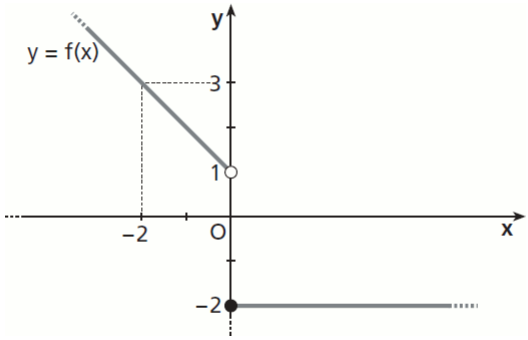
FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

Dominio di una funzione

Osservando il grafico della figura, trova il dominio e il codominio della funzione e l'equazione di $y = f(x)$. Inoltre calcola $f(-3)$, $f(0)$, $f(1)$, $-2 = f(...)$, $5 = f(...)$.



$$\left[\forall x \in R; y > 1 \vee y = -1; f(x) = \begin{cases} -x+1 & x < 0 \\ -2 & x \geq 0 \end{cases}; f(-3) = 4, f(0) = -2, f(1) = -2; x \geq 0; -4 \right]$$

Disegna il grafico della funzione indicata. Determina il codominio di $f(x)$ e calcola $f(-3)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(5)$. Trova poi per quali valori di x si ha $f(x) = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases} \qquad [y \geq -1; f(-3) = 3, f(0) = 0, f(1) = 3, f(5) = 9; x = -2 \vee x = 0]$$

Per ognuna delle seguenti funzioni indica se è razionale (intera o fratta), irrazionale, trascendente e determina il dominio.

$$y = \frac{x-3}{2x^2 + x - 1}; \quad y = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 9}}. \qquad \left[x \neq -1 \ \wedge \ x \neq \frac{1}{2}; x < -3 \ \vee \ x > 3 \right]$$

$$y = \sqrt{x-2} - \sqrt{x}; \quad y = x \ln \frac{|x|}{x+1}. \qquad [x \geq 2; x > -1]$$

$$y = \sqrt{e^{\cos x} - 1}; \quad y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{2x}}. \qquad \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi; 0 < x \leq 1 \right]$$

Segno di una funzione

Studia il segno delle seguenti funzioni nel loro dominio.

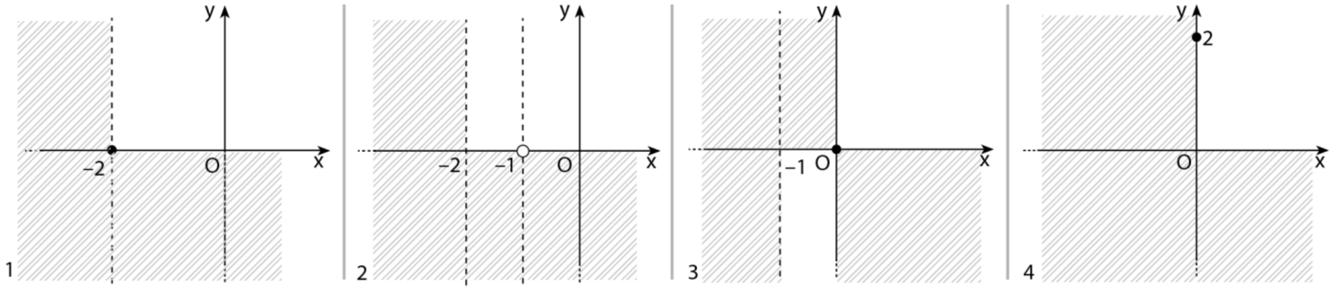
$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{2x^3}} \qquad [D: 0 < x \leq 1 \ \vee \ x \geq 2; y > 0 \text{ per } 0 < x < 1 \ \vee \ x > 2]$$

$$y = -\sin(1 + 3x); \quad y = \frac{4x + |2x - 1|}{\ln(3 - x)}.$$

$$\left[D\text{: } \mathbf{R}, y > 0 \text{ per } \frac{\pi - 1}{3} + \frac{2}{3}k\pi < x < \frac{2\pi - 1}{3} + \frac{2}{3}k\pi; \ D\text{: } x < 3 \wedge x \neq 2, y > 0 \text{ per} -\frac{1}{2} \leq x < 2 \right]$$

ASSOCIA a ogni funzione la figura che indica la zona in cui si trova il grafico.

