

DERIVATA DI UNA FUNZIONE

Scrivi il rapporto incrementale della seguente funzione nel punto c indicato a fianco e per un incremento h generico.

$$y = x^2 + 3x - 1, \quad c = 2. \quad [h+7]$$

Calcola la derivata della seguente funzione nel punto c indicato a fianco applicando la definizione di derivata.

$$f(x) = 2 + \sqrt{x+1}, \quad c = 3; \quad f(x) = \frac{2}{x+3}, \quad c = 0. \quad \left[\frac{1}{4}, -\frac{2}{9}\right]$$

Calcola la funzione derivata della seguente funzione, applicando la definizione.

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x + 1 \quad [f'(x) = 2x^2 - 4]$$

Calcola la derivata destra e la derivata sinistra della seguente funzione nel punto indicato.

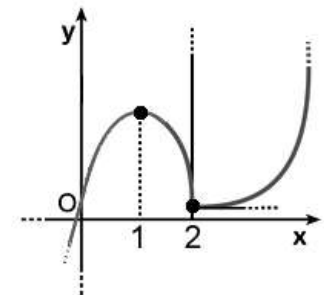
$$f(x) = |x^2 - x|, \quad c = 1. \quad [f'_-(1) = -1; f'_+(1) = 1]$$

VERO O FALSO?

Esamina il grafico della funzione $y = f(x)$ rappresentato in figura.

- a) La funzione è derivabile in $x = 2$.
- b) $f'(0) > 0$
- c) $f'(1) = 0$
- d) $f'_-(2) = 0$

[a) F, b) V, c) V, d) F]



CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ

Rappresenta la funzione assegnata e determina gli intervalli in cui $f(x)$ è continua e quelli in cui è

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 3x - 1 & \text{se } x < 0 \vee x > 1 \end{cases} \quad [\text{continua su } \mathbf{R} - \{0\}; \text{derivabile su } \mathbf{R} - \{0,1\}]$$

ASSOCIA a ogni funzione la corretta descrizione.

$$a) y = \begin{cases} \ln x & \text{se } x \geq 1 \\ x-1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

1) È continua ma non derivabile in $x = 1$.

$$b) y = \begin{cases} \sqrt{x-1} & \text{se } x > 1 \\ e^{x-1} - 1 & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

2) È continua e derivabile in $x = 1$.

$$c) y = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ \cos(x-1) & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

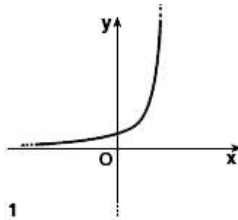
3) Non è continua in $x = 1$.

[a-2; b-1; c-3]

DERIVATE FONDAMENTALI

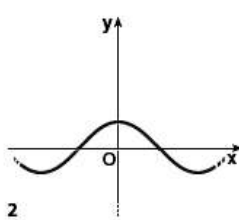
Associa a ogni funzione il grafico della sua derivata.

a. $y = \sqrt{x}$



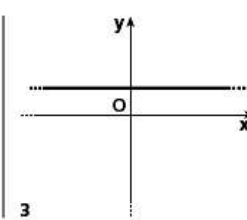
1

b. $y = x$



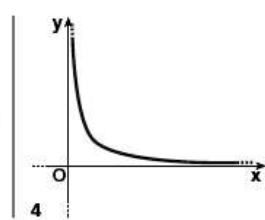
2

c. $y = \sin x$



3

d. $y = e^x$



4

[a-4; b-3; c-2; d-1]

Data la seguente funzione e il punto indicato a fianco:

a) rappresenta la funzione;

b) calcola la sua derivata;

c) la funzione è continua nel punto?

d) la funzione è derivabile nel punto?

$$y = \begin{cases} 1 & \text{se } x < e \\ \ln x & \text{se } x \geq e \end{cases}, x = e.$$

$$\left[y' = \begin{cases} 0 & \text{se } x < e \\ \frac{1}{x} & \text{se } x \geq e \end{cases}, \text{ continua ma non derivabile} \right]$$

OPERAZIONI CON LE DERIVATE

Calcola la derivata delle seguenti funzioni.

$$y = 2e^x + 2x - \cos x$$

$$\left[y' = 2e^x + 2 + \sin x \right]$$

$$y = (x - \ln x) \cdot (\sin x + 3)$$

$$\left[y' = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\sin x + 3) + (x - \ln x)\cos x \right]$$

$$y = x \cdot 2^x \cdot \cos x$$

$$\left[y' = 2^x \cdot \cos x + x \cdot 2^x \cdot \ln 2 \cdot \cos x - x \cdot 2^x \cdot \sin x \right]$$

$$y = 2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2} + 3x$$

$$\left[y' = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + 3 \right]$$

$$y = (x^3 + 2x^2 + x) \cdot \ln x$$

$$\left[y' = (3x^2 + 4x + 1)\ln x + x^2 + 2x + 1 \right]$$

$$y = \frac{x^2 - x + 3}{x^4 + 3}$$

$$\left[y' = \frac{-2x^5 + 3x^4 - 12x^3 + 6x - 3}{(x^4 + 3)^2} \right]$$

$$y = \frac{2e^x + x + \ln x}{x^2}$$

$$\left[y' = \frac{2xe^x - x + 1 - 4e^x - 2\ln x}{x^3} \right]$$

$$y = \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x}$$

$$\left[y' = \frac{\sin x + 2\cos x - 1}{(1 - \sin x)^2} \right]$$

COMPLETA

a) Se $y = 3 \cdot 2^x + 5 \cos x$ allora $y' = 2^x \sin x$.

b) Se $y' = 5x^2 + 4$ allora $y = x^3 x$.

c) Se $y = \frac{x-4}{x+1}$ allora $y' = \frac{\dots}{(x+1)^{\dots}}$.

$$\left[\text{a. } 3\ln 2, -5; \text{b. } \frac{5}{3}, +4; \text{c. } 5, 2 \right]$$

DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA

Calcola la derivata delle seguenti funzioni.

$$y = 2\ln^3 x + \ln(x^2)$$

$$\left[y' = \frac{6\ln^2 x + 2}{x} \right]$$

$$y = \tan(x^2 + 2x)$$

$$\left[y' = \frac{2x + 2}{\cos^2(x^2 + 2x)} \right]$$

$$y = e^{\cos \ln x}$$

$$\left[y' = -\frac{e^{\cos \ln x} \cdot \sin \ln x}{x} \right]$$

$$y = \frac{\cos(2x+1)}{\sin(2-x)}$$

$$\left[y' = \frac{\cos(2-x)\cos(2x+1) - 2\sin(2-x)\sin(2x+1)}{\sin^2(2-x)} \right]$$

