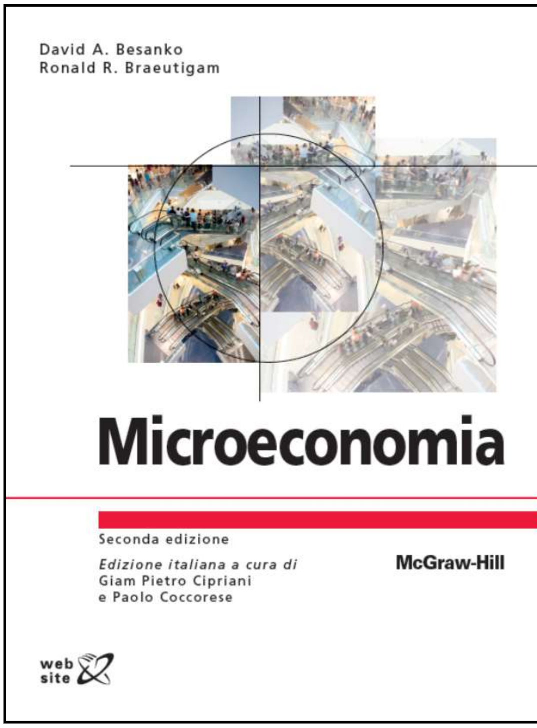


Fondamenti di Algebra

Sommario

Le Funzioni
- Definizione
- Le funzioni lineari
- Funzioni concave e convesse

Valore Marginale

Le Derivate
- Definizione
- Regole di derivazione
- Derivate Parziali
- Monotonicità e concavità

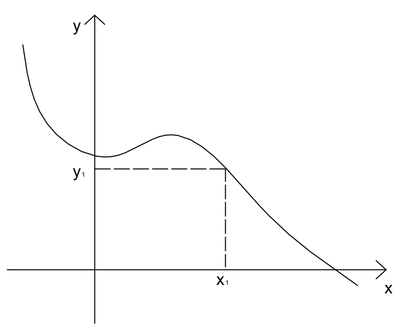
Massimizzazione e Minimizzazione di Funzioni

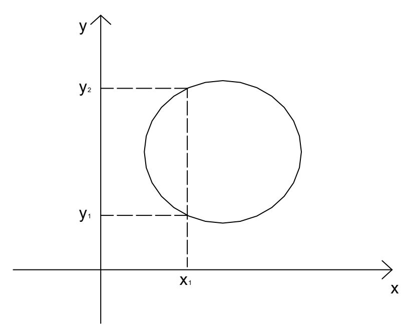
Ottimizzazione Vincolata
- Metodo di sostituzione
- Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Si definisce funzione *y* della variabile *x* un legame fra due variabili, una detta variabile indipendente (*x*) e l'altra detta variabile dipendente (*y*):

$$y = f(x)$$

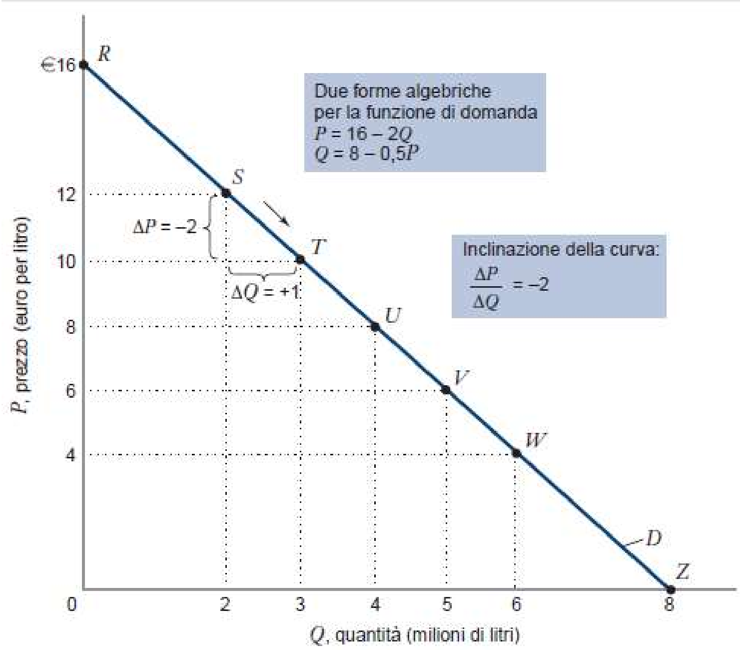
Ad ogni valore della *x* in *X* corrisponde un solo valore della *y* in *Y*.