a. $y=\ln\sqrt{x+1}$ b. $y=\dfrac{x^2+2x+2}{\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}$ c. $y=\dfrac{e^{\frac{1}{x+1}}}{\sqrt{x+2}}$ d. $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2+6x+9}$



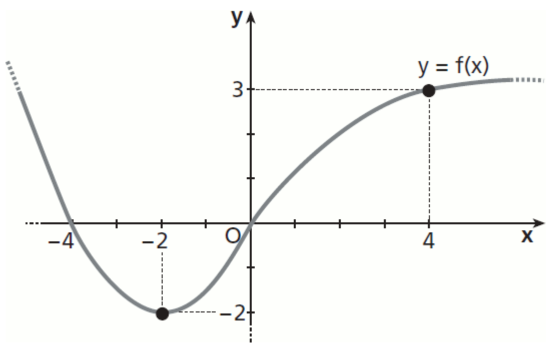
[a-3; b-4; c-2; d-1]

Grafici delle funzioni e trasformazioni geometriche

Disegna i grafici delle seguenti funzioni.

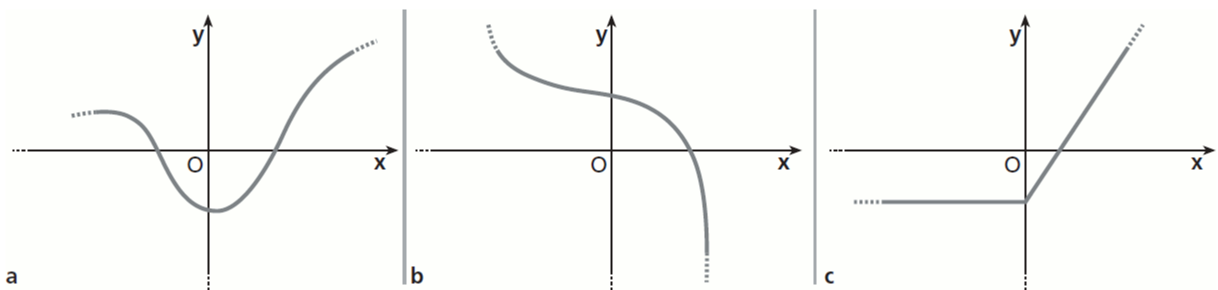
$$y=2|x|-7\,;\quad y=x^2+|x|-1\,;\quad y=3^{|x|}-2\,;\quad y=\sqrt{1-\frac{3}{x}}\,.$$

Data la funzione $y=f(x)$ rappresentata nel grafico della figura sotto, disegna i grafici delle funzioni $y=\left|f(x)\right|$, $y=f\left(|x|\right)$, $y=-f(x)-1$, $y=f(-x)$.



PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI

Ogni grafico rappresenta una funzione $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$. Indica per ognuno se si tratta di una funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva.



[a. né iniettiva né suriettiva; b. biiettiva; c. né iniettiva né suriettiva]

Dopo averla rappresentata, indica in quali intervalli la seguente funzione è crescente e in quali decrescente.

$$y=\begin{cases}3x+2 & \text{se } x\le 1\\ 7-2x & \text{se } x>1\end{cases}$$ [cresc. per $x<1$; decr. per $x>1$]

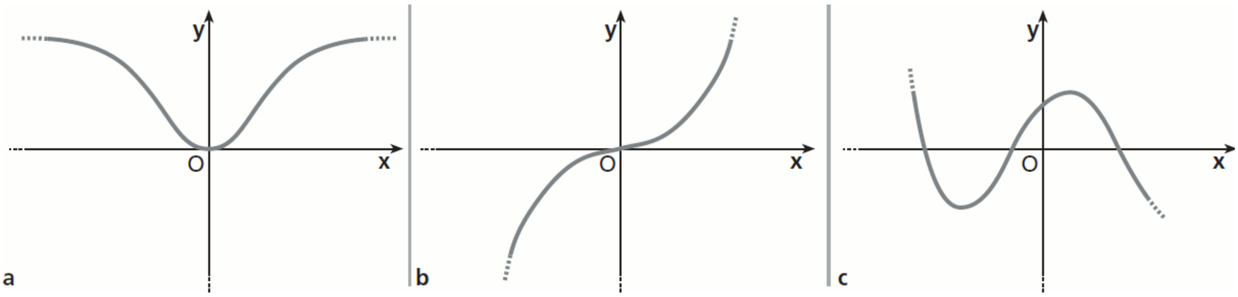
Traccia il grafico delle seguenti funzioni nel dominio indicato e prolungalo per periodicità su **R**.

a) $f(x)=x-3$, $x\in[0;2[$; b) $f(x)=-x^2$, $x\in[0;2[$; c) $f(x)=\cos x+1$, $x\in[0;\pi[$.