ASSOCIA le derivate alle relative funzioni:

1) $y' = 2 \sin^2 x$

a) $y = \sin^2 x$

2) $y' = 2 \sin^2 x \cos x$

b) $y = \frac{2}{3} \sin^3 x$

3) $y' = 2 \sin x \cos x$

c) $y = x - \sin x \cos x$

4) $y' = 2 \sin x$

d) $y = -2 \cos x$

[1-c; 2-b; 3-a; 4-d]

DERIVATA DI $[f(x)]^{g(x)}$

Calcola le derivate delle seguenti funzioni.

$$y = (\cos x)^{\sqrt{x}}$$

$$\left[y' = (\cos x)^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln(\cos x)}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \tan x \right) \right]$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 3}$$

$$\left[y' = \frac{2x + 2}{3\sqrt[3]{(x^2 + 2x + 3)^2}} \right]$$

$$y = \sqrt{\frac{x^2 + 2}{\sin(\pi x)}}$$

$$\left[y' = \frac{2x \sin(\pi x) - \pi \cos(\pi x) \cdot (x^2 + 2)}{2\sqrt{(x^2 + 2)\sin^3(\pi x)}} \right]$$

$$y = x^{x^2-2x}$$

$$\left[y' = x^{x^2-2x} \left[(2x-2) \ln x + x - 2 \right] \right]$$

Determina i punti stazionari della seguente funzione.

$$y = -4 \ln x^2 + x^2$$

$$[c = \pm 2]$$

VERO O FALSO?

a) La derivata della funzione $y = \arcsin x + \arccos x$ è zero.

b) Se $f(4) = 3$ e $f'(4) = 2$, detta g la funzione inversa di f , allora vale $g'(3) = \frac{1}{2}$.

c) La derivata della funzione $y = \arctan \sqrt{x^2 + 1}$ è $y' = \frac{x}{x^2 + 2}$.

[a) V, b) V, c) F]

DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE AL PRIMO

Calcola la derivata prima, seconda e terza delle seguenti funzioni.

$$y = e^{2x} - \frac{x+1}{x-1}$$

$$\left[y' = 2e^{2x} + \frac{2}{(x-1)^2}; y'' = 4e^{2x} - \frac{4}{(x-1)^3}; y''' = 8e^{2x} + \frac{12}{(x-1)^4} \right]$$

$$y = \frac{x+3}{x-2} - e^{3x}$$

$$\left[y' = -\frac{5}{(x-2)^2} - 3e^{3x}; y'' = \frac{10}{(x-2)^3} - 9e^{3x}; y''' = -\frac{30}{(x-2)^4} - 27e^{3x} \right]$$

$$y = 2x^2 \ln x$$

$$\left[y' = 4x \ln x + 2x; y'' = 4 \ln x + 6; y''' = \frac{4}{x} \right]$$

$$y = 3x^2 \ln x$$

$$\left[y' = 6x \ln x + 3x; y'' = 6 \ln x + 9; y''' = \frac{6}{x} \right]$$

ASSOCIA le derivate della funzione $f(x) = 2e^{-3x} - \cos \frac{x}{2} + 2x$:

1) $y = 18e^{-3x} + \frac{1}{4} \cos \frac{x}{2}$

a) $y = f'(x)$

2) $y = 2 - 6e^{-3x} + \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$

b) $y = f''(x)$

3) $y = 162e^{-3x} - \frac{1}{16} \cos \frac{x}{2}$

c) $y = f'''(x)$

4) $y = -54e^{-3x} - \frac{1}{8} \sin \frac{x}{2}$

d) $y = f^{(4)}(x)$

[1-b; 2-a; 3-d; 4-c]

RETTA TANGENTE E PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

Retta tangente

Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico delle seguenti funzioni nei punti di ascissa x_0 a fianco segnati.

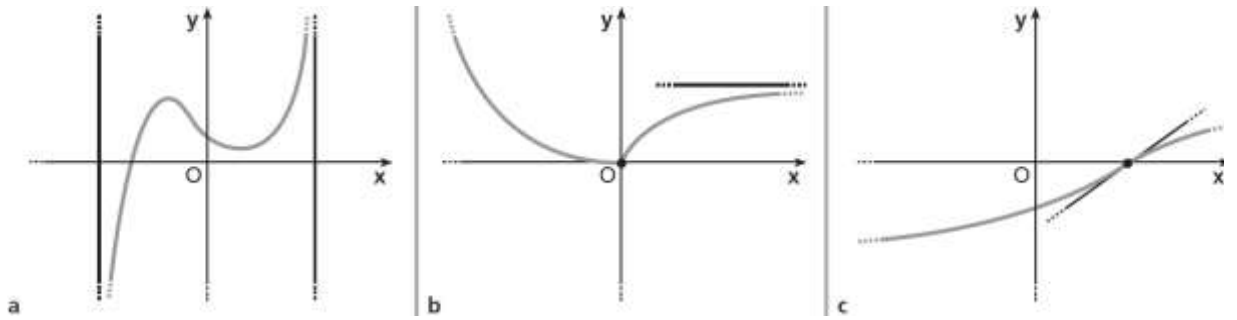
$$y = x^3 + 2x^2 - 1, \quad x_0 = -1; \quad y = \sin x + \cos x - 1, \quad x_0 = \pi. \quad [x + y + 1 = 0; x + y + 2 - \pi = 0]$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}, \quad x_0 = 3.$$

$$\left[y = \frac{5}{16}x + \frac{9}{16} \right]$$

Punti stazionari

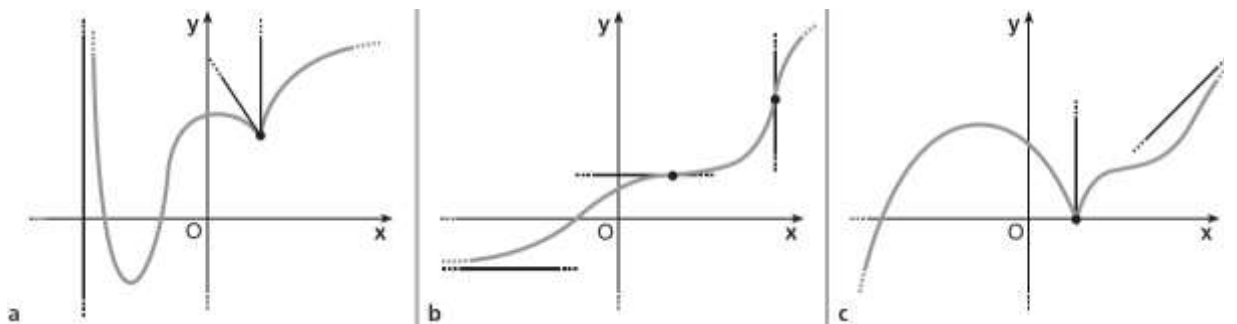
In ognuno dei seguenti grafici segna gli eventuali punti stazionari.



