la velocità euleriana, cioè la velocità all'istante t del punto dello spazio solidale che si trova a passare per il punto P dello spazio fisso all'istante t , cioè la velocità del punto dello spazio solidale vista come funzione della sua posizione attuale (cioè all'istante t stesso). Velocità euleriana e lagrangiana sono legate dalla relazione $\underline{u}(P, t) = \underline{v}(P_*, t)$, dove va posto $P_* = \Pi^{-1}(P, t)$ se si vuole esprimere la prima in funzione della seconda, $P = \Pi(P_*, t)$ se si vuole esprimere la seconda in funzione della prima. La (1.12) si riscrive così nella forma euleriana

$$\underline{u}(P, t) = \underline{u}(Q, t) + \underline{\omega}(t) \times (P - Q). \quad (1.13)$$

Prefissato un punto Q , essa dá la $\underline{u}(P, t)$ per un qualsiasi altro punto P in funzione di $\underline{u}(Q, t), \underline{\omega}(t)$, e della posizione di P stesso rispetto a Q . Il campo vettoriale $\underline{u} : P \rightarrow \underline{u}(P, t) \equiv \underline{v}_P(t)$ si dice *atto di moto rigido all'istante t* .¹ Quindi l'atto di moto rigido é parametrizzato da 6 scalari [le 3 componenti di $\underline{u}(Q, t)$ e le 3 componenti di $\underline{\omega}$], coerentemente con il fatto che un corpo rigido libero nello spazio ha 6 gradi di libertà.

¹Sostanzialmente si può anche vedere come l'insieme delle velocità dei punti dello spazio solidale al corpo, individuati dalle loro posizioni attuali (cioè all'istante t stesso) rispetto allo spazio fisso.

A seguito delle sostituzioni $\omega \leftrightarrow \underline{R}$, $\underline{u} \leftrightarrow \underline{M}$ la (1.13) diventa la legge di trasformazione del momento di un sistema di vettori applicati al variare del polo

$$\underline{M}_P = \underline{M}_Q + \underline{R} \times (P - Q).$$

Tutto quanto avevamo dimostrato per i sistemi di vettori utilizzando solamente questa formula risulterà vero anche in questo nuovo ambito, fatte le dovute sostituzioni. Innanzitutto, moltiplicando membro a membro la (1.13) per $\underline{\omega}$ troviamo

Corollario 2 $\underline{u}(P, t) \cdot \underline{\omega}(t) = \underline{u}(Q, t) \cdot \underline{\omega}(t)$, cioè il prodotto $I_c := \underline{u}(P, t) \cdot \underline{\omega}(t)$ non dipende da P . Perciò viene detto “invariante cinematico”.

In altri termini, ragionando come per i momenti, nella decomposizione di $\underline{u}(P, t)$ in un componente $\underline{\tau} \parallel \underline{\omega}$ ed uno $\underline{u}_\perp \perp \underline{\omega}$ il primo è pari a $\underline{\tau} = \frac{I_c}{\omega^2} \underline{\omega}$, e quindi è indipendente da P :

$$\underline{u}(P, t) = \underline{\tau}(t) + \underline{u}_\perp(P, t).$$

Diamo una forma piú esplicita a $\underline{u}_\perp(P, t)$ nella seguente proposizione.

Proposizione 3 Se $\underline{\omega} \neq \underline{0}$ l'insieme di punti dello spazio (dipendente da t)

$$\mathcal{A}_t := \{A \in \mathcal{E}_3 \mid \underline{u}(A, t) = \underline{\tau} = \frac{I_c}{\omega^2} \underline{\omega}\} \quad (1.14)$$

è una retta $\parallel \underline{\omega}(t)$ detta asse di Mozzi. Per ogni punto $P \in \mathcal{E}_3$

$$\underline{u}(P, t) = \underline{\tau}(t) + \underline{\omega}(t) \times (P - A) \quad A \in \mathcal{A}_t. \quad (1.15)$$

\mathcal{A}_t è anche il luogo dei punti $P \in \mathcal{E}_3$ in cui $\underline{u}(A, t) \parallel \underline{\omega}(t)$ oppure $\underline{u}(A, t) = \underline{0}$, ed il luogo dei punti $P \in \mathcal{E}_3$ in cui $\underline{u}(P, t)$ è minimo.

Si noti che la formula (1.15) si puó considerare valida anche nel caso $\underline{\omega} = \underline{0}$ ponendo $\underline{\tau} = \underline{u}(P, t)$: sebbene \mathcal{A}_t non esista, e quindi la scelta di A sia completamente indeterminata, essa é ininfluente, perché il secondo termine a secondo membro risulta nullo, esattamente come nella (1.13). Nei prossimi paragrafi ne illustremo il significato geometrico.

Da (1.15) segue anche $I_c = \tau\omega$. Quindi $I_c = 0$ implica che o $\underline{\tau} = \underline{0}$ oppure $\underline{\omega} = \underline{0}$.

1.1 Moti rigidi particolari

Moto e atto di moto traslatorio.

In un moto traslatorio l'orientamento dei vettori \underline{e}'_i non varia con t . Quindi ad ogni t

$$\frac{d}{dt} \underline{e}'_i(t) = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{\omega}(t) = \underline{0}, \quad (1.16)$$

e tutti i punti hanno la stessa velocità,

$$\underline{u}(P, t) = \underline{\tau}(t) \quad \forall P \in \mathcal{E}_3; \quad (1.17)$$

tuttavia $\underline{\tau}$ puó dipendere da t . Si noti che le traiettorie dei singoli punti del solido non sono tenute ad essere rettilinee; potrebbero essere addirittura delle circonferenze, come per certe navicelle da luna-park vincolate tramite un “doppio pendolo” (v. Fig. 3).

Definizione 3 L'atto di moto all'istante t si dice traslatorio se a quest'istante $\underline{\omega}(t) = \underline{0}$, e quindi a questo istante vale anche la (1.17).

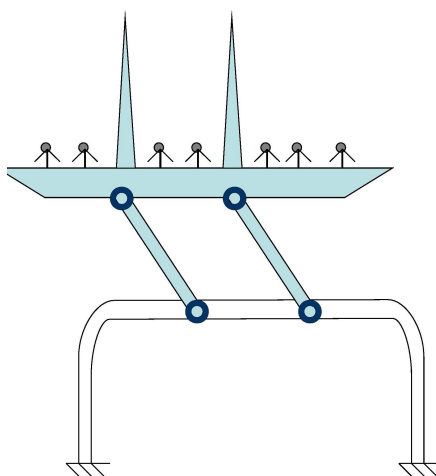


Figure 3:

Moto di rotazione attorno ad un asse fisso r . Atto di moto rotatorio.

I punti di r hanno velocità zero, e quindi $\underline{\tau} = \underline{0}$. In generale $\underline{\omega} \neq \underline{0}$, e l'asse di Mozzi coincide con quello di rotazione, $\mathcal{A}_t = r$.

Esempio: una porta che ruota attorno all'asse dei cardini, v. Fig. 4 sinistra. Fissiamo $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ in modo che $\Omega \equiv \Omega' \in r, \underline{e}_3 \equiv \underline{e}'_3 \parallel r$. La trasformazione tra le due basi é allora data

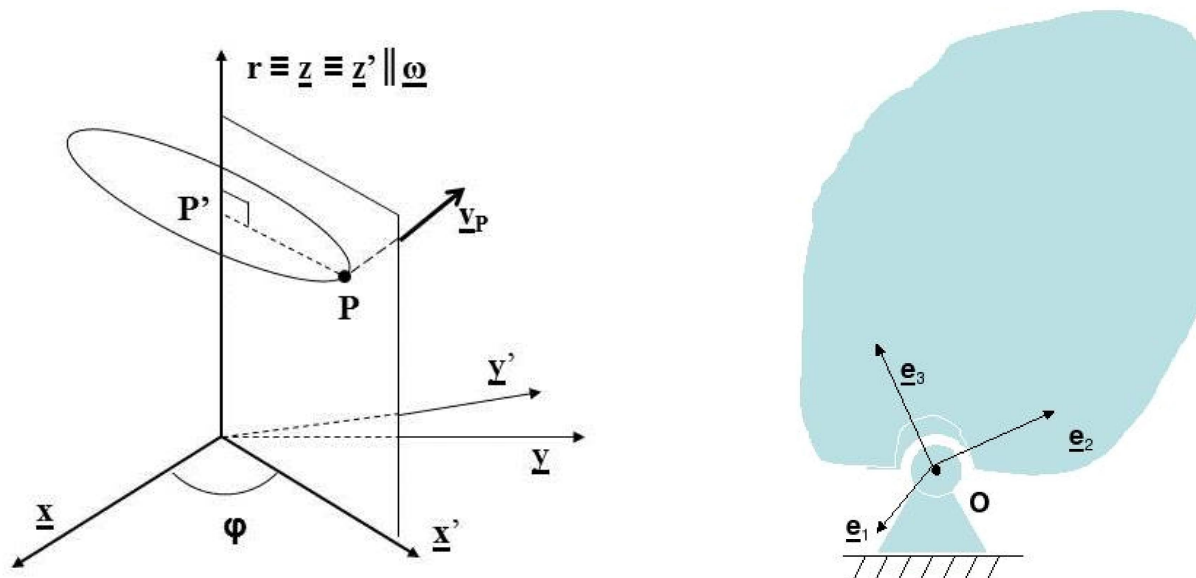


Figure 4:

da

$$\begin{aligned}
 \underline{e}'_1 &= \cos \varphi(t) \underline{e}_1 + \sin \varphi(t) \underline{e}_2 & \Rightarrow & \underline{e}'_1 = \dot{\varphi}(-\sin \varphi \underline{e}_1 + \cos \varphi \underline{e}_2) = \dot{\varphi} \underline{e}'_2 \\
 \underline{e}'_2 &= -\sin \varphi(t) \underline{e}_1 + \cos \varphi(t) \underline{e}_2 & & \underline{e}'_2 = \dot{\varphi}(-\cos \varphi \underline{e}_1 - \sin \varphi \underline{e}_2) = -\dot{\varphi} \underline{e}'_1 \\
 \underline{e}'_3 &= \underline{e}_3 & & \underline{e}'_3 = \underline{0};
 \end{aligned}$$

applicando la formula (1.5) troviamo dopo un facile calcolo (visto che $\underline{e}'_1 \times \underline{e}'_2 = \underline{e}'_3 = -\underline{e}'_2 \times \underline{e}'_1$)

$$\underline{\omega} = \dot{\varphi} \underline{e}'_3 = \dot{\varphi} \underline{e}_3. \quad (1.18)$$