Fra le seguenti funzioni indica quali sono pari, quali dispari e quali né pari né dispari, motivando la risposta.

$y=2x^3-x+8$; $y=2x^2+|x|$; $y=\sin(2x)-x$. [né pari né dispari; pari; dispari]

Nella figura sono rappresentati i grafici di alcune funzioni. Indica quali sono pari, quali dispari e quali né pari né dispari, motivando la risposta.



[a. pari; b. dispari; c. né pari né dispari]

VERO O FALSO?

a. Una funzione suriettiva è sempre monotona.
b. La funzione $y=\sin x$ è pari.
c. Una funzione pari è simmetrica rispetto all'origine degli assi.
d. La funzione $y=\tan x$ è crescente in $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$.

[a) F; b) F; c) F; d) V]

FUNZIONE INVERSA

In un diagramma cartesiano disegna le seguenti funzioni e le loro inverse, dopo aver considerato, se necessario, opportuni insiemi di partenza e di arrivo, tali che le funzioni siano biiettive. Scrivi l'espressione analitica della funzione inversa.

$y=x^2+4$, $y=e^{2x}$. $\left[f^{-1}(x)=\sqrt{x-4};\ f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln x\right]$

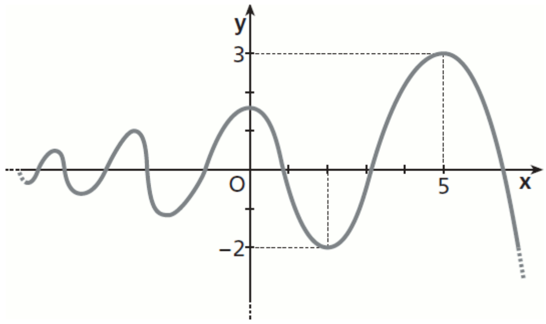
$y=\sqrt[4]{x-5}$, $y=\dfrac{1}{e^x-1}$. $\left[f^{-1}(x)=x^4+5;\ f^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)\right]$

LEGGI IL GRAFICO

Per la funzione rappresentata nel seguente grafico determina:

a. il codominio e stabilisci se è periodica;

b. se è invertibile nell'intervallo [0; 2[e, in caso affermativo, disegna il grafico dell'inversa.



$[\text{a})\ ]-\infty;3];\ \text{non periodica; b) sì}]$

FUNZIONI COMPOSTE

Date le seguenti funzioni *f* e *g*, determina $f\circ g$ e $g\circ f$.

$f(x)=\cos(3x);\quad g(x)=2\sqrt{x}+1$.

$$\left[(f\circ g)(x)=\cos\left(6\sqrt{x}+3\right);\ (g\circ f)(x)=2\sqrt{\cos(3x)}+1\right]$$

$f(x)=\sqrt{3x}$; $g(x)=\dfrac{\ln(x-2)}{x^2}$.

$$\left[(f\circ g)(x)=\sqrt{\frac{3\ln(x-2)}{x^2}};\ (g\circ f)(x)=\frac{\ln\left(\sqrt{3x}-2\right)}{3x}\right]$$

Date le seguenti funzioni *f*(*x*) e *g*(*x*), determina $h(x)=(f\circ g)(x)$ e risolvi la disequazione $h(x)>2$.

$f(x)=2x+1$; $g(x)=\cos x$.

$$\left[(f\circ g)(x)=2\cos x+1;-\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{\pi}{3}+2k\pi\right]$$

INSIEMI DI NUMERI REALI

Dato il seguente insieme, verifica che gli estremi inferiore e superiore sono quelli indicati a fianco, indicando anche se sono minimo o massimo.

$$\left\{x \mid x = \frac{3n+2}{n}, n \in \mathbf{N} - \{0\}\right\},\ 3,\ 5.$$ [5 massimo]

Verifica se gli intervalli seguenti sono intorni completi oppure intorni destri o intorni sinistri del punto x_0 assegnato.

$$x_0 = -\frac{3}{4};\quad \left]-4; -\frac{3}{4}\right[;\quad \left]-4; 4\right[;\quad \left]-\frac{3}{4}; 0\right[.$$ [int. sinistro; int. completo; int. destro]

Verifica che il punto scritto a fianco all'insieme dato è un punto di accumulazione per l'insieme ed elenca alcuni suoi punti isolati.