[a) 2 punti stazionari; b), c) nessun punto stazionario]

Punti di non derivabilità

In ognuno dei seguenti grafici segna gli eventuali punti di flesso a tangente verticale, i punti di cuspidi e i punti angolosi.



[a) un punto angoloso; b) un punto di flesso a tangente verticale; c) un punto di cuspidi]

TEOREMA DI ROLLE

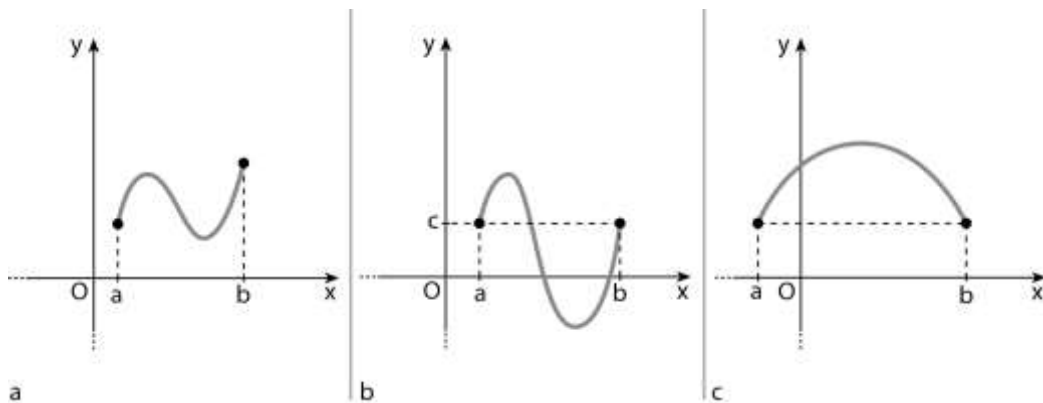
Data la seguente funzione, verifica che nell'intervallo indicato a fianco valgono le ipotesi del teorema di Rolle e trova il punto (o i punti) la cui esistenza è assicurata dal teorema.

$$y = \frac{1}{x^4 - x^2 + 1}, \quad [-2; 2]. \quad \left[c_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}; c_2 = 0; c_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

La seguente funzione non verifica le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo indicato a fianco. Spiega il perché.

$$y = \frac{1}{|x+1|}, \quad [-2; 0]. \quad [\text{la funzione non è continua in } x = -1]$$

Indica quale delle seguenti funzioni verifica il teorema di Rolle nell'intervallo $[a; b]$. Segna nel grafico il punto (o i punti) in cui vale la relazione del teorema. Per le restanti funzioni specifica perché il teorema non è verificato.



[b e c]

TEOREMA DI LAGRANGE

Date le seguenti funzioni, verifica che nell'intervallo indicato a fianco valgono le ipotesi del teorema di Lagrange e trova il punto (o i punti) la cui esistenza è assicurata dal teorema.

$$y = x^3 + 2x + 3, \quad [-3; 0]. \quad [c = -\sqrt{3}]$$

VERO O FALSO?

- Una funzione costante verifica le ipotesi del teorema di Lagrange per ogni valore di x nell'intervallo $[a; b]$.
- Dato l'intervallo $[a; b]$, se la funzione $f(x)$ verifica il teorema di Lagrange, allora lo verifica anche $y = e^{f(x)}$.
- Se $f(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange, allora il punto c , che esiste per la tesi del teorema, non può mai essere unico.
- Se $f(x)$ è derivabile in $]a; b[$, allora verifica le ipotesi del teorema di Lagrange in $[a; b]$.

[a) V; b) V; c) F; d) F]

CONSEGUENZE DEL TEOREMA DI LAGRANGE

Studia la continuità e la derivabilità delle seguenti funzioni. Indica il tipo dei punti di non derivabilità.

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt{1-3x} & \text{se } x \leq 0 \\ -\frac{3}{2}x + 3 & \text{se } 0 < x \leq 4 \\ \ln(x-3) - 3 & \text{se } x > 4 \end{cases} \quad [\text{cont. } \forall x \in \mathbf{R}, \text{ deriv. per } x \neq 4; x = 4 \text{ punto angoloso}]$$

TEOREMA DI CAUCHY

Date le seguenti funzioni, verifica che nell'intervallo indicato a fianco valgono le ipotesi del teorema di Cauchy e trova il punto (o i punti) la cui esistenza è assicurata dal teorema.

$$f(x) = \frac{1}{x+2}, \quad g(x) = \frac{x+2}{3x}, \quad [1; 2]. \quad \left[c = \frac{2+2\sqrt{6}}{5} \right]$$

TEOREMA DI DE L'HOSPITAL

Calcola i seguenti limiti.

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x+1)}{x^2+x}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2 \sin x + x}. \quad \left[2; \frac{1}{3} \right] \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln(x^2+2x)}; & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x}{e^x+x}. \quad [1; 0] \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x^2 \cdot \ln\left(\frac{1}{x}+1\right) \right]; & \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+2)e^{-x}]. \quad [0; 0] \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 - x}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos x}{\ln(x+1)}. \quad [-1; 0] \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} [x^2 \cdot \ln(\sin x)]; & \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x^2 - x)e^x]. \quad [0; 0] \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cos 5x)}{\sin(3x^2)}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[(e^{1-\cos 4x} - 1)(x^2 - 2x)]}{\tan^3(3x)}. \quad \left[-\frac{25}{6}; -\frac{16}{27} \right] \end{array}$$

FUNZIONI CRESCENTI E DECRESCENTI E DERIVATE

Trova gli intervalli in cui le seguenti funzioni sono crescenti e quelli in cui sono decrescenti.

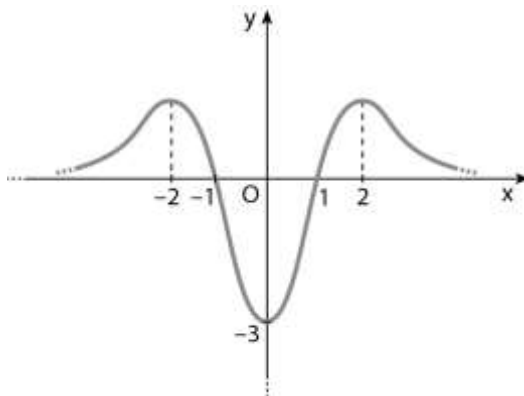
$$y = x^3 + 3x^2 - 4 \quad [\text{cresc. per } x < -2 \vee x > 0; \text{ decresc. per } -2 < x < 0]$$
$$y = \frac{x+2}{e^x} \quad [\text{cresc. per } x < -1; \text{ decresc. per } x > -1]$$

VERO O FALSO?