La proporzionalità di $\underline{\omega}$ a \underline{e}_3 significa che $\underline{\omega}$ é parallelo all'asse di rotazione r , come già sapevamo; ora vediamo che il coefficiente di proporzionalità $\dot{\varphi}$ é quello che al corso di Fisica 1 chiamavate la velocità angolare, cioè la derivata rispetto a t dell'angolo di rotazione φ attorno a r : questo spiega perché abbiamo chiamato $\underline{\omega}$ *vettore velocità angolare*.

La velocità nel generico punto P (v. fig. 4 a sinistra) è data per ogni t dalla formula

$$\underline{u}(P, t) = \underline{\omega}(t) \times (P - A), \quad A \in \mathcal{A}_t; \quad (1.19)$$

è tangente alla traiettoria, cioè alla circonferenza $\perp \mathcal{A}_t$ passante per P e con centro su \mathcal{A}_t .

Definizione 4 *L'atto di moto all'istante t si dice rotatorio se a quest'istante $\underline{\tau}(t) = \underline{0}$. In questo caso la (1.19) vale a questo istante.*

L'asse di Mozzi \mathcal{A}_t si dice in questo caso asse (istantaneo) di rotazione. Esso può variare nel tempo, come accade per es. nei moti di rotazione attorno ad un punto fisso o nei moti di puro rotolamento (v. paragrafi successivi). $\underline{u}(P, t)$ è tangente sia alla traiettoria, sia alla circonferenza $\perp \mathcal{A}_t$ passante per P e con centro su \mathcal{A}_t , che non necessariamente coincidono.

Moto di rotazione attorno ad un punto fisso O (o “moto polare”)

Se un punto O del solido (o dello spazio solidale ad esso) é vincolato ad rimanere fisso, per esempio tramite una cerniera sferica di centro O (v. Fig. 4 destra), allora ad ogni t l'atto di moto sarà rotatorio con asse istantaneo di rotazione \mathcal{A}_t passante per O . Infatti, $\underline{u}(O, t) = \underline{0}$ implica che il minimo della velocità è $\tau = 0$, quindi l'atto di moto è rotatorio, e $O \in \mathcal{A}_t$. Tuttavia, la direzione di \mathcal{A}_t potrà variare con t .

Moto di puro rotolamento di un cilindro su un piano

Questo é anche un esempio di moto piano (v. piú avanti). Puro rotolamento significa che i punti del cilindro istantaneamente a contatto con il piano non strisciano su di esso, e quindi hanno istantaneamente velocità zero. (v. Fig. 5 sinistra). Perció questi punti di contatto (e non quelli sull'asse del cilindro!) formano l'asse di Mozzi \mathcal{A}_t (che é caratterizzato anche come luogo dei punti con velocità minima). $\underline{u}(P, t)$ è tangente sia alla traiettoria, che è una curva denominata “cicloide”, sia alla circonferenza $\perp \mathcal{A}_t$ passante per P e con centro su \mathcal{A}_t . Tuttavia anche in questo caso \mathcal{A}_t varia evidentemente nel tempo (trasla).

Se come solido \mathcal{S} prendiamo non tutto il cilindro, ma una sua parte (v. Fig. 5 sinistra), lo spazio solidale e il suo moto non cambiano, e quindi non cambia nemmeno \mathcal{A}_t . In questa variante si vede che \mathcal{A}_t e la regione occupata da \mathcal{S} all'istante t non necessariamente hanno punti in comune.

Moto elicodidale. Atto di moto elicoidale.

Consideriamo il moto di un bullone che si avvita in un buco cilindrico filettato di asse r (v. fig. 6). Ragionando come nel caso del moto attorno ad un asse fisso, vediamo che $\underline{\omega} \parallel r$.

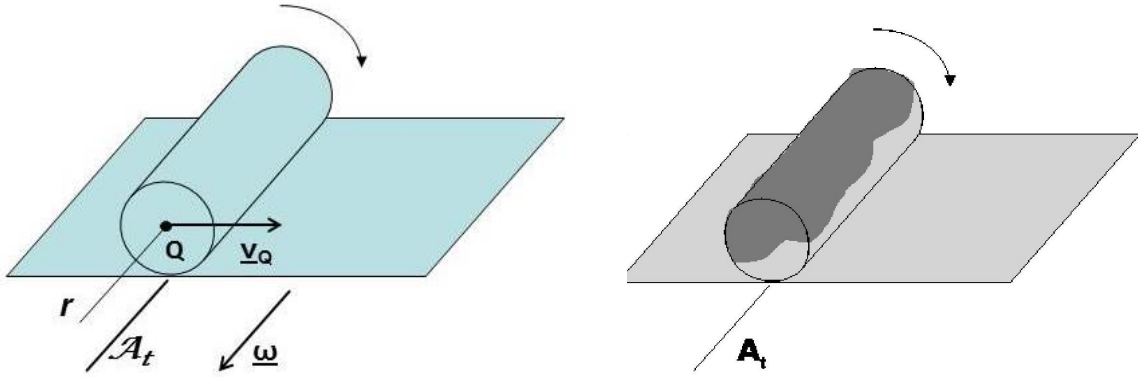


Figure 5:

I punti dell'asse del bullone sono sovrapposti con r e si muovono di una traslazione $\parallel r$, quindi $\mathcal{A}_t = r$, e la loro velocità è $\underline{\tau} \parallel r$. Per tutti gli altri punti P del bullone, o più in generale dello spazio solidale ad esso, il moto è composizione di un moto di traslazione $\parallel r$ con velocità $\underline{\tau}$ e di un moto di rotazione attorno a r con velocità angolare $\underline{\omega}$ e quindi con velocità di rotazione $\underline{\omega}(t) \times (P - A)$, secondo la formula (1.15). Le traiettorie delle particelle del bullone (o più in generale dei punti del suo spazio solidale) sono delle eliche, di cui una è la filettatura stessa. La velocità $\underline{u}(P, t)$ è quindi tangente all'elica passante per P . Un tale moto è un esempio di moto elicoidale, cioè un moto in cui \mathcal{A}_t non varia nel tempo ed esiste una costante λ tale che $\underline{\tau}(t) = \lambda \underline{\omega}(t)$ (per il bullone $\lambda = \text{passo}/2\pi$).

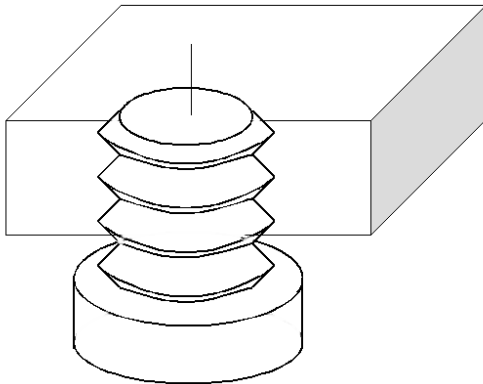


Figure 6:

Poichè la (1.15), che riscriviamo,

$$\underline{u}(P, t) = \underline{\tau}(t) + \underline{\omega}(t) \times (P - A) \quad A \in \mathcal{A}_t$$

vale per *ogni* atto di moto rigido, allora per qualsiasi moto rigido è ancora vero che ad ogni istante il campo delle velocità è somma di una velocità di traslazione $\underline{\tau}(t) \parallel \mathcal{A}_t$ e di una velocità di rotazione $\underline{\omega}(t) \times (P - A)$ attorno ad \mathcal{A}_t stesso, cioè che è lo stesso di quello di un opportuno moto elicoidale attorno ad un opportuno asse $r \equiv \mathcal{A}_t$; conseguentemente i vettori velocità $\underline{u}(P, t)$ all'istante t sono tangenti a delle eliche (le traiettorie in questo moto elicoidale corrispondente). Tali risultati si riassumono nella seguente formulazione:

Teorema 2 (di Mozzi) *Ogni atto di moto rigido è elicoidale.*

Tuttavia se \mathcal{A}_t e/o il coefficiente di proporzionalità λ tra $\underline{\tau}(t), \underline{\omega}(t)$ dipendono dal tempo il moto non è elicoidale, le traiettorie delle particelle del corpo non sono delle eliche.