$$\left\{x \mid x \in \mathbf{R}, x = \frac{1}{3} + \frac{1}{n+2}, n \in \mathbf{N}\right\},\quad x_0 = \frac{1}{3}.$$ $\left[\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; \frac{7}{12}; \frac{8}{15}; \ldots\right]$

VERO O FALSO?

a. $x < a$, con $a \in \mathbf{R}$, è un intervallo aperto illimitato superiormente.

b. $\left]-\infty; 1\right] \cup \left]5; +\infty\right[$ è equivalente a $x < 1 \vee x > 5$.

c. $|x-4| < 2\delta$ è un intorno circolare di 4 di raggio 2δ.

d. Gli estremi dell'intervallo $\left]5; 8\right[$ sono punti di accumulazione .

[a) F; b) F; c) V; d) V]

DEFINIZIONE DI $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Utilizzando la definizione di limite, verifica i seguenti limiti.

$$\lim_{x \to 1} (3x - 7) = -4$$

$$\lim_{x \to -1} (6 - x^2) = 5$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + 1}{x + 1} = 1$$

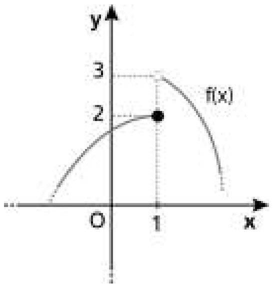
$$\lim_{x \to -4^+} \sqrt{x+4} = 0^+$$

Funzioni continue

Verifica, applicando la definizione, che le seguenti funzioni sono continue nel punto indicato a fianco.

$$f(x) = 3x - 9,\quad x_0 = 2.$$

VERO O FALSO? Data la funzione $f(x)$ rappresentata in figura, quali affermazioni sono vere e quali false?



a. La funzione $f(x)$ è continua in tutto $\mathbf{R}$.

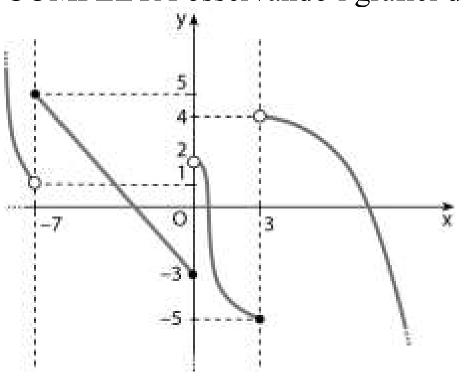
b. La funzione $f(x)$ è continua in $\mathbf{R}^-$.

c. La funzione $f(x)$ non è continua nell'intervallo $[0;1]$.

[a) F; b) V; c) F]

Limite destro e limite sinistro

COMPLETA osservando i grafici di $y = f(x)$.



a. $\lim_{x \to -7^-} f(x) = ...$

b. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = ...$

c. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = ...$

[a) 1; b) 2; c) 4]

DEFINIZIONE DI $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

VERO O FALSO?

a. Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ allora la funzione diverge positivamente.

b. $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ se $\forall M > 0\ \exists I(x_0) : f(x) > M, \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$.

c. $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ allora la funzione diverge positivamente.

[a) V; b) F; c) F]

Verifica i seguenti limiti.

$$\lim_{x \to -2} \frac{1}{(2x+4)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{1}{-x^2-6x-9}=-\infty$$

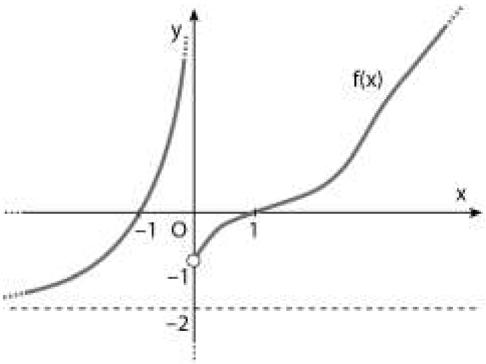
$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{2x-4}=-\infty$$

Asintoti verticali

Verifica che la seguente funzione ha un asintoto verticale nel punto a fianco indicato.

$$y=\frac{1}{(x-4)^2}\,,\ \text{in } x=4.$$

LEGGI IL GRAFICO Scrivi l'equazione dell'asintoto verticale della funzione rappresentata e scrivi il limite che l'esprime.