- Se una funzione ha una discontinuità di terza specie ed è definita in $[a; b]$, non può essere crescente.
- Se $f'(x) \geq 0$, allora $f(x)$ è decrescente.
- Se una funzione è crescente in $[a; b]$, allora è derivabile in $]a; b[$ e $f'(x) > 0$.
- Per tutte le funzioni crescenti si ha che $f'(x) < 0$.

[a) V; b) F; Fc); d) F]

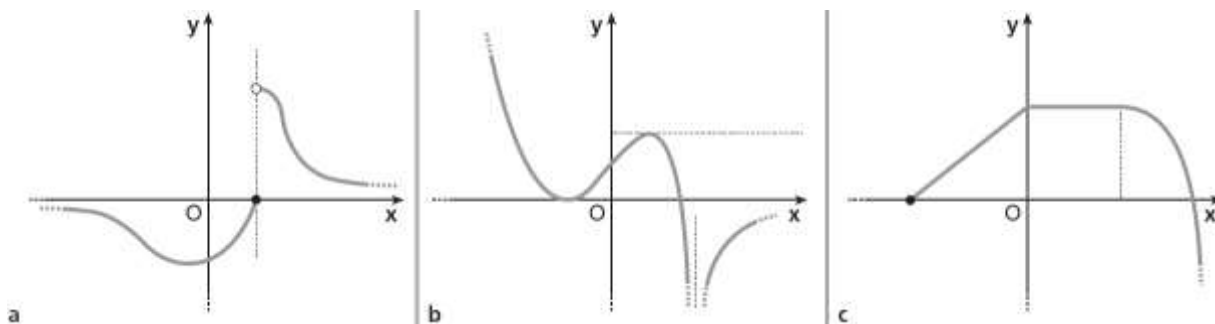
È data la funzione $y = f(x)$ rappresentata in figura. Individua gli intervalli in cui la derivata della funzione rappresentata è positiva.



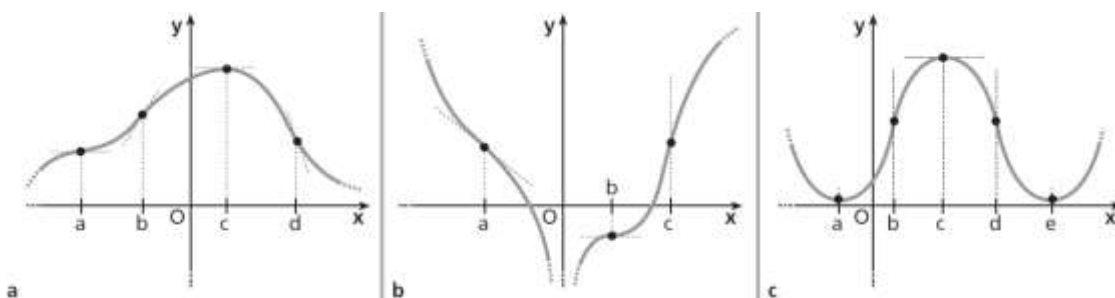
$[-\infty; -2[\cup]0; 2[$

DEFINIZIONI

Indica i punti di massimo e di minimo, relativi e assoluti, nelle seguenti funzioni.



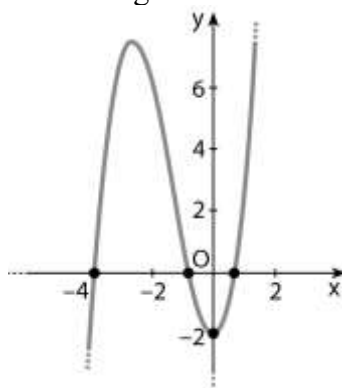
Nei seguenti grafici indica i punti di flesso, specificando se sono orizzontali, verticali o obliqui e se sono ascendenti o discendenti.



[a) a: flesso orizzontale, b: flesso obliquo ascendente, d: flesso obliquo discendente; b) a: flesso obliquo discendente, b: flesso orizzontale, c: flesso verticale; c) b: flesso verticale, d: flesso verticale]

VERO O FALSO?

Osserva la funzione rappresentata in figura.



- a) Non ha punti di flesso.
- b) Ha un punto di minimo assoluto in $y = -2$.
- c) È crescente nell'intervallo $[0;2]$.

[a) F; b) F; c) V]

Applicando le definizioni di massimo, di minimo e di flesso, verifica quanto è indicato a fianco della

seguinte funzione.

$$y = \frac{3x^3}{x-4},$$

$x = 6$ punto di minimo relativo;
 $x = 0$ punto di flesso orizzontale discendente.

MASSIMI, MINIMI, FLESSI ORIZZONTALI E DERIVATA PRIMA

ASSOCIA

Associa a ciascuna funzione il suo punto estremante.

- a. $y = x^4 - 2x$ b. $y = 3x^4 + 6x$ c. $y = -x^4 + 2x$
d. $y = -5x^4 - 10x - 3$

1. $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, punto di massimo
2. $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, punto di minimo
3. $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, punto di massimo
4. $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, punto di minimo

[a. 4; b. 2; c. 3; d. 1]

Trova i punti di massimo e di minimo relativo per le seguenti funzioni, determinando gli eventuali punti angolosi e di cuspid.

$$y = x^3 - x^2$$

$$\left[x = 0 \text{ max}; x = \frac{2}{3} \text{ min} \right]$$

$$y = \ln x - 2x$$

$$\left[x = \frac{1}{2} \text{ max} \right]$$

$$y = |x^2 - 4|$$

$$[x = \pm 2 \text{ min (punto angoloso)}; x = 0 \text{ max}]$$

$$y = \sqrt[3]{(2-3x)^2}$$

$$\left[x = \frac{2}{3} \text{ min (cuspid)} \right]$$

Calcola i punti di massimo, di minimo e di flesso orizzontale per le seguenti funzioni.