Esempio

Punti del grafico	Prezzo della vernice (€ per litro)	Milioni di litri venduti in un anno
S	12	2
T	10	3
U	8	4
V	6	5
W	4	6



Le Funzioni Lineari

La tabella e il grafico rappresentano una relazione tra prezzo del bene (variabile dipendente) e quantità domandata (variabile indipendente); possiamo scrivere la **funzione di domanda inversa**

$$P = f(Q)$$

In particolare, la relazione tra P e Q è lineare:

$$P = 16 - 2Q$$

Le Funzioni Lineari

Il modo più naturale per scrivere la **funzione di domanda** di un bene è quello di far dipendere il numero delle unità vendute dal prezzo. Invertendo dunque le variabili avremo:

$$Q = f(P)$$

In particolare, la relazione tra Q e P è lineare:

$$Q = 8 - 0{,}5P$$

In generale, l'equazione di una funzione lineare (retta) è

$$y = mx + b$$

dove

- *m* è il *coefficiente angolare (inclinazione)* della retta;
- *b è l'intercetta verticale* (il punto in cui la retta interseca l'asse delle ordinate, $x = 0$).

Come si calcola l'inclinazione della retta (*m*)?

Dati due punti (x_1,y_1) e (x_2,y_2),

$$m = \Delta y/\Delta x = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$$

Nell'esempio, consideriamo S = (2,12) e T = (3,10),

$$m = \Delta y/\Delta x = (10 - 12)/(3 - 2) = - 2$$

Come si calcola l'intercetta verticale (*b*)?

Nell'esempio, consideriamo S = (2,12); sappiamo che *m = -2.*

$$y = mx + b \rightarrow$$

$$y = -2x + b \rightarrow$$

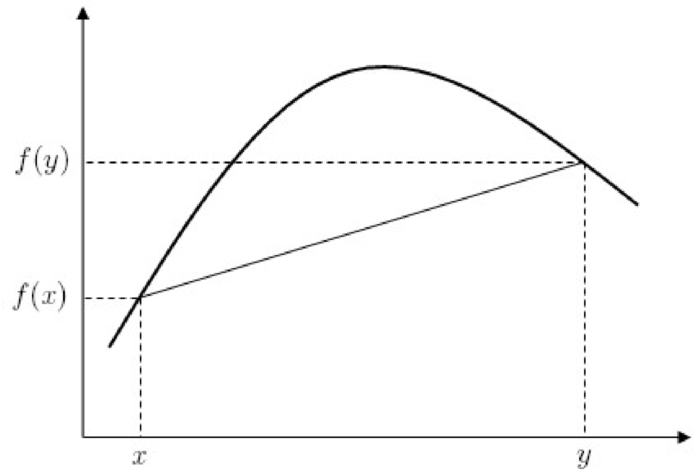
$$12 = -2\,(2) + b \rightarrow$$

$$b = 16$$

Una funzione è *strettamente concava* se e solo se, presi due punti su la curva che la rappresenta, uno diverso dall'altro, la retta che li unisce si trova sempre al di sotto della curva stessa, senza mai coincidere con essa.

Una funzione è *concava* se e solo se, presi due punti su la curva che la rappresenta, uno diverso dall'altro, la retta che li unisce si trova sempre al di sotto della curva stessa, o coincide con essa.

Funzioni: La Concavità



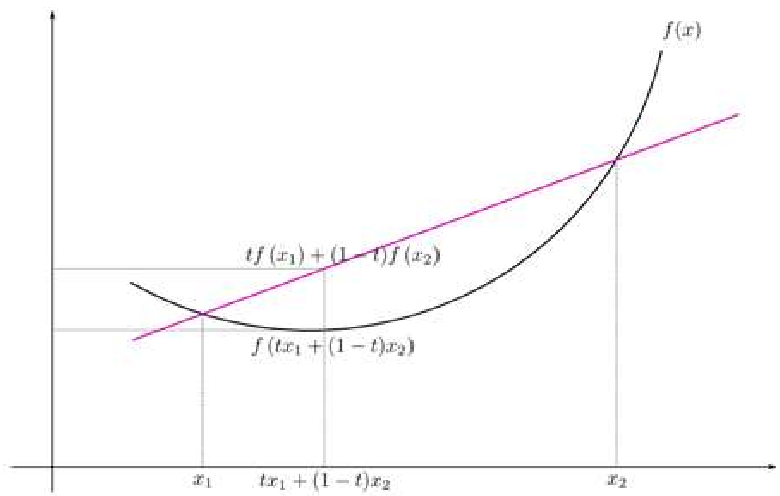
Esempio di funzione strettamente concava

Funzioni: La Convessità

Una funzione è *strettamente convessa* se e solo se, presi due punti sulla curva che la rappresenta, uno diverso dall'altro, la retta che li unisce si trova sempre al di sopra della curva stessa, senza mai coincidere con essa.

Una funzione è *convessa* se e solo se, presi due punti sulla curva che la rappresenta, uno diverso dall'altro, la retta che li unisce si trova sempre al di sopra della curva stessa, o coincide con essa.

Funzioni: La Convessità



Esempio di funzione strettamente convessa

Valore Marginale

Nel compiere le loro scelte, gli individui sono interessati al **valore marginale** della variabile dipendente.

Definizione: il *valore marginale* misura la variazione nella variabile dipendente a fronte di una variazione unitaria della variabile indipendente.

Valore Marginale

Supponiamo che la relazione tra la quantità prodotta da un'impresa e i suoi costi totali di produzione sia descritta dalla funzione:

$$C = f(Q)$$

C = la *variabile dipendente*

Q = la *variabile indipendente*

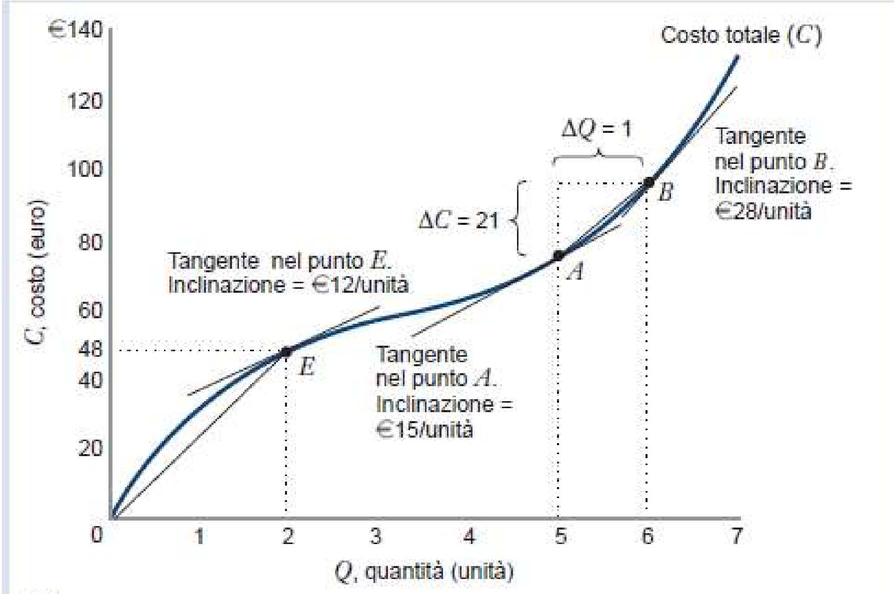
Valore Marginale

Esempio: per l'impresa, il **costo marginale (*MC*)** rappresenta la variazione del costo totale (***C***, la *variabile dipendente*) a fronte dell'aumento di una unità del livello della produzione (***Q***, la *variabile indipendente*).

$$MC = \Delta C/\Delta Q$$

Di quanto aumenta il costo se l'impresa produce un'unità in più di output?

Valore Marginale



Valore Marginale

Graficamente, il costo marginale costituisce un'approssimazione dell'inclinazione della curva di costo totale.

L'inclinazione del segmento *AB* rappresenta la variazione dei costi totali divisa per la variazione della quantità → *costo marginale*.

Valore Marginale

TUTTAVIA, questa è solo un'approssimazione! L'inclinazione della curva di costo totale non è sempre la stessa tra il punto *A* e il punto *B*.

Più correttamente, il costo marginale nel punto *A* è dato dall'inclinazione della retta tangente alla curva del costo totale nel punto *A*.

→ Le **derivate** ci consentono di calcolare tale inclinazione.

Le Derivate

Si consideri la funzione:

$$y = f(x)$$

Supponiamo che il grafico di $y = f(x)$ sia una curva, così che la sua inclinazione varia se ci muoviamo lungo la curva stessa.

Le Derivate

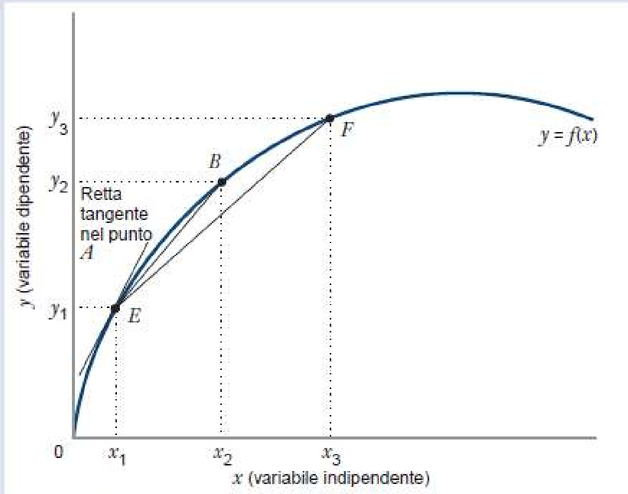


FIGURA A.3 Il significato della derivata di una funzione
Quando x = x1, la derivata di y rispetto a x (ovvero dy/dx) ci dà l'inclinazione della retta tangente alla curva nel punto E.

Le Derivate

- Supponiamo di voler conoscere l'inclinazione nel punto E, scegliendo due punti, *E* e *F*.
- Tracciamo il segmento che li unisce; la pendenza del segmento *EF* è data da

$$\Delta y / \Delta x$$

dove

$$\Delta y = y_3 - y_1$$

e

$$\Delta x = x_3 - x_1$$

Le Derivate

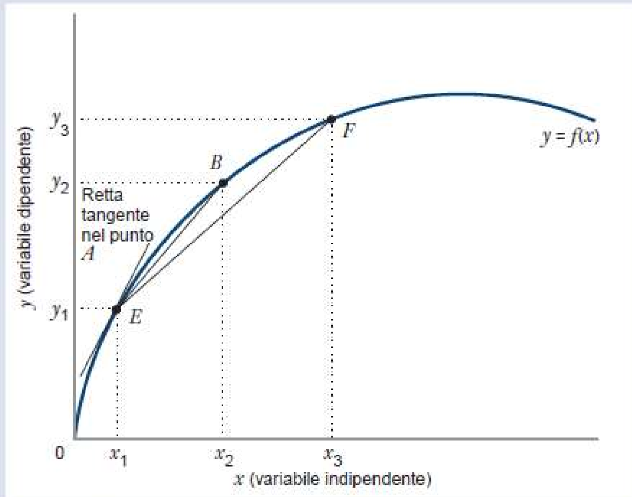


FIGURA A.3 Il significato della derivata di una funzione
Quando x = x1, la derivata di y rispetto a x (ovvero dy/dx) ci dà l'inclinazione della retta tangente alla curva nel punto E.

Le Derivate

- Come si vede dal grafico, l'inclinazione di *EF* è solo un'approssimazione dell'inclinazione della retta tangente nel punto *E.*

- Consideriamo allora il segmento *EB*, dove *B* è più "vicino" al punto *E*. L'inclinazione del segmento *EB*:

$$\Delta y/\Delta x = (y_3 - y_2)/(x_3 - x_2)$$

rappresenta sempre un'approssimazione, seppur migliore, dell'inclinazione della tangente nel punto *E.*

Le Derivate

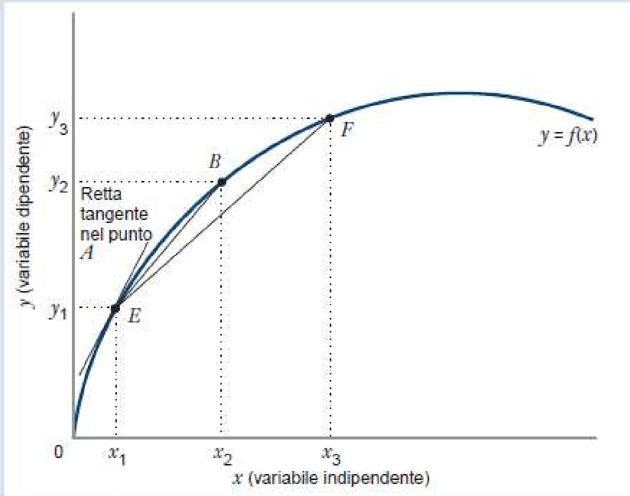


FIGURA A.3 Il significato della derivata di una funzione
Quando x = x1, la derivata di y rispetto a x (ovvero dy/dx) ci dà l'inclinazione della retta tangente alla curva nel punto E.

Le Derivate

- Supponiamo di considerare un punto molto vicino a *E*, tale che *Δx* sia prossima a zero.