[$x = 0$; $\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$]

DEFINIZIONE DI $\lim_{x\to\infty} f(x)=4$

La funzione $f(x)$ ha dominio $\left]-\infty;1\right[$. Correggi le scritture $\lim_{x\to\infty} f(x)=4$ e $\lim_{x\to 1} f(x)=1$ perché abbiano senso.

$$\left[\lim_{x\to -\infty} f(x)=4; \lim_{x\to 1^-} f(x)=1\right]$$

Data la funzione $f(x)=\dfrac{2x}{|x|+2}$, verifica i seguenti limiti:

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=-2$; $\lim_{x\to +\infty} f(x)=2$.

Asintoti orizzontali

Verifica, mediante la definizione di limite, che la funzione $y=\dfrac{5x-2}{x+1}$ ha un asintoto orizzontale di equazione $y=5$, sia per $x\to+\infty$, sia per $x\to-\infty$.

DEFINIZIONE DI $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

Verifica i seguenti limiti.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-2x\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\log\left(3-2x\right)=+\infty$$

PRIMI TEOREMI SUI LIMITI

Determina il valore del parametro applicando il teorema di unicità del limite.

$$\lim_{x\to3}\left(x^2-2x+6\right)=9\,,\quad \lim_{x\to3}\left(x^2-2x+6\right)=\frac{10k-2}{k}\,. \qquad \left[k=2\right]$$

Nel seguente limite determina un intorno del punto x_0 in cui la funzione che compare nel limite assume il segno del limite stesso.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-4}{x+1}=-\frac{3}{2} \qquad \left[-1<x<2\right]$$

VERO O FALSO?

a. Se $1\le f(x)\le x^2+1$, allora $\lim_{x\to0} f(x)=1$.

b. Se $f(x)>0 \quad \forall x\in I(-3)$, allora, se esiste $\lim_{x\to-3} f(x)$, esso è positivo.

c. Se $\left|f(x)\right|\le x^4$, allora $\lim_{x\to0} f(x)=0$.

d. Se $f(x)$ è continua e positiva in $\mathbf{R}-\{2\}$ allora $\lim_{x\to2} f(x)$, se esiste, è sicuramente positivo.

[a) V; b) F; c) V; d) F]

OPERAZIONI SUI LIMITI

Calcola i seguenti limiti, servendoti dei teoremi enunciati sui limiti e ricordando la continuità delle funzioni elementari.

$$\lim_{x\to 4}\frac{3x+\sqrt{x}}{x-2} \qquad [7]$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(2\sqrt{2}\sin x+\sqrt{2}\cos x+1\right) \qquad [4]$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{3^x+2^x-1}{2^{2x}-3^x+5} \qquad \left[\frac{8}{15}\right]$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\log(4-x)+\log(x+7)}{x+3} \qquad \left[\frac{1}{6}\right]$$

Utilizzando il teorema del confronto, calcola i seguenti limiti.

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(x^2+2x\right)\cdot\cos\frac{1}{x}\right] \qquad [0]$$

VERO O FALSO?

Se $\lim_{x\to c} f(x)=-1$ e $\lim_{x\to c} g(x)=+\infty$, allora:

a. $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=0$.

b. $\lim_{x\to c}\left(f(x)-g(x)\right)=+\infty$.

c. $\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{f(x)}=+\infty$.

d. $\lim_{x\to c}\left[\left[f(x)\right]^2\cdot g(x)\right]=+\infty$.

[a) V; b) F; c) F; d) V]

Se $\lim_{x\to c} f(x)=-2$ e $\lim_{x\to c} g(x)=+\infty$, allora:

a. $\lim_{x\to c}\left(f(x)-g(x)\right)=+\infty$.

b. $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=0$.

c. $\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{f(x)}=+\infty$.

d. $\lim_{x\to c}\left[\left[-f(x)\right]^2\cdot g(x)\right]=+\infty$.

[a) F; b) V; c) F; d) V]

FORME INDETERMINATE

Calcola il limite delle seguenti funzioni.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-5}\right) \qquad [0]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3+x^2-6x+1\right) \qquad [-\infty]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+4x^2+3x}{x^3+5x^2-2} \qquad [-\infty]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-3x^2+x^4}{1-5x^4-2x} \qquad \left[-\frac{1}{5}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-x^3+2}{4+2x^4+4x^2} \qquad [0]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-2x+5}} \qquad [-1]$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+3x^2+x-1}{x^2+4x+3} \qquad [-1]$$

$$\lim_{x\to-2^-}\frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4} \qquad [-\infty]$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+2\right)^{\frac{3x^2+1}{2x^2\cdot\ln\left(x^2+2\right)}} \qquad \left[\sqrt{e^3}\right]$$

VERO O FALSO?