$$y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3$$

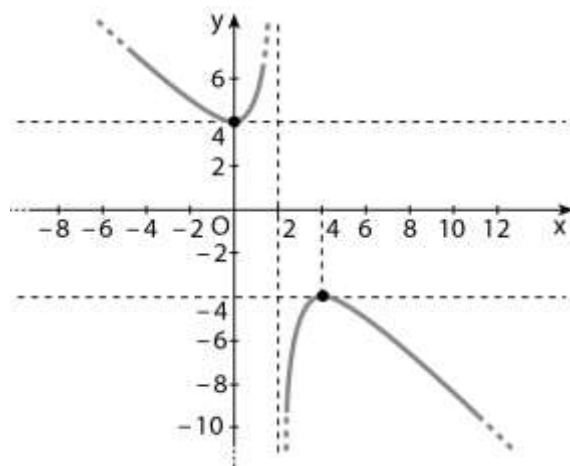
$$[x = 0 \text{ fl. orizz.}; x = 3 \text{ min}]$$

$$y = x^5 \cdot e^x$$

$$[x = 0 \text{ fl. orizz.}; x = -5 \text{ min}]$$

LEGGI IL GRAFICO

La funzione in figura ha equazione $y = \frac{ax^2}{bx+2} + c$. Determina a , b e c .



$$[a = 1, b = -1, c = 4]$$

FLESSI E DERIVATA SECONDA

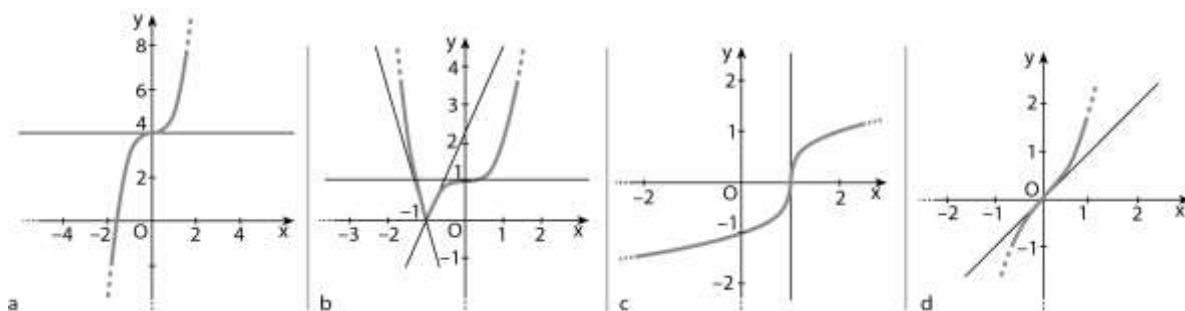
Trova per le seguenti funzioni gli intervalli in cui il grafico rivolge la concavità verso il basso o verso l'alto.

$$y = -x^5 + 4x^4 - 2x + 3$$

$$\left[\text{verso l'alto per } x < \frac{12}{5}; \text{ verso il basso per } x > \frac{12}{5} \right]$$

LEGGI IL GRAFICO

Indica le caratteristiche dei punti di flesso dei seguenti grafici, stabilendo se nel punto di flesso le derivate prima e seconda si annullano.



- a. flesso a tangente orizzontale (si annullano derivate prima e seconda);
- b. punto angoloso (non esiste la derivata) e flesso a tangente orizzontale (si annullano derivate prima e seconda);
- c. flesso a tangente verticale (limite della derivata prima è $+\infty$, limite della derivata seconda vale $-\infty$ da sinistra e $+\infty$ da destra);
- d. flesso a tangente obliqua (derivata prima non si annulla, derivata seconda si annulla)

Determina i punti di flesso delle seguenti funzioni.

$$y = (x+3)^3 + x$$

$$[\text{fl. } (-3; -3)]$$

MASSIMI, MINIMI, FLESSI E DERIVATE SUCCESSIVE

Determina i punti di massimo, di minimo e di flesso orizzontale della seguente funzione con il metodo delle derivate successive.

$$y = (x+1)^3 x^2$$

$$\left[x = -1 \text{ fl. orizz.}; x = -\frac{2}{5} \text{ max.}; x = 0 \text{ min.} \right]$$

$$y = x^3 e^{x-1}$$

$$\left[x = 0 \text{ fl. orizz.}; x = -3 \text{ min.} \right]$$

Trova i punti di massimo, minimo e flesso della seguente funzione con il metodo delle derivate successive.

$$y = \frac{x^6}{2} - \frac{x^5}{5} - 7$$

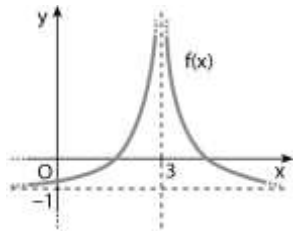
$$\left[x = 0 \text{ fl. orizz. disc.}; x = \frac{4}{15} \text{ fl. obl. asc.}; x = \frac{1}{3} \text{ min.} \right]$$

Calcola il valore di a e b in modo che il grafico della funzione $y = ax^3 + bx^2 + 4x + 1$ abbia un massimo nel punto di coordinate $(-2;1)$.

$$\left[a = 1, b = 4 \right]$$

STUDIO DI UNA FUNZIONE

Osserva il grafico.



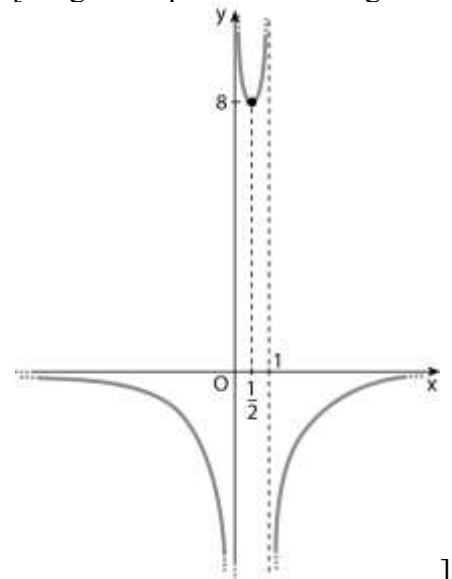
- Il dominio della funzione è $\mathbf{R} - \{3\}$.
- Non ci sono né massimi né minimi.
- La funzione ha un solo asintoto.
- Non ci sono flessi .

[a) V; b) V; c) F; d) V]

Traccia il grafico della funzione avente le seguenti caratteristiche.

- Il dominio è $\mathbf{R} - \{0, 1\}$.
- Non interseca gli assi cartesiani.
- $f(x) > 0$ per $0 < x < 1$, $f(x) < 0$ per $x < 0$ o $x > 1$.
- Esistono gli asintoti verticali $x = 0$, $x = 1$; esiste l'asintoto orizzontale $y = 0$.
- È presente un minimo in $\left(\frac{1}{2}; 8\right)$.
- Non vi sono flessi.