Composizione di due moti rigidi. Moti rototraslatori.

Alcuni moti rigidi si ottengono come composizione di due moti rigidi piú semplici.

Supponiamo di conoscere il moto di un solido \mathcal{S} rispetto ad una terna di riferimento \mathcal{T}' (moto *relativo*), che è a sua volta in moto a noi noto rispetto alla terna fissa \mathcal{T} (moto *di trascinamento*). Il moto di \mathcal{S} rispetto a \mathcal{T} (moto *assoluto*) è composizione dei due moti precedenti. Il vettore velocità angolare del moto assoluto $\underline{\omega}$ è somma dei vettori velocità angolare $\underline{\omega}'', \underline{\omega}'$ rispettivamente di \mathcal{S} rispetto a \mathcal{T}' (o *relativo*) e di \mathcal{T}' rispetto a \mathcal{T} (o *di trascinamento*), cioè se applichiamo la formula (1.9) alle velocità assolute di due particelle di \mathcal{S} (o piú in generale di due punti dello spazio solidale a \mathcal{S}) otteniamo

$$\underline{v}_P(t) = \underline{v}_Q(t) + \underline{\omega}(t) \times [P(t) - Q(t)], \quad \underline{\omega}(t) = \underline{\omega}'(t) + \underline{\omega}''(t). \quad (1.20)$$

Ciò si può dimostrare applicando la (1.9) sia al moto relativo, sia al moto di trascinamento di P , e la (1.10) al moto di Q .

Si definisce *moto rototraslatorio* un moto composizione di un moto (relativo) rotatorio attorno ad un asse fisso r e di un moto (di trascinamento) traslatorio. Risulta quindi $\underline{\omega}' \equiv \underline{0}$, $\underline{\omega}(t) = \underline{\omega}''(t) = \dot{\varphi}(t)\underline{e}_r$, dove \underline{e}_r è versore di r e φ è l'angolo di rotazione di \mathcal{S} attorno a r nel moto relativo; quindi $\underline{\omega}(t)$ ha orientamento fisso. Se scelgo $Q \in r$, allora \underline{v}_Q sarà proprio la velocità di un punto di \mathcal{T}' qualsiasi (in particolare dell'origine Ω') rispetto a \mathcal{T} . Viceversa, se $\underline{\omega}(t)$ ha orientamento fisso, si dimostra facilmente che il moto è rototraslatorio.

Un moto elicoidale, per esempio quello di un bullone che si avvita in una filettatura (v. fig. 6), è rototraslatorio: il moto relativo del bullone è rotatorio con velocità angolare $\underline{\omega}$ attorno al suo asse r (che possiamo scegliere come uno degli assi di \mathcal{T}' , per es. \underline{z}'), e la velocità di trascinamento $\underline{v}_{\Omega'} = \underline{\tau}$ è parallela a $\underline{\omega}$. Anche il moto di puro rotolamento di un cilindro su un piano π (v. fig. 5) è rototraslatorio: il moto relativo del cilindro è rotatorio attorno al suo asse r (che possiamo scegliere come uno degli assi di \mathcal{T}' , per es. \underline{z}'), e la velocità di trascinamento ora invece è *ortogonale* a $\underline{\omega}$, piú precisamente $\underline{v}_{\Omega'} = R\dot{\varphi}\underline{e}$, con versore $\underline{e} \perp \underline{\omega}$, $\underline{e} \parallel \pi$.

Piú avanti considereremo anche i *moti di precessione*, composizione di due rotazioni uniformi attorno a due assi passanti per uno stesso punto fisso.

1.2 Moti rigidi piani

È questa un'altra classe di moti rigidi particolari, importante per molte applicazioni meccaniche. Un moto rigido si dice piano se esiste un piano π' solidale che si muove scorrendo su un piano π fisso. È chiaro che qualunque altro piano π^* solidale parallelo a π' si muoverà rimanendo parallelo ed equidistante da π al passar del tempo. (Esercizio: mostrare che il moto di rotazione di un solido attorno ad un asse fisso ed il moto di puro rotolamento di un cilindro su un piano sono moti rigidi piani.)

Dato un punto P_* dello spazio solidale, indichiamo con π^* il piano solidale $\parallel \pi$ passante per P_* , con $P' \in \pi'$ la sua proiezione su π' , e con $P(t), P'(t)$ le loro posizioni nello spazio fisso all'istante t . Risulta

$$P(t) - P'(t) = \underline{b} \equiv (\text{vettore costante}), \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(P(t) - P'(t)) = \underline{v}_P - \underline{v}_{P'} = \underline{0}.$$

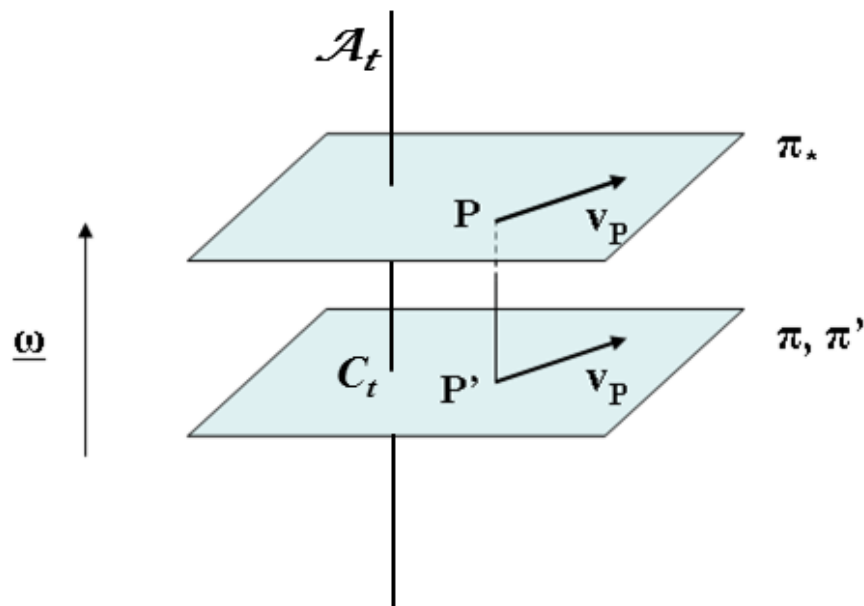


Figure 7:

Il moto di un qualunque punto P_* solidale si riconduce quindi al moto di un punto di π' , la sua proiezione P'_* . Dal confronto con la (1.9) (presa con $Q = P'$) segue

$$\underline{0} = \underline{\omega} \times (P - P') = \underline{\omega} \times \underline{b} \quad \Rightarrow \quad \underline{\omega} \parallel \underline{b} \perp \pi.$$

D'altro canto, poiché $P'(t)$ si muove rimanendo su π , risulta $\underline{v}_{P'} \parallel \pi$, e quindi

$$I_c(t) \equiv \underline{u}(P', t) \cdot \underline{\omega}(t) = 0.$$

Come già visto, siccome è anche $I_c = \tau\omega$, deve essere o $\underline{\omega}(t) = 0$ o $\underline{\tau}(t) = 0$, cioè

Proposizione 4 *In un moto rigido piano ad ogni t l'atto di moto o è traslatorio o è rotatorio.*

Supponiamo che l'atto di moto sia rotatorio. $C_t := \mathcal{A}_t \cap \pi$ si chiama centro istantaneo di rotazione; chiaramente $\underline{u}(C_t, t) = \underline{0}$, per cui applicando la (1.15) con $Q = C_t$ e $P \in \pi$ troviamo

$$\underline{u}(P, t) = \underline{\omega} \times (P - C_t). \quad (1.21)$$

Questa formula ci dice che $\underline{u}(P, t), (P - C_t)$ sono tra di loro perpendicolari. Di qui il

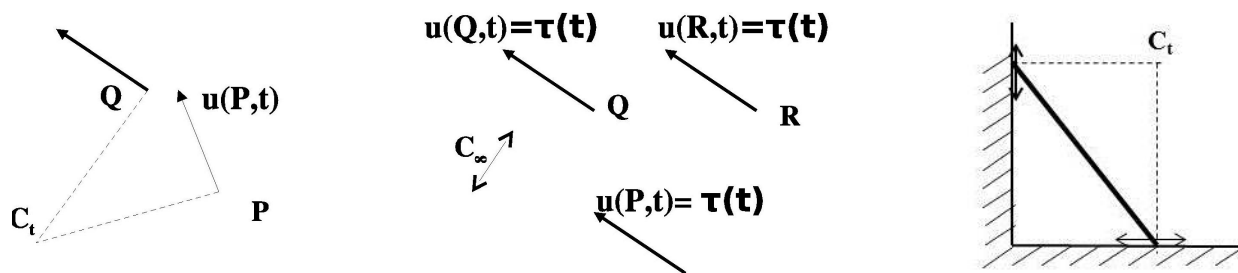


Figure 8:

Teorema 3 (di Chasles). *La normale alla velocità (e quindi alla traiettoria) di un qualsiasi punto nel piano solidale, condotta per il punto stesso, passa anche per il centro istantaneo di rotazione.*

(v. Fig. 8 sinistra). L'enunciato del teorema vale banalmente anche nel caso di atto di moto traslatorio, se *definiamo* in questo caso C_t come un *punto improprio*, più precisamente la *direzione* del piano π perpendicolare a \underline{z} (v. Fig. 8 centro). Un atto di moto piano traslatorio si può vedere anche come limite di un atto di moto rotatorio in cui facciamo tendere $C_t \rightarrow \infty$ secondo una direzione costante (e $\omega \rightarrow 0$, in modo da tenere finite le velocità dei punti P).