Se $n > 4$, allora:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n+3}{x^3+1}=+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2n}+3}{x^{3n}+1}=+\infty$.

c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2nx+3}{3nx+1}=0$.

d. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{nx+3}{-1}=-n$.

[a) V; b) F; c) F; d) F]

LIMITI NOTEVOLI

Calcola il limite delle seguenti funzioni.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-4x}{\sin x+2x} \qquad [-1]$$

$$\lim_{x\to0}\frac{5-5\cos x}{2x\sin x} \qquad \left[\frac{5}{4}\right]$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x + x}{x}$$ [5]

FUNZIONI CONTINUE

Verifica che la seguente funzione è continua nel punto segnato a fianco utilizzando la definizione di funzione continua.

$$f(x) = x^2 + 7x, \quad x_0 = 0.$$

Date le seguenti funzioni $f(x)$ e $g(x)$, stabilisci se la funzione composta $(g \circ f)(x)$, considerata nel suo dominio naturale, è continua nel punto indicato a fianco.

$$f(x) = x^2 - 2, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x_0 = \sqrt{2}.$$ [no]

$$f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = \ln x, \quad x_0 = 0.$$ [sì]

Teoremi sulle funzioni continue

Disegna il grafico della seguente funzione nell'intervallo $[-1;1]$, controlla le ipotesi del teorema di Weierstrass e, se esistono, determina il massimo M e il minimo m della funzione.

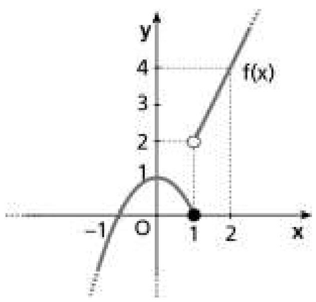
$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } -1 \le x \le 0 \\ \ln(1+x) & \text{se } 0 < x \le 1 \end{cases}$$ $[\text{no; } M = 1]$

Assegnata la seguente funzione, stabilisci se sono verificate le condizioni del teorema degli zeri negli intervalli a fianco indicati. Cosa possiamo dire per l'equazione $f(x) = 0$?

$$f(x) = x^2 - 8x - 2; \quad I_1 = [0;1]; \quad I_2 = [-1;2].$$

[no; sì; l'equazione ammette almeno una soluzione reale x_1 tale che $-1 < x_1 < 2$]

LEGGI IL GRAFICO La funzione $f(x)$ ha il grafico della figura. Nell'intervallo [0; 1] è applicabile il teorema di Weierstass?



[sì]

PUNTI DI DISCONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE

Determina i punti di discontinuità delle seguenti funzioni. Nel caso di un punto di discontinuità di I specie, calcola il salto della funzione in quel punto.

$f(x)=\frac{|2x+4|}{x+2}+1$ $[x=-2$ discontinuità di I specie; salto $=4]$

$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2-x-6}$ $[x=3$ discontinuità di II specie; $x=-2$ discontinuità eliminabile$]$

$f(x)=e^{\frac{x-1}{x^2-1}}$ $[x=-1$ discontinuità di II specie; $x=1$ discontinuità eliminabile$]$

VERO O FALSO?

a. La funzione $y=\frac{\cos x}{x^2}$ ha in $x=0$ una discontinuità di prima specie.
b. La funzione $y=\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ ha in $x=1$ una discontinuità di terza specie.
c. La funzione $y=\frac{(x+2)^2}{x^2+5x+6}$ ha in $x=-3$ una discontinuità eliminabile.
d. La funzione $y=\frac{e^x}{x^2}$ ha in $x=0$ una discontinuità di prima specie.

[a) F; b) V; c) F; d) F]

ASINTOTI

Determina le equazioni degli eventuali asintoti delle seguenti funzioni.

$y=\frac{\ln x+1}{x}$ $[x=0, y=0]$

$y=\frac{3x^2-x+1}{x+1}$ $[x=-1, y=3x-4]$

$y=(x+2)\cdot e^{x-1}$ $[y=0]$

$y=\sqrt{9x^2+4x-1}$ $\left[y=\pm 3x\pm\frac{2}{3}\right]$

$y=\frac{x+1}{e^x+1}$ $[y=0]$

VERO O FALSO?