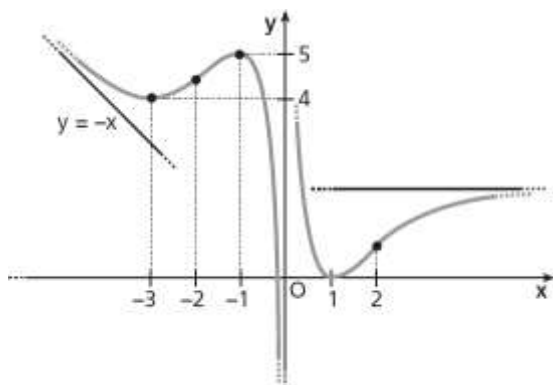
[Un grafico possibile è il seguente



]

LEGGI IL GRAFICO Dal grafico in figura deduci:

- il dominio della funzione;
- le intersezioni con gli assi;
- gli intervalli in cui la funzione è positiva e quelli in cui è negativa;
- i limiti agli estremi del dominio e le equazioni degli asintoti;
- gli intervalli in cui la funzione è crescente e quelli in cui è decrescente;
- i punti di massimo e di minimo relativi;
- i punti di flesso, evidenziando le concavità.



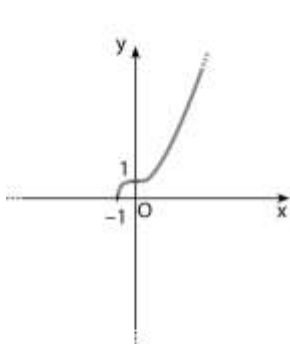
- [a] $\mathbf{R} - \{0\}$; b) $(\alpha; 0)$ con $-1 < \alpha < 0$, $(1; 0)$; c) $y > 0 :]-\infty; \alpha[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$, $y < 0 :]\alpha; 0[$;
 d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, $y = -x$, $x = 0$, $y = 2$;
 e) crescente : $] -3; -1[\cup] 1; +\infty[$, decrescente : $] -\infty; -3[\cup] -1; 0[\cup] 0; 1[$
 f) max : $(-1; 5)$, min : $(-3; 4)$ e $(1; 0)$
 g) $F : x = -2$ e $x = 2$, concavità verso l'alto : $] -\infty; -2[\cup] 0; 2[$,
 concavità verso il basso : $] -2; 0[\cup] 2; +\infty[$

ASSOCIA ogni funzione al relativo grafico.

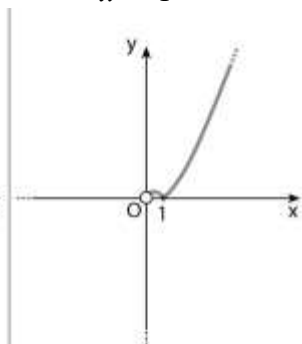
a. $y = \sqrt{x^3 + 1}$

b. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

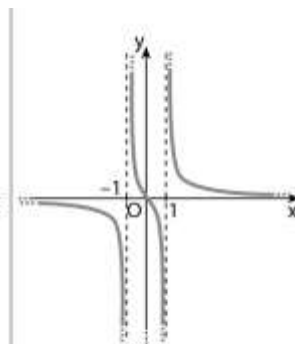
c. $y = |x \ln x|$



1



2



3

[a-1; b-3; c-2]

Studia e rappresenta graficamente le seguenti funzioni.

$y = x^3 - 3x^2$

[max (0;0); min (2;-4); F(1;-2)]

$y = x^4 - 2x^2 - 3$

[funzione pari; min $(\pm 1; -4)$; max $(0; -3)$; $F\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{32}{9}\right)$]

$$y = \frac{x^3}{x+1} \quad \left[a : x = -1; \min \left(-\frac{3}{2}; \frac{27}{4} \right); F(0;0) \right]$$

$$y = \frac{x^3}{x^2-4} \quad \left[\text{funz. dispari}; a : x = \pm 2, y = x; \min (-2\sqrt{3}; -3\sqrt{3}); \max (2\sqrt{3}; 3\sqrt{3}); F(0;0) \right]$$

$$y = -2 + \sqrt{5+4x-x^2} \quad \left[\max (2;1); x = -1, x = 5 \text{ punti a tangente verticale} \right]$$

$$y = \sqrt{\frac{2-x}{x+4}} \quad \left[a : x = -4; F \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right]$$

$$y = \frac{x^2-1}{e^x} \quad \left[a : y = 0; \min \left(1-\sqrt{2}; \frac{2-2\sqrt{2}}{e^{1-\sqrt{2}}} \right); \max \left(1+\sqrt{2}; \frac{2+2\sqrt{2}}{e^{1+\sqrt{2}}} \right); \right. \\ \left. F_1 \left(2-\sqrt{3}; \frac{6-4\sqrt{3}}{e^{2-\sqrt{3}}} \right); F_2 \left(2+\sqrt{3}; \frac{6+4\sqrt{3}}{e^{2+\sqrt{3}}} \right) \right]$$

$$y = \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \quad \left[a : x = -1; \max \left(\sqrt{e}-1; \frac{1}{2e} \right); F \left(e^{\frac{5}{6}}-1; \frac{5}{6e^{\frac{5}{3}}} \right) \right]$$

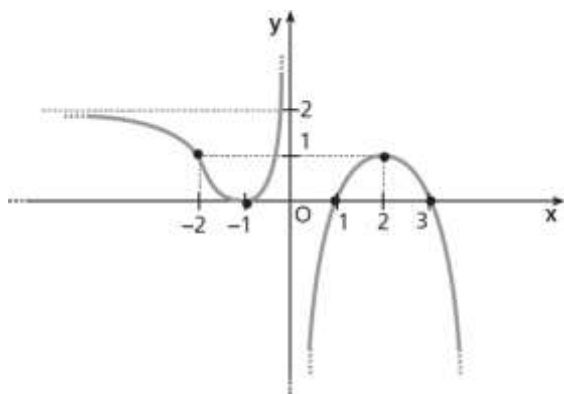
Studia e rappresenta graficamente la seguente funzione.

$$y = \left| \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 2} \right| \quad \left[a : x = 2; y = x; y = -x; \min_1(-2;0) \text{ punto angoloso}; \min_2(4;0) \text{ punto angoloso} \right]$$