→ anche l'errore di approssimazione tenderà a zero.

- La derivata di una funzione, *dy/dx* oppure *f'(x)*, rappresenta il valore dell'approssimazione per *Δx* tendente a zero, cioè

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- La derivata dà una misura esatta della pendenza del grafico di *y* nel punto *E*.

Le Derivate: Regole di Derivazione

Ricordiamo le regole di derivazione per le forme funzionali più comuni.

Derivata di una costante

La derivata di una costante è zero.

Se $y = k$, dove k è una costante,

$$dy/dx=0$$

Le Derivate: Regole di Derivazione

Derivata di una costante

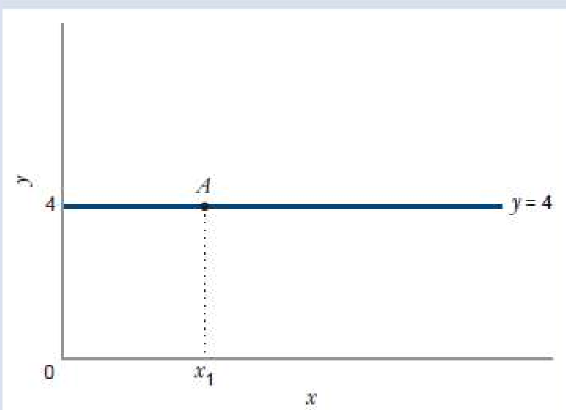


FIGURA A.4 Derivata di una costante
Il grafico si riferisce alla funzione $y = 4$. Siccome il valore di y non varia al variare di x, il grafico può essere rappresentato attraverso una linea perfettamente orizzontale. L'inclinazione è sempre pari a zero, così come la derivata della funzione: $dy/dx = 0$.

Derivata di una potenza

Consideriamo la seguente funzione:

$$y(x) = ax^b$$

dove *a* e *b* sono due costanti. La derivata è*:*

$$dy/dx = abx^{b-1}$$

Derivata di una potenza

Consideriamo la funzione (retta):

$$y(x) = 4x$$

dove $a = 4$ e $b = 1$. La derivata è

$$dy(x)/dx = abx^{b-1} = 4(1)x^{1-1} = 4$$

Una retta ha inclinazione (derivata) costante in ogni punto.

Derivata di una potenza

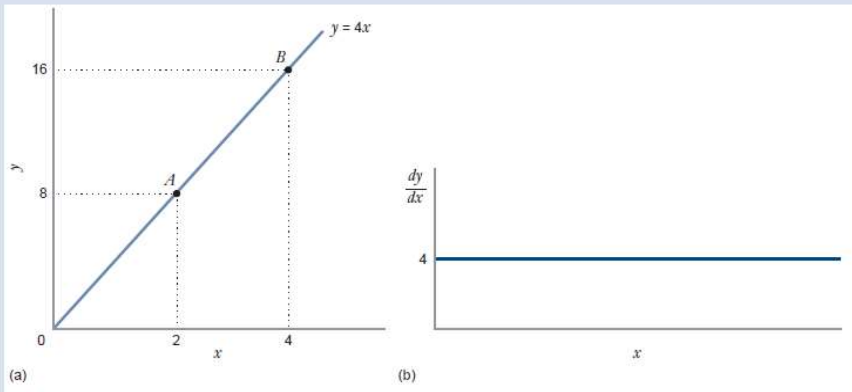


FIGURA A.5 Derivata di y = 4x
Il riquadro (a) mostra la funzione y = 4x. L'inclinazione di questo grafico è pari a 4. Utilizzando la regola di derivazione per le potenze, troviamo che la derivata di tale funzione è data da dy/dx = 4. Rappresentiamo graficamente anche la derivata, nel riquadro (b) della figura. Il fatto che la derivata sia sempre 4 significa che l'inclinazione della curva rappresentata nel riquadro (a) non cambia mai e resta quindi sempre uguale a 4.

Derivata di una potenza

Si noti che l'inclinazione può essere calcolata anche come

$$\Delta y/\Delta x = (16-8)/(4-2) = 4$$

dove abbiamo considerato i punti *A=(2,8) e B=(4,16).*

Derivata di una potenza

Consideriamo la funzione (iperbole):

$$y(x) = 3x^2$$

dove $a = 3$ e $b = 2$. La derivata è

$$dy(x)/dx = abx^{b-1} = 3(2)x^{2-1} = 6x$$

L'inclinazione (derivata) cresce al crescere di *x.*

Derivata di una potenza