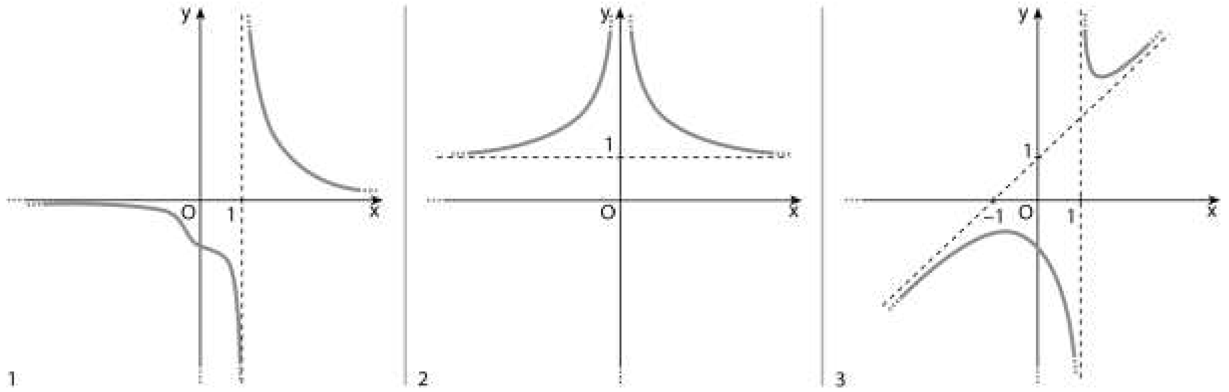
a. Una funzione periodica non può avere asintoti verticali.
b. Una funzione non può avere un asintoto obliquo e uno orizzontale.
c. Se una funzione ha $\lim_{x\to 3} f(x)=+\infty$, allora ha un asintoto verticale di equazione $x=3$.
d. Se una funzione ha $\lim_{x\to -\infty} f(x)=2$, allora ha un asintoto verticale di equazione $x=2$.

[a) F; b) F; c) V; d) F]

GRAFICO PROBABILE DI UNA FUNZIONE

ASSOCIA ogni funzione al relativo grafico.

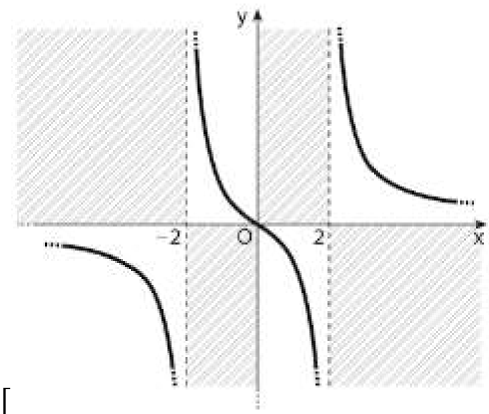
a. $y = \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x-1}$ b. $y = \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x^3-1}$ c. $y = \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}$



[a-3; b-1; c-2]

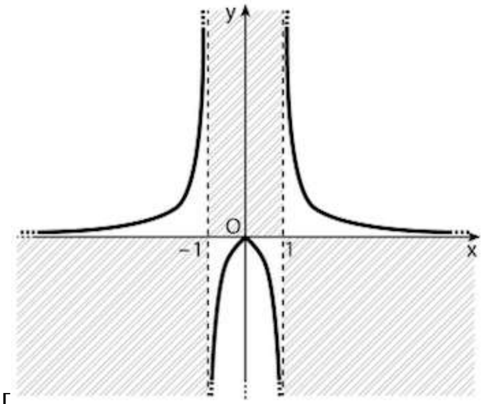
Traccia il grafico probabile della seguente funzione.

$$y = \frac{3x}{x^2-4}$$



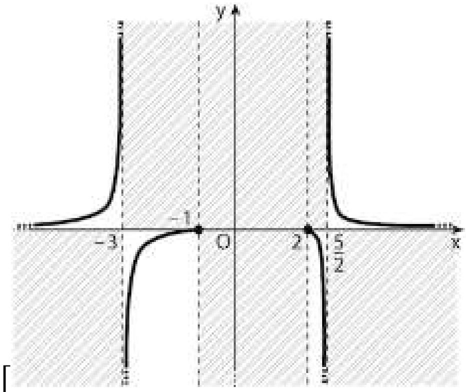
[ ]

$$y = \frac{|x|}{x^2-1}$$



[ ]

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{2x^2 + x - 15}$$

[]

SUCCESSIONI NUMERICHE

Scrivi i primi cinque termini della seguente successione.