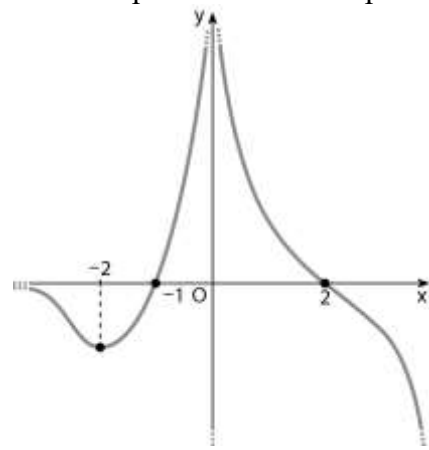
GRAFICI DI UNA FUNZIONE E DELLA SUA DERIVATA

LEGGI IL GRAFICO Dato il grafico della funzione $y = f(x)$, traccia l'andamento di quello della sua

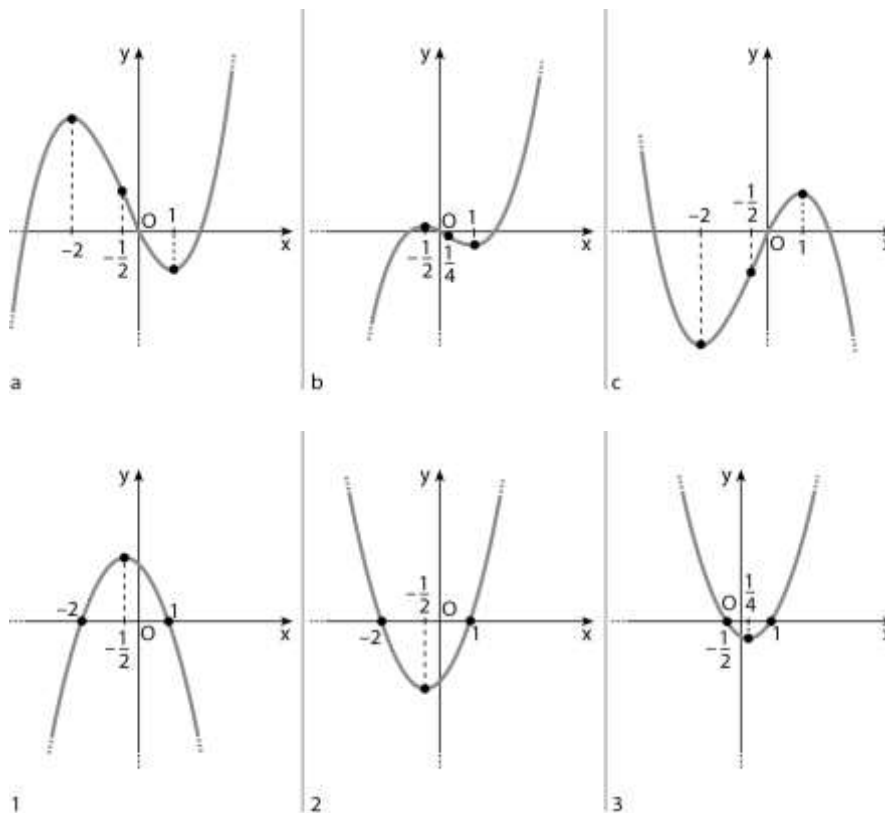
derivata prima.



[Andamento di una possibile derivata prima

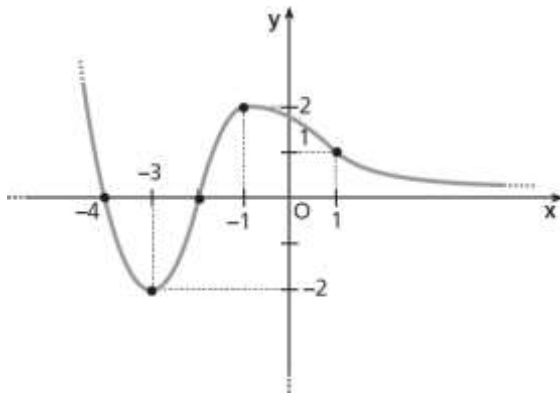


al grafico di ciascuna funzione quello della sua derivata.

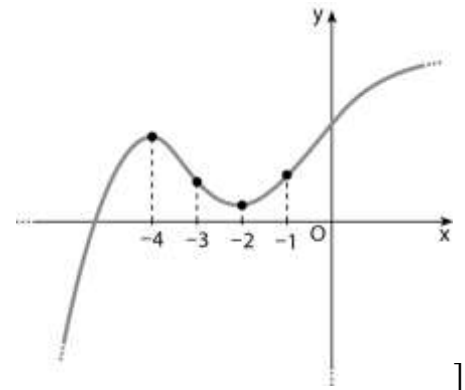


[a-2; b-3; c-1]

Dato il grafico della funzione $y = f'(x)$, traccia un possibile andamento della funzione $y = f(x)$.



[Possibile andamento della funzione $y = f(x)$



]

INTEGRALE INDEFINITO

Associa a ogni funzione della prima riga una sua primitiva nella seconda.

a. $y = 4x + 3$; b. $y = 6x^2 - 1$; c. $y = 2\sin x \cos x$.

1. $y = \sin^2 x$; 2. $y = 2x^2 + 3x$; 3. $y = 2x^3 - x$.

[a. 2; b. 3; c. 1]

Sono date due funzioni, $f(x)$ e $F(x)$. Modifica $F(x)$ in modo che sia una primitiva di $f(x)$.

$$f(x) = \frac{2}{\cos^2 x},$$

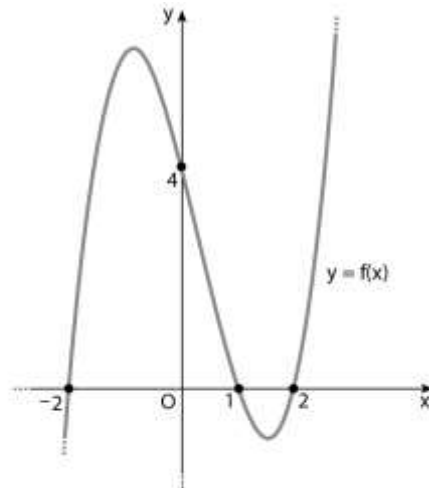
$$F(x) = \tan x.$$

$$[F(x) = 2\tan x]$$

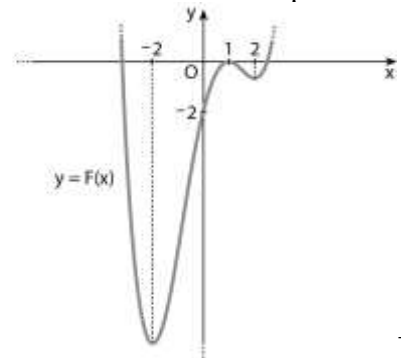
LEGGI IL GRAFICO

Dato il grafico $y = f(x)$, traccia il possibile andamento di una sua primitiva

$y = F(x)$ che interseca l'asse y nel punto di ordinata -2 .