Il teorema è utilissimo per trovare C_t : applicandolo a due punti diversi P, Q si determina C_t come intersezione delle normali alle loro velocità (Fig. 8 sinistra), v. per esempio la scala appoggiata al pavimento ed al muro come in fig. 8 destra. Poi, noto C_t aiuta a determinare la velocità degli altri punti. Altre proprietà di immediata dimostrazione sono le seguenti

Proposizione 5 *Se π', π hanno un punto A in comune (cioè $A \in \pi \cap \pi' \forall t$) allora $C_t = A \forall t$.*

Proposizione 6 *Se all'istante t esistono due centri istantanei di rotazione C_t, C'_t differenti, allora l'atto di moto è nullo.*

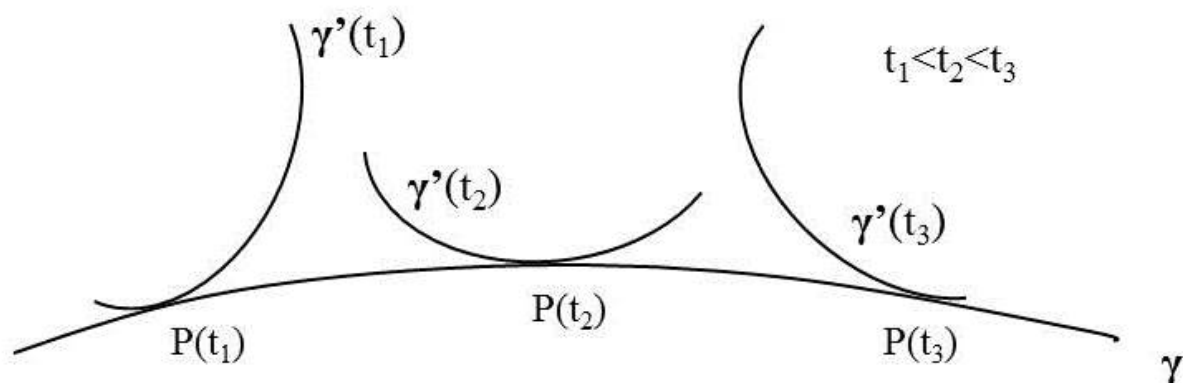


Figure 9:

1.2.1 Profili coniugati, traiettorie polari

Si dice che una curva $\gamma' \subset \pi'$ rotola su un'altra $\gamma \subset \pi$ se ad ogni t γ, γ' hanno in comune un punto $P(t)$ ed anche le tangenti in P , e tutti gli altri punti di γ' stanno dalla stessa parte di π delimitata da γ ; in fig. 9 abbiamo rappresentato in un esempio le posizioni di γ' su π a tre istanti diversi. Per il principio dei moti relativi la velocità \underline{v}_P di P rispetto a π (velocità assoluta) e quella \underline{v}'_P di P rispetto a π' (velocità relativa) sono collegate dalla relazione $\underline{v}_P - \underline{v}'_P = \underline{v}_\tau$; dato che \underline{v}_P (tangente a γ in P) e \underline{v}'_P (tangente a γ' in P) hanno la stessa direzione, quella della comune tangente, anche la velocità di trascinamento \underline{v}_τ ce l'ha, e perciò è detta velocità di strisciamento. Le stesse proprietà valgono per il moto di γ rispetto a π' (moto reciproco). Perciò γ, γ' si dicono collettivamente *profili coniugati*. Un esempio importante di profili coniugati sono quelli di due ingranaggi (uno fisso, l'altro solidale ad un solido che si muove di moto piano) a contatto. Se $\underline{v}_\tau = \underline{0}$ si dice che γ' rotola su γ senza strisciare (moto di puro rotolamento), e viceversa. Vediamo quando si verifica ciò.

Consideriamo il punto $P(t)$ che coincide istante per istante con C_t . Le traiettorie γ, γ' descritte da $P(t)$ su π, π' sono particolari profili coniugati che prendono il nome rispettivamente di *base* e *rulletta*, e collettivamente di *traiettorie polari*. Se C_t è un punto fisso Q allora esse degenerano ad un punto, Q stesso. In caso contrario vale la

Proposizione 7 *La rulletta γ' rotola sulla base γ senza strisciare (e viceversa nel moto reciproco).*

Infatti, detto P' il punto di π' per cui passa $P(t)$ all'istante t , risulta $P' = C_t$, e quindi (per come C_t è definito) $\underline{v}_\tau = \underline{v}_{P'} = \underline{0}$, da cui anche $\underline{v}_P = \underline{v}'_P$; ma siccome $\underline{v}_P, \underline{v}'_P$ sono rispettivamente tangenti a γ, γ' in C_t , questo significa anche che γ, γ' hanno la tangente in comune, come restava da dimostrare.

Illustriamo la proposizione con due esempi: nel moto di puro rotolamento di un cilindro su un piano γ è la retta intersezione di π e del piano di rotolamento, γ' è la circonferenza intersezione di π e della superficie del cilindro (v. fig. 10 sinistra). Nel moto della scala di fig. 8 γ è il quarto di circonferenza di raggio l e centro l'intersezione di π con muro e pavimento, γ' è la semicirconferenza di diametro=l'intersezione di π con la scala (v. fig. 10 destra).

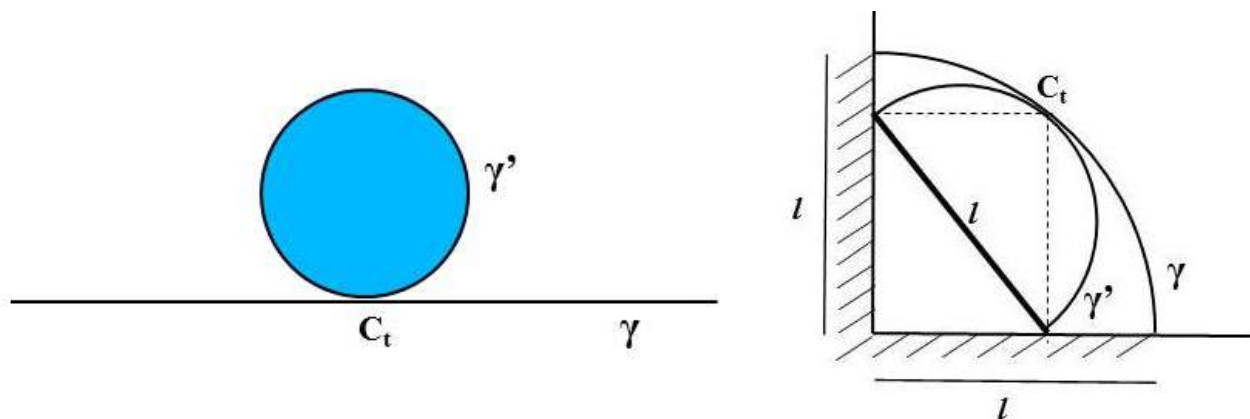


Figure 10:

Quanto piú dei profili di ingranaggi si avvicinano a base e rulletta, tanto meno essi si consumano, e come vedremo, tanto meno dissipano energia le forze di contatto (reazioni vincolari, che includono l'attrito).

1.3 Spostamenti rigidi elementari

Definizione 5 $dP := \underline{u}(P, t) dt$ si dice spostamento elementare nell'intervallo di tempo $[t, t + dt]$ del punto dello spazio solidale che a t ha posizione P in \mathcal{E}_3 . Il campo vettoriale (infinitesimo) $S : P \rightarrow dP$ si dice spostamento rigido elementare dello spazio solidale a \mathcal{S} in $[t, t + dt]$ ².

Ricordiamo che, a meno di infinitesimi di ordine superiore a 1 in dt , dP risulta uguale allo spostamento $\Delta P = P(t + dt) - P(t)$ effettuato nell'intervallo temporale $[t, t + dt]$ dal punto solidale che a t si trovava in P .

Come sono collegati gli spostamenti elementari dP, dQ di due punti P, Q ? Detto $d\underline{\psi} := \underline{\omega} dt$ il vettore angolo infinitesimo di rotazione, moltiplicando (1.15) per dt ricaviamo

$$dP = dQ + d\underline{\psi} \times (P - Q), \quad (1.22)$$

dove $Q \in \mathcal{E}_3$ è un punto prefissato. Di qui si vede che lo spostamento rigido elementare $\{dP\}_{P \in \mathcal{E}_3}$ è parametrizzato dai vettori $dQ, d\underline{\psi}$, quindi da 6 scalari - le loro componenti - anziché da 7 - $u^i(Q, t), \omega^i, dt$ -. In altri termini, rimane lo stesso se si moltiplicano $\underline{u}(Q, t), \underline{\omega}(t)$ per uno stesso fattore α e si divide dt per α ; cioè non dipende dal tempo dt necessario a compiere lo spostamento.

Se l'atto di moto all'istante t è traslatorio, anche lo spostamento rigido elementare sarà traslatorio:

$$dP = dQ. \quad (1.23)$$

Evidentemente esso è parametrizzato solo dal vettore infinitesimo dQ , ovvero da 3 numeri infinitesimi (le sue componenti). Se l'atto di moto all'istante t è rotatorio, anche lo spostamento rigido elementare sarà rotatorio:

$$dP = d\underline{\psi} \times (P - A) \quad A \in \mathcal{A}_t. \quad (1.24)$$

Evidentemente esso è parametrizzato solo dal vettore infinitesimo $d\underline{\psi}$, ovvero da 3 numeri infinitesimi (le sue componenti). Nel caso di moto rigido piano, prendendo $P \in \pi$ e $A \equiv C_t$, quest'ultima formula diventa

$$dP = d\underline{\psi} \times (P - C_t). \quad (1.25)$$

Lo spostamento rigido elementare è parametrizzato dall'unica componente $\neq 0$ di $d\underline{\psi}$, quella perpendicolare a π , cioè da 1 numero infinitesimo. Fissiamo \mathcal{T} in modo che $\Omega \in \pi, \underline{e}_3 \perp \pi$. Dette $(x, y, 0)$ le coordinate di P , $(x_C, y_C, 0)$ quelle di C_t , $(0, 0, d\psi^z)$ le componenti di $d\underline{\psi}$, ed effettuando il prodotto vettoriale troviamo

$$dy = d\psi^z(x - x_C), \quad (1.26)$$

$$dx = -d\psi^z(y - y_C). \quad (1.27)$$

²Sostanzialmente lo spostamento rigido elementare si può anche vedere come l'insieme $\{dP\}_{P \in \mathcal{E}_3}$

Vediamo che dy , cioè (a meno di infinitesimi di ordine superiore) la variazione dell'ordinata di P , è funzione solo dell'ascissa x di P , più precisamente una funzione lineare! E che dx , cioè (a meno di infinitesimi di ordine superiore) la variazione dell'ascissa di P , è funzione solo dell'ordinata y di P , più precisamente una funzione lineare! Rappresentiamo queste due funzioni tramite i cosiddetti diagrammi degli spostamenti (Fig. 11 sinistra):

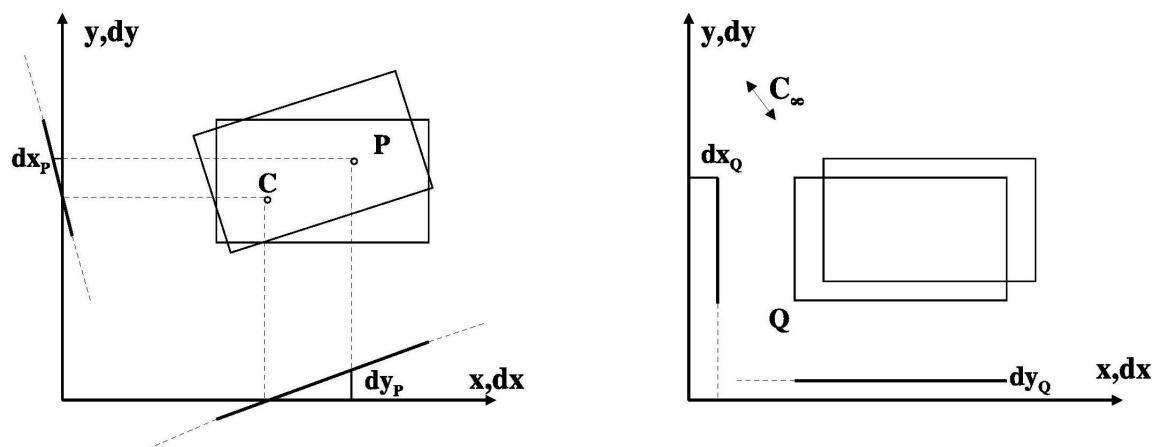


Figure 11:

Si noti che i due diagrammi sono tra loro perpendicolari.

Nel caso di moto rigido piano con atto di moto traslatorio, prendendo $P \in \pi$ e \mathcal{T} come prima, la (1.23) dá $dz = 0$ mentre

$$dy = dy_Q = \text{cost}, \quad (1.28)$$

$$dx = dx_Q = \text{cost}. \quad (1.29)$$

Come funzioni delle coordinate x, y le variabili dx, dy sono delle costanti, e quindi la loro rappresentazione grafica porta ai diagrammi degli spostamenti in Fig. 11 destra.

1.4 Moti rigidi piani di piú corpi.

Consideriamo due solidi $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$, diciamo $\mathcal{E}_3^1, \mathcal{E}_3^2$ i loro spazi solidali, e supponiamo che essi si muovano di moto rigido piano rispetto ad uno stesso piano fisso π , cioè che esistano due piani $\pi_1 \subset \mathcal{E}_3^1, \pi_2 \subset \mathcal{E}_3^2$, che si muovano rimanendo sovrapposti a $\pi \subset \mathcal{E}_3$. Poiché π_1, π_2 rimangono tra loro sovrapposti, $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ si muovono di moto rigido piano anche l'uno rispetto all'altro.

Per ogni $P_1 \in \pi_1$ indichiamo con P_2 il punto di π_2 istantaneamente sovrapposto a P_1 , e viceversa. Indichiamo con $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ le velocità di P_1, P_2 rispetto a π , con $\underline{v}_{12}, \underline{v}_{21}$ la velocità di P_1 rispetto a π_2 e la velocità di P_2 rispetto a π_1 rispettivamente. Evidentemente per la legge di composizione delle velocità (1.10)

$$\underline{v}_{12} = \underline{v}_1 - \underline{v}_2; \quad (1.30)$$

$\underline{v}_1, \underline{v}_{12}, \underline{v}_2$ giocano rispettivamente i ruoli di velocità assoluta di P_1 , relativa di P_1 rispetto a π_2 e di trascinalento. Da (1.30) e dalla sua analoga con 1,2 scambiati segue

$$\underline{v}_{21} = \underline{v}_2 - \underline{v}_1 = -\underline{v}_{12}.$$

Chiamiamo C_{12}, C_{21} i centri istantanei di rotazione rispettivamente nel moto di π_1 rispetto a π_2 e π_2 rispetto a π_1 . Se C_{12} è un punto proprio, e scelgo P_1 sovrapposto istantaneamente a C_{12} , trovo $\underline{v}_{12} = 0$; per l'equazione precedente allora è anche $\underline{v}_{21} = 0$, e cioè P_2 ha velocità nulla rispetto a π_1 , e quindi C_{21} è sovrapposto a P_2 , e troviamo la

Proposizione 8 *Ad ogni istante t C_{12}, C_{21} coincidono.*

La proposizione è vera anche se C_{12} è un punto improprio. Infatti in questo caso \underline{v}_{12} è la stessa per tutti i punti $P_1 \in \pi_1$, e per l'equazione precedente anche \underline{v}_{21} è la stessa per tutti i punti $P_2 \in \pi_2$, e le direzioni perpendicolari a $\underline{v}_{12}, \underline{v}_{21}$, cioè C_{12}, C_{21} , coincidono.

Un'altra proprietà di immediata dimostrazione è la seguente

Proposizione 9 *Se π_1, π_2 hanno un punto A in comune, cioè $A \in \pi_1 \cap \pi_2 \forall t$, allora $C_{12} = A = C_{21}$.*

Infine, detti C_1, C_2 i centri istantanei di rotazione nel moto di π_1, π_2 rispetto a π , vale la

Proposizione 10 *(Regola di allineamento) C_1, C_2, C_{12} sono allineati ad ogni istante t .*

Dim: Se C_1, C_2 coincidono ($C_1 \equiv C_2$), allora se sono propri scelgo $P_1 \equiv C_1 \equiv C_2$, per cui $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 = \underline{0}$, $\underline{v}_{12} = \underline{0}$, e addirittura $C_{12} \equiv P_1 \equiv C_1 \equiv C_2$, e l'asserto è verificato; se sono impropri allora $\underline{v}_1, \underline{v}_2$, e quindi anche $\underline{v}_{12} = \underline{v}_1 - \underline{v}_2$, sono indipendenti dal punto ed hanno la stessa direzione e quindi di nuovo centri C_1, C_2, C_{12} sono coincidenti. Vediamo ora gli altri casi. Se C_1, C_2 non coincidono possono esser entrambi impropri, o no. Supponiamo prima che almeno un centro, diciamo C_1 , sia proprio. Denotiamo con r la retta che congiunge C_1, C_2 (v. Fig. 1.4). Per il teorema di Chasles, per un qualunque punto $P_1 \in \pi_1$ istantaneamente giacente su r risulta $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \perp r$. Se risulta $\underline{v}_1 = \underline{v}_2$, allora $\underline{v}_{12} = \underline{0}$ e $C_{12} \equiv P_1 \in r$; se invece $\underline{v}_1 \neq \underline{v}_2$, allora per la (1.30) risulta $0 \neq \underline{v}_{12} = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \perp r$, che per il teorema di Chasles implica che comunque $C_{12} \in r$, come volevasi dimostrare. Se infine C_1, C_2 sono entrambi impropri allora \underline{v}_1 e \underline{v}_2 , e quindi anche \underline{v}_{12} , sono indipendenti dal particolare punto $P_1 \in \pi_1$, quindi anche l'atto di moto di π_1 rispetto a π_2 è traslatorio, e C_{12} è anch'esso un punto improprio: C_1, C_2, C_{12} sono allineati sulla "retta all'infinito" (l'orizzonte). \square

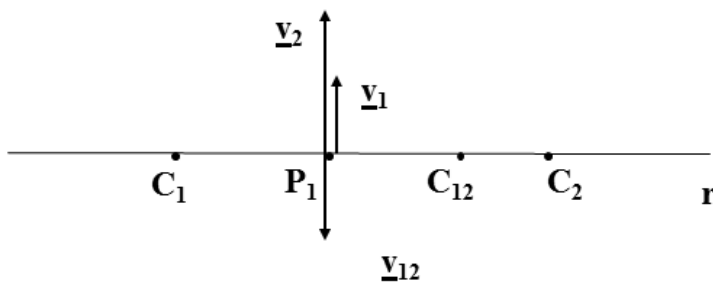


Figure 12:

I risultati precedenti si estendono immediatamente al caso di n solidi tutti in moto rigido piano rispetto allo stesso piano π . Basta sostituire 1, 2 con due qualsiasi $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Facendo giocare a π_k , con $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, il ruolo del piano fisso π , dalla proposizione precedente si ricava anche come corollario la regola di allineamento

Proposizione 11 C_{ij}, C_{ik}, C_{jk} sono allineati.

Applichiamo le regole precedenti per determinare centri e diagrammi degli spostamenti del seguente sistema:

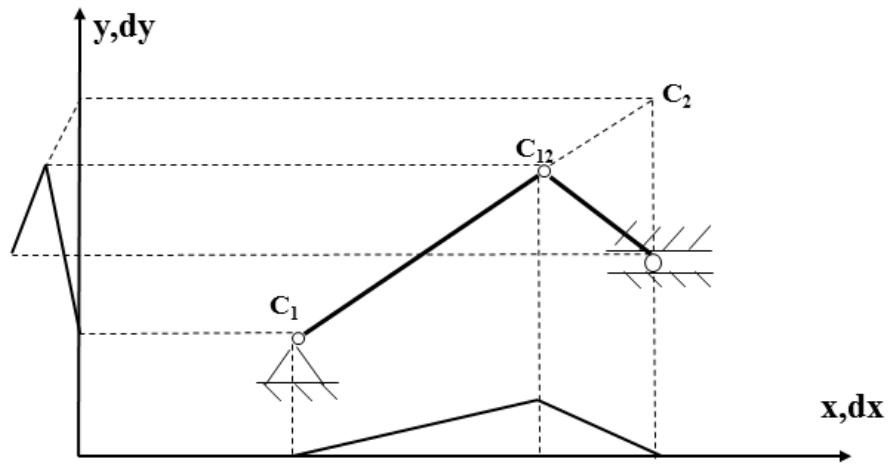


Figure 13:

2 Cinematica di sistemi materiali vincolati

La posizione P di un punto materiale libero di muoversi nello spazio é individuata da 3 coordinate, che diremo *normali*, che possiamo prendere per esempio come le sue coordinate cartesiane (x, y, z) rispetto ad una terna ortonormale $\mathcal{T} = (\Omega, \underline{e}_i)$ prefissata. La posizione di un solido libero di muoversi nello spazio é individuata da 6 coordinate, che diremo anch'esse *normali*, che possiamo prendere per esempio come $(x_{\Omega'}^1, x_{\Omega'}^2, x_{\Omega'}^3, \varphi, \vartheta, \psi)$, ove le prime 3 sono le coordinate cartesiane rispetto a \mathcal{T} dell'origine di una terna $\mathcal{T}' = (\Omega', \underline{e}'_i)$ solidale al solido e φ, ϑ, ψ sono gli angoli di Eulero, che individuano l'orientamento dei vettori di \mathcal{T}' rispetto a quelli di \mathcal{T} .

Diremo *coordinate normali* di un sistema \mathcal{S} di punti materiali e/o solidi liberi di muoversi nello spazio quelle che si ottengono mettendo assieme delle coordinate normali per ciascun costituente. Un sistema \mathcal{S} di N punti materiali ed M solidi liberi ha $m = 3N + 6M$ coordinate normali X^a , che formeranno una m -pla $\bar{X} := (X^1, \dots, X^m)$.

In realtà se \mathcal{S} è costituito da piú corpi queste X^a non possono assumere tutti i valori che potrebbero assumere nel caso che \mathcal{S} sia costituito da un unico corpo, a causa della mutua *impenetrabilità* di corpi differenti, cioè del principio che questi non possono occupare contemporaneamente una stessa porzione di spazio. Per lo stesso motivo anche l'eventuale presenza di solidi esterni a \mathcal{S} , oltre ai corpi di \mathcal{S} , limita le posizioni occupabili e gli spostamenti possibili dei punti di \mathcal{S} . Chiameremo *vincolo olonomo* un qualsiasi oggetto che comporta una di queste limitazioni, e con una semplificazione consueta anche la limitazione stessa. Chiameremo *configurazione* di \mathcal{S} una scelta delle posizioni dei corpi di \mathcal{S} compatibile con i vincoli, *spazio delle configurazioni* \mathcal{Q} l'insieme delle configurazioni.

Un vincolo si dirá *esterno* se realizzato tramite corpi esterni al sistema \mathcal{S} , *interno* altrimenti. Per esempio, l'impenetrabilità di due solidi $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$, cioè che nello stesso punto non possono essere presenti contemporaneamente una particella di \mathcal{S} e una di \mathcal{S}' , dá luogo ad un vincolo interno se entrambi fan parte di \mathcal{S} , esterno se uno dei due non fa parte di \mathcal{S} .

Per es., per una biglia all'interno di una stanza le pareti, il pavimento e il soffitto sono dei vincoli esterni, che diremo *d'appoggio*, per le posizioni che essa puó assumere. Fissato un sistema di coordinate che abbia origine sul pavimento e asse \vec{z} ad esso perpendicolare e detta $z_P(t)$ la corrispondente coordinata della biglia, la condizione che la biglia non possa andare sotto al pavimento (di equazione $z = 0$, v. fig. 14 sinistra) si scrive

$$\varphi[\bar{X}(t)] \equiv z_P(t) \geq 0 \quad \forall t. \quad (2.1)$$

Le posizioni con $z_P(t) = 0$ sono dette *di confine*. Un vincolo che, come il precedente, limita i valori che possono assumere le coordinate normali tramite una *disequazione* si dice *unilaterale*.

Se come pavimento ci interessa considerare non quello di una stanza, ma quello di un ascensore in moto (di equazione $z - vt = 0$, per es.) il vincolo che la biglia non possa andarvi sotto si scriverá

$$\varphi[\bar{X}(t), t] \equiv z_P(t) - vt \geq 0 \quad \forall t$$

e sará un esempio di vincolo unilaterale *dipendente dal tempo* o *mobile*. Se vincolassimo la biglia a giacere sulla superficie di eq. $z = 0$ (risp. di eq. $z - vt = 0$) - per esempio tramite una sottile intercapedine come in figura 14 destra - avremmo invece realizzato un vincolo *d'appartenenza*. Esso si esprime tramite la condizione

$$\varphi[\bar{X}(t), t] \equiv z_P(t) = 0 \quad (\text{risp. } \varphi[\bar{X}(t), t] \equiv z_P(t) - vt = 0) \quad \forall t. \quad (2.2)$$

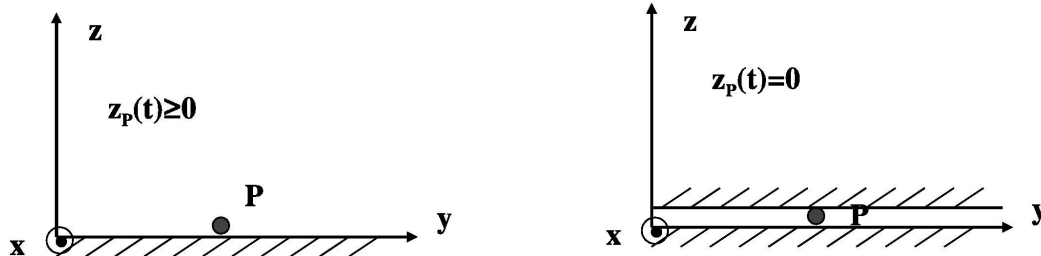


Figure 14:

Un vincolo che, come (2.2), limita i valori che possono assumere le coordinate normali tramite una *equazione* si dice *bilaterale*.³ Derivando rispetto al tempo la (dis)equazione di un vincolo

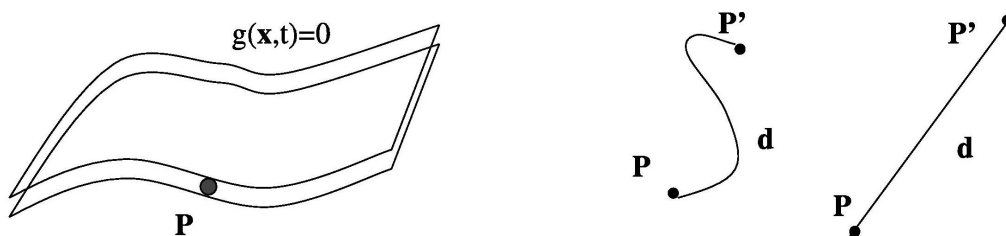


Figure 15:

olonomo ne otteniamo una nuova che limita anche le velocità; per esempio, per la particella appoggiata (risp. appartenente) alla superficie $z = 0$ da (2.1) segue $\dot{z}_p \geq 0$ [resp. da (2.2) segue $\dot{z}_p = 0$]. Ci sono vincoli che limitano le velocità dei punti del sistema, senza essere ricavabili tramite derivazione rispetto a t da vincolo olonomi; essi si dicono *anonomi*.

³Più in generale, per un punto materiale \mathcal{P} vincolato a non oltrepassare (risp. rimanere su) la superficie di eq. $\varphi(\underline{x}, t) = 0$, la condizione sarà $\varphi(\underline{x}_P(t), t) \geq 0$ (vincolo unilaterale o di appoggio) e $\varphi(\underline{x}_P(t), t) = 0$ (vincolo bilaterale o di appartenenza) rispettivamente. Il vincolo di appartenenza si può realizzare come una sottile intercapedine come in figura 15 sinistra. Il vincolo che due punti materiali $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ si mantengano a distanza

$$[\underline{x}_P(t) - \underline{x}_{P'}(t)]^2 \begin{cases} \leq d^2 \\ = d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \varphi(\underline{x}_P, \underline{x}_{P'}) \equiv d^2 - [\underline{x}_P(t) - \underline{x}_{P'}(t)]^2 \begin{cases} \geq 0 \\ = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

è un caso particolare del vincolo di appoggio/appartenenza, precisamente quello in cui la superficie è sferica di raggio d con centro in uno dei due punti. Oltre che con risp. una cavità e un intercapedine sferica, esso si può materialmente realizzare vincolando i due punti con risp. un filo inestensibile/un'asta di lunghezza d (e masse trascurabili) v. fig. 15 destra. (In generale, uno stesso vincolo può essere realizzato fisicamente in modi diversi). Il vincolo che \mathcal{P} rimanga su una curva di eq. $\varphi_1(\underline{x}) = 0, \varphi_2(\underline{x}) = 0$ è $\varphi_1(\underline{x}_P(t)) = 0, \varphi_2(\underline{x}_P(t)) = 0$. Il vincolo che \mathcal{P} rimanga fisso in P_0 è $\underline{x}_P(t) = \underline{x}_{P_0}$.

Un esempio di vincolo anolonomo è quello che caratterizza la velocità dei punti della lama di un pattino da ghiaccio, che è vincolata ad essere parallela alla direzione della lama. Sulle coordinate normali $\bar{X} = (x_A, y_A, z_A, \theta, \varphi, \psi)$ oltre ai vincoli olonomi $z_A = 0 = \theta = \varphi$ c'è quello anolonomo

$$\dot{y}_A \cos \psi - \dot{x}_A \sin \psi = 0.$$

Noi non tratteremo vincoli anolonomi⁴.

Dopo questi esempi siamo pronti per la definizione generale: diremo *vincoli olonomi bilaterali* (risp. *unilaterali*) delle condizioni sulle coordinate normali esprimibili tramite delle equazioni (risp. disequazioni) della forma⁵

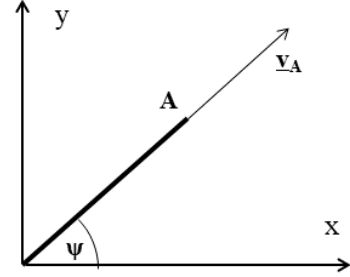
$$\begin{aligned} \varphi_1(\bar{X}, t) &= 0, \\ &\dots, \\ \varphi_s(\bar{X}, t) &= 0, \\ \varphi_{s+1}(\bar{X}, t) &\geq 0, \\ &\dots, \\ \varphi_{s+k}(\bar{X}, t) &\geq 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Piú vincoli unilaterali possono essere equivalenti ad uno bilaterale, ad esempio il sistema $\varphi(\bar{X}, t) \geq 0, -\varphi(\bar{X}, t) \geq 0$ é equivalente a $\varphi(\bar{X}, t) = 0$; nella (2.4) supporremo di aver già sostituito eventuali coppie di vincoli unilaterali con i bilaterali equivalenti. Una soluzione \bar{X}' di (2.4) individua una configurazione *di confine* se almeno una delle disequazioni è soddisfatta come uguaglianza, *ordinaria* altrimenti.

Nell'esempio (2.2) è chiaro che la coordinata $z_P(t)$, essendo prefissata a priori, diventa superflua per la determinazione della posizione della biglia; basterá conoscere le coordinate (x_P, y_P) . Ciò restará vero anche nel caso di vincolo di appartenenza ad una superficie $ax + by + cz + d = 0$, con $c \neq 0$, perché z_P sarà esprimibile in funzione di (x_P, y_P) in virtù dell'equazione. Delle coordinate che, come le (x_P, y_P) nell'esempio precedente, occorranò e bastino ad individuare univocamente le configurazioni di \mathcal{S} , si dicono *coordinate lagrangiane*. La scelta delle coordinate lagrangiane non è unica (nell'esempio precedente potremmo utilizzare anche la distanza r_P di P dall'origine e il suo azimuth φ_P , ad esempio), ma il loro numero n è univocamente determinato, e si dice *grado di libertà* del sistema; in alternativa, si dice anche che il sistema *ha n gradi di libertà*. Indicheremo un generico sistema di n coordinate lagrangiane con $q := (q^1, q^2, \dots, q^n)$. Nell'esempio (2.2) abbiamo quindi $n = 2$, e $q^1 = x_P, q^2 = y_P$, oppure $q^1 = r_P, q^2 = \varphi_P$, etc. Per un solido con un punto fisso $n = 3$, e possiamo scegliere come q^1, q^2, q^3 i tre angoli di Eulero. Per un solido con un asse r fisso $n = 1$, e conviene scegliere come q l'angolo di rotazione ψ attorno a r . In generale non esiste un sistema di coordinate lagrangiane che descriva tutto lo spazio delle configurazioni, ma una collezione (*atlante*) di sistemi locali (*carte*) compatibili gli uni con gli altri.

⁴Siccome la velocità \underline{v}_A del pattino deve essere parallela ad esso, il rapporto $v_A^y/v_A^x = \dot{y}_A/\dot{x}_A$ tra le sue componenti (che sono cateti di un triangolo rettangolo) deve essere uguale a $\tan \psi = \sin \psi / \cos \psi$, almeno per $\psi \neq \pm\pi/2$ (mentre per $\psi = \pm\pi/2$ entrambi divergono). Moltiplicando entrambi i membri per $\dot{x}_A \cos \psi$ questa condizione diventa $\dot{y}_A \cos \psi = \dot{x}_A \sin \psi$, che ha senso ed va imposta anche per $\psi = \pm\pi/2$, perché dice che quando il pattino é parallelo a \bar{y} anche \underline{v}_A lo é.

⁵Invece, i vincoli anolonomi saranno della forma $\varphi(\bar{X}, \dot{\bar{X}}, t) = 0$, senza essere ricavabili da vincoli olonomi per derivazione rispetto a t .



Diremo *spostamento virtuale* di un punto materiale isolato di \mathcal{S} (o di una particella di un solido di \mathcal{S}) avente posizione P un suo spostamento elementare (cioè infinitesimo) dP compatibile con i vincoli, considerati come se questi fossero fissi nella loro configurazione attuale se essi sono mobili, e lo indicheremo con il simbolo δP . Nel caso di vincoli fissi gli spostamenti virtuali sono quindi (tutti e soli) gli spostamenti elementari resi effettivamente possibili dai vincoli, nel caso di vincoli mobili non necessariamente. Nel caso della biglia appoggiata sul pavimento sono virtuali tutti quelli disegnati in figura con linea continua, non lo sono quelli tratteggiati, sia che la superficie sia fissa nella configurazione disegnata, sia che essa sia in moto e quella disegnata sia la sua configurazione all'istante t .

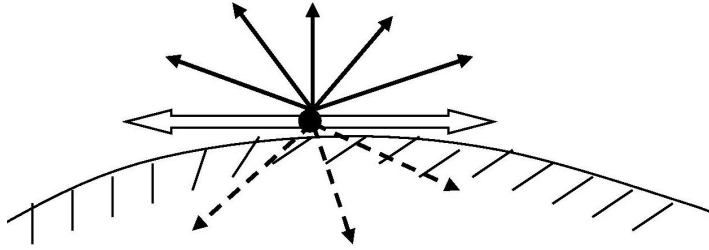


Figure 16:

Gli spostamenti virtuali si dividono in *reversibili* ed *irreversibili* (disegnati in figura 16 con linea continua risp. doppia o semplice; a linea tratteggiata sono disegnati invece gli spostamenti elementari non virtuali): δP si dice *reversibile* se anche $-\delta P$ è virtuale, *irreversibile* altrimenti. Evidentemente, se P è soggetto solo a vincoli bilaterali tutti gli spostamenti virtuali sono reversibili, mentre, se P è soggetto anche a vincoli unilaterali ci sono spostamenti virtuali irreversibili a partire dalle posizioni di confine. Si dice spostamento virtuale di un sistema di punti materiali $\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots\}$ nella configurazione $\mathcal{S} = \{P_1, P_2, \dots\}$ (e lo indicheremo con $\delta \mathcal{S}$) un insieme di spostamenti virtuali per tutti i suoi punti: $\delta \mathcal{S} = \{\delta P_1, \delta P_2, \dots\}$. $\delta \mathcal{S}$ si dice *reversibile* se anche $-\delta \mathcal{S} := \{-\delta P_1, -\delta P_2, \dots\}$ è virtuale. In particolare uno spostamento virtuale di un solido è un insieme di spostamenti virtuali per tutti i suoi punti. Anche se questi sono infiniti, i loro spostamenti elementari, e quindi anche quelli virtuali, non sono indipendenti gli uni dagli altri, ma sono vincolati dalla condizione (1.22), che prenderá ora la forma

$$\delta P = \delta Q + \delta \underline{\psi} \times (P - Q), \quad (2.5)$$

valida per ogni coppia di punti P, Q del solido o del suo spazio solidale; qui abbiamo indicato con $\delta \underline{\psi}$ una determinazione del vettore angolo infinitesimo di rotazione $d\underline{\psi}$ compatibile con i vincoli bloccati nella configurazione assunta all'istante t . Perciò lo spostamento virtuale del solido puó essere completamente parametrizzato tramite la coppia di vettori $\{\delta Q, \delta \underline{\psi}\}$ (Q é un punto prefissato a piacere dello spazio solidale al solido), che perciò (con abuso di linguaggio) viene chiamata anch'essa spostamento virtuale del solido. Uno spostamento virtuale $\{\delta Q, \delta \underline{\psi}\}$ sará *reversibile* se anche $\{-\delta Q, -\delta \underline{\psi}\}$ è virtuale, *irreversibile* altrimenti.

Vediamo ora come si possono determinare il grado di libertá, un sistema di coordinate lagrangiane e gli spostamenti virtuali una volta assegnato il sistema dei vincoli (2.4). Supponiamo dapprima per semplicitá che i vincoli formino un sistema di equazioni lineari nelle

di equazioni lineari nelle incognite $\delta X^1, \dots, \delta X^m$; il numero $r \leq m$ di equazioni indipendenti é pari al rango di $J(\bar{X})$. Chiamando $l := m - r$ *grado di labilitá*, $i := s - r$ *grado di iperstaticitá*, di \mathcal{S} in \bar{X} , si possono presentare i seguenti casi:

1. $l=0, i=0$, il sistema é detto *isostatico*;
2. $l=0, i>0$, il sistema é detto *i -volte iperstatico*;
3. $l>0, i \geq 0$, il sistema é detto *l -volte labile*, con i vincoli dipendenti.

Nei casi 1.,2. la (2.7) ammette solo la soluzione $\delta \bar{X} = \bar{0}$, quindi non esistono spostamenti virtuali e la soluzione \bar{X} di (2.4) é isolata, cioè \mathcal{S} é bloccato nella configurazione \bar{X} ; ma nel caso 2. (un numero pari a) i vincoli dipendono dagli altri e quindi sono superflui dal punto di vista cinematico.

Nel caso 3. (2.7) ammette ∞^l soluzioni: r incognite δX^a si possono infatti ricavare come combinazioni lineari delle l restanti δX^a . Se per es. le prime r colonne di $J(\bar{X})$ sono indipendenti (questo si puó sempre ottenere con una permutazione degli indici) posso esprimere $\delta X^1, \dots, \delta X^r$ in funzione di $\delta X^{r+1}, \dots, \delta X^m$.

Il teorema del Dini assicura che, cosí facendo, in un intorno di \bar{X} é possibile ricavare le componenti X'^1, \dots, X'^r della soluzione \bar{X}' di (2.4), e quindi le configurazioni compatibili con i vincoli, come funzioni di classe C^1 di $\delta X^{r+1}, \dots, \delta X^m$, in modo che $X'^1 - X^1 = \delta X^1 + o(\delta \bar{X}), \dots, X'^r - X^r = \delta X^r + o(\delta \bar{X})$.

Se le $\delta X^{r+1}, \dots, \delta X^m$ sono indipendenti in un intorno di $\mathcal{I}_{\bar{X}}$ di \bar{X} , allora in esso le posso adottare come coordinate lagrangiane (locali); condizione é che in $\mathcal{I}_{\bar{X}}$ il rango r' di $J(\bar{X}')$ sia pari ad r (e non maggiore). In questo caso allora \mathcal{S} ha $n = l = m - r$ gradi di libertá (vincoli *ben disposti*), e posso adottare $q^1 := \delta X^{r+1}, \dots, q^n := \delta X^m$ come coordinate lagrangiane locali; n rappresenta il numero delle equazioni (2.4) funzionalmente indipendenti.

Puó però capitare anche il caso delicato che in ogni intorno di \bar{X} esista un sottinsieme denso D tale che il rango di $J(\bar{X}')$ sia una costante $r' > r$ per ogni $\bar{X}' \in D$ (diremo allora che in \bar{X} i vincoli sono *mal disposti*). Applicando il teorema del Dini a \bar{X}' , in un suo intorno potremo ricavare r' delle X^a , e quindi le configurazioni compatibili con i vincoli, come funzioni delle $l' = m - r' < l$ restanti δX^a ; siccome questo si puó fare per *ogni* $\bar{X}' \in D$, con un'estensione continua potremo adottare queste ultime come coordinate lagrangiane in tutto un'intorno di \bar{X} (quindi anche in \bar{X}), e \mathcal{S} avrà $n = l' < l$ gradi di libertá. Tuttavia, mentre gli spostamenti virtuali a partire da tutti i $\bar{X}' \in D$ saranno $\infty^{l'} = \infty^n$, quelli a partire da \bar{X} saranno "piú numerosi", ∞^l .

Vedremo piú avanti l'importanza di questi concetti per il calcolo delle reazioni vincolari statiche: queste sono determinate univocamente in funzione delle altre forze nel caso 1; a meno di i parametri nel caso 2; mentre il sistema puó non essere in equilibrio nel caso 3. In fig. 17 anticipiamo esempi risp. di un sistema 1-volta iperstatico (sinistra), isostatico (centro), con gradi $n = 0$ di libertá e $l = 1$ di labilitá (destra); calcoleremo $J(\bar{X})$ ed il suo rango piú avanti, quando tratteremo la statica di questi sistemi soggetti a date forze attive.

Se tutte le φ_i bilaterali sono indipendenti; allora $r = s$ e $n := m - s$. Quindi ogni nuovo vincolo bilaterale indipendente dagli altri abbassa n di 1 (mentre i vincoli unilaterali non abbassano n , a meno che non cooperino a formare qualche nuovo vincolo bilaterale). Per esempio, un punto materiale libero di muoversi nello spazio ha 3 gradi di libertá, vincolato

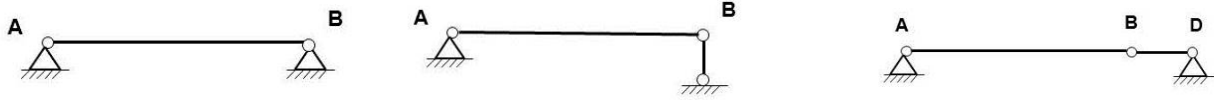


Figure 17: Sistema 1-volta iperstatico (sinistra), isostatico (centro), con $n=0$ e $l=1$ (destra).

a muoversi su una superficie (risp. curva) ne ha 2 (risp. 1), etc; un solido libero di muoversi nello spazio ha 6 gradi di libertà, etc. (Esercizio: scrivere $J(\overline{X}')$ per gli esempi precedenti).

Dato un sistema di punti materiali soggetto a vincoli olonomi ed avente n gradi di libertà, ed introdotto un sistema di coordinate lagrangiane q , la posizione P_i dell' i -esima particella sarà (per ogni i) una funzione nota della n -pla q : $P_i = P_i(q, t)$. La dipendenza dal tempo qui indicata sarà banale nel caso di vincoli fissi. Il moto della generica particella, e quindi dell'intero sistema, sarà quindi completamente determinato dalla conoscenza delle coordinate lagrangiane come funzioni del tempo, $q = q(t)$: $P_i(t) = P_i(q(t), t)$.

La velocità dell' i -esima particella e il suo spostamento elementare nell'intervallo temporale $[t, t + dt]$ saranno quindi rispettivamente dati da

$$v_i = \dot{P}_i = \sum_{h=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q^h} \dot{q}^h + \frac{\partial P_i}{\partial t}, \quad (2.8)$$

$$dP_i = \sum_{h=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q^h} dq^h + \frac{\partial P_i}{\partial t} dt. \quad (2.9)$$

Un suo spostamento virtuale δP_i a partire da una configurazione non singolare si esprimerà in termini di coordinate lagrangiane invece nella forma

$$\delta P_i = \sum_{h=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q^h} \delta q^h, \quad (2.10)$$

ove con δq^h abbiamo indicato una variazione infinitesima dq^h di q^h compatibile con gli eventuali vincoli unilaterali. Il termine $\frac{\partial P_i}{\partial t} dt$, che rappresenterebbe la parte di dP_i dovuta all'eventuale moto dei vincoli, è assente per la definizione di spostamento virtuale, secondo la quale i vincoli vanno considerati come se fossero fissi nella posizione attuale.