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1},\ n \in \mathbf{N}. \qquad \left[1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right]$$

Rappresenta mediante espressione analitica la seguente successione numerica.

$$0, \frac{2}{\sqrt{4}}, \frac{4}{\sqrt{7}}, \frac{6}{\sqrt{12}}, \frac{8}{\sqrt{19}}, \frac{10}{\sqrt{28}}, \ldots \qquad \left[a_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2+3}}\right]$$

Scrivi i primi cinque termini della seguente successione definita ricorsivamente, e determina la sua forma analitica.

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 1 \end{cases} \qquad \left[1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16};\ a_n = 2 - \frac{1}{2^n}\right]$$

Scrivi l'espressione analitica e quella per ricorsione della successione rappresentata sulla retta orientata in figura.

$$\left[a_n = 3 \cdot 4^n;\ \begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = 4 \cdot a_n \end{cases}\right]$$

ALCUNE PROPRIETA' DELLE SUCCESSIONI

Fra le seguenti successioni indica quali sono monotòne, specificandone il tipo, e quali non sono monotòne.

$$a_n = \frac{n+2}{n+1},\ n \in \mathbf{N};\quad a_n = \frac{3n}{n+1},\ n \in \mathbf{N};\quad a_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n,\ n \in \mathbf{N} - \{0\}.$$

[monotòna decrescente; monotòna crescente; non monotòna]

Scrivi i primi dieci termini delle seguenti successioni, rappresentali su una retta orientata, e stabilisci se si tratta di una successione limitata superiormente, limitata inferiormente, limitata o illimitata.

$$a_n = \frac{4n}{n+1},\ n \in \mathbf{N};\quad a_n = \frac{n+1}{2n},\ n \in \mathbf{N} - \{0\};\quad a_n = n^2,\ n \in \mathbf{N}.$$

[limitata; limitata; limitata inferiormente e illimitata]

Vero o falso?

a) La successione $a_n = \log_{\frac{1}{2}}(n+1), n \in \mathbf{N}$ è monotòna crescente.

b) Se una successione non è monotòna crescente allora è monotòna decrescente.

c) La successione $a_n = \dfrac{3n+1}{n+3}, n \in \mathbf{N}$ è illimitata.

d) La successione $a_n = \left(\log_{\frac{1}{3}} 3\right)^n, n \in \mathbf{N}$ è limitata e non monotòna.

[a) F, b) F, c) F, d) V]

LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

Verifica che le seguenti successioni divergono positivamente.

$$a_n = n^2 - 2n, n \in \mathbf{N}.$$

$$a_n = \ln(2n+1), n \in \mathbf{N}.$$

Verifica che le seguenti successioni divergono negativamente.

$$a_n = 1 - 5^{n+1}, n \in \mathbf{N}.$$

$$a_n = \frac{1-n^2}{n}, n \in \mathbf{N} - \{0\}.$$

Verifica il seguente limite, utilizzando la definizione.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1-4n}{2n+1} = -2$$

Verifica che la seguente successione non ammette limite.

$$a_n = (-1)^n (3-n), n \in \mathbf{N}.$$

Associa a ogni successione la corrispondente proprietà.

1. $a_n = 3 \cdot 2^n, n \in \mathbf{N}$	a. Diverge positivamente.
2. $a_n = \dfrac{2^n}{5^{n+1}}, n \in \mathbf{N}$	b. Diverge negativamente.
3. $a_n = (-1)^n \cdot n, n \in \mathbf{N}$	c. Converge.
4. $a_n = 1 - \sqrt{n+1}, n \in \mathbf{N}$	d. Non ammette limite.

[1-a; 2-c; 3-d; 4-b]

CALCOLO DEL LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

Calcola i seguenti limiti.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3n^2+1}{n^2+1}$$ [3]

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{n^2}{n+1} \qquad [-\infty]$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n^2+4}{n+1}} \qquad [+\infty]$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1+3n^4}}{n+3n^2} \qquad \left[\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n}-\sqrt{2n+1}\right) \qquad [-\infty]$$

$$\lim_{n\to+\infty} \log_3\left(\frac{n^2+1}{n+1}\right) \qquad [+\infty]$$

Date le due successioni a_n e b_n, calcola i limiti per n che tende a più infinito delle successioni indicate, applicando i teoremi relativi.

$$a_n = \frac{2n-1}{n},\, n \in \mathbf{N}-\{0\} \;\text{ e }\; b_n = 3-\frac{1}{n},\, n \in \mathbf{N}-\{0\};\;\; a_n+b_n;\, a_n\cdot b_n;\, \frac{3a_n}{b_n};\, \frac{2b_n}{a_n}. \qquad [5;\, 6;\, 2;\, 3]$$