[un possibile andamento di una primitiva



]

Calcola il seguente integrale, applicando le proprietà di linearità, dopo aver verificato che $F(x)$ e $G(x)$ sono primitive rispettivamente di $f(x)$ e $g(x)$.

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx; \quad F(x) = \ln(x^2), \quad G(x) = 2\sqrt{x}, \quad f(x) = \frac{2}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}. \quad \left[\frac{\ln(x^2)}{2} + 2\sqrt{x} + c \right]$$

INTEGRALI INDEFINITI IMMEDIATI

- a. $k \int x dx = kx^2 + c$
 b. $\int |\sin x| dx = \cos x + c$
 c. $\int k + f(x) dx = kx + \int f(x) dx$
 d. $\int \frac{1}{x^2} dx = -\left| \frac{1}{x} \right| + c$

[a. F; b. F; c. V; d. F]

Calcola i seguenti integrali.

$\int (x^3 + 2x^2 - x - 2) dx$	$\left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c \right]$
$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$	$\left[2\sqrt{x} - \ln x - \frac{1}{x} + c \right]$
$\int \frac{x^3 - x^2 - 3x - 2}{x^2} dx$	$\left[\frac{x^2}{2} - x - 3 \ln x + \frac{2}{x} + c \right]$
$\int \frac{3 \left[x + (\sqrt{1+x})(\sqrt{1-x}) \right]}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$\left[-3\sqrt{1-x^2} + 3x + c \right]$
$\int \frac{x^2}{(x^3 + 1)^2} dx$	$\left[-\frac{1}{3(x^3 + 1)} + c \right]$
$\int (2e^x - \cos x + \sqrt[3]{x}) dx$	$\left[2e^x - \sin x + \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + c \right]$
$\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$	$[2 \arctan x + 5 \arccos x + c]$
$\int x^2 \sqrt{x^3 - 1} dx$	$\left[\frac{2\sqrt{(x^3 - 1)^3}}{9} + c \right]$
$\int \frac{7x^6 - 10x^4 - 2x^{-3}}{2x^7 - 4x^5 + 2x^{-2} + 4} dx$	$\left[\frac{1}{2} \ln x^7 - 2x^5 + x^{-2} + 2 + c \right]$
$\int \left(\frac{1}{2x-1} + \frac{3}{x+5} \right) dx$	$\left[\frac{1}{2} \ln 2x-1 + 3 \ln x+5 + c \right]$
$\int \left(\frac{4}{3x+2} - \frac{1}{x-1} \right) dx$	$\left[\frac{4}{3} \ln 3x+2 - \ln x-1 + c \right]$
$\int \frac{2x+1}{4x^2-1} dx$	$\left[\frac{1}{2} \ln 2x-1 + c \right]$
$\int \frac{x^2 + 3x + 9}{x^3 - 27} dx$	$[\ln x-3 + c]$
$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx$	$\left[\frac{\arcsin x^4}{4} + c \right]$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Calcola i seguenti integrali per sostituzione sfruttando il suggerimento scritto a fianco.

$$\int \frac{1}{2x\sqrt{4x-1}} dx, \quad t = \sqrt{4x-1}. \quad \left[\arctan \sqrt{4x-1} + c \right]$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

CACCIA ALL'ERRORE Correggi le seguenti espressioni in cui viene applicata la formula di integrazione per parti.

$$\int (x^2 + 1)e^x dx = x^2 e^x + e^x - 2 \int (x+1)e^x dx = e^x(x^2 - x + 1) + c$$
$$\left[e^x(x^2 - 2x + 3) + c \right]$$

Calcola i seguenti integrali applicando la formula di integrazione per parti.

$$\int (x+2)\sin x dx \quad \left[-(x+2)\cos x + \sin x + c \right]$$

$$\int x^3 \ln x dx \quad \left[\frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + c \right]$$

$$\int e^{2x} \arctan(e^{-x}) dx \quad \left[\frac{e^{2x}}{2} \arctan(e^{-x}) + \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} \arctan(e^x) + c \right]$$

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

Calcola i seguenti integrali di funzioni razionali fratte.

$$\int \frac{3x-1}{x+2} dx \quad \left[3x - \ln|x+2| + c \right]$$

$$\int \frac{2x-1}{x^2+2x-24} dx \quad \left[\frac{7}{10} \ln|x-4| + \frac{13}{10} \ln|x+6| + c \right]$$

$$\int \frac{x+1}{x^2-8x+16} dx \quad \left[\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \right]$$

$$\int \frac{2}{x^2+8x+18} dx \quad \left[\sqrt{2} \arctan \frac{x+4}{\sqrt{2}} + c \right]$$

$$\int \frac{x+4}{x^2+2x+3} dx \quad \left[\ln \sqrt{x^2+2x+3} + \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + c \right]$$

INTEGRALE DEFINITO

Calcola il valore del seguente integrale utilizzando i valori degli integrali definiti scritti a fianco e sfruttando le proprietà dell'integrale definito.

$$\int_{-a}^a (5 \cos x + x^3) dx \quad \text{sapendo che} \quad \int_{-a}^a \cos x dx = 2 \sin a; \quad \int_{-a}^a x^3 dx = 0. \quad [10 \sin a]$$

VERO O FALSO?

a. $\int_2^3 3x - 6 dx = 3 \int_2^3 x - 2 dx$

b. $\int_1^2 x^2 dx = \left(\int_1^2 x dx \right)^2$

c. $\int_0^1 x dx + \int_1^0 x dx = 0$

d. $\int_1^5 2 dx = 10$

[a) V; b) F; c) V; d) F]

Indica quali delle seguenti funzioni rispettano le ipotesi del teorema della media nell'intervallo scritto a fianco.

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 2}, \quad [0; 1]; \quad g(x) = \frac{(x+1)^2}{x-2}, \quad [-1; 0]. \quad [\text{no; sì}]$$

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

VERO O FALSO?

a. $\int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx.$

b. $\int_1^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx.$

c. Se $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 8$, allora $\int_0^1 f(x) dx = 4.$

d. Se $\int_{-2}^1 f(x) dx = 2$ e $\int_1^2 f(x) dx = 4$, allora $\int_{-1}^1 f(2x) dx = 3.$

[a) V; b) F; c) V; d) V]

Calcola i seguenti integrali definiti.

$$\int_{-1}^1 (5x^4 - 6x^2 + 2) dx \quad [2]$$

$$\int_1^4 \frac{2x^2 + 3}{x} dx \quad [15 + 3 \ln 4]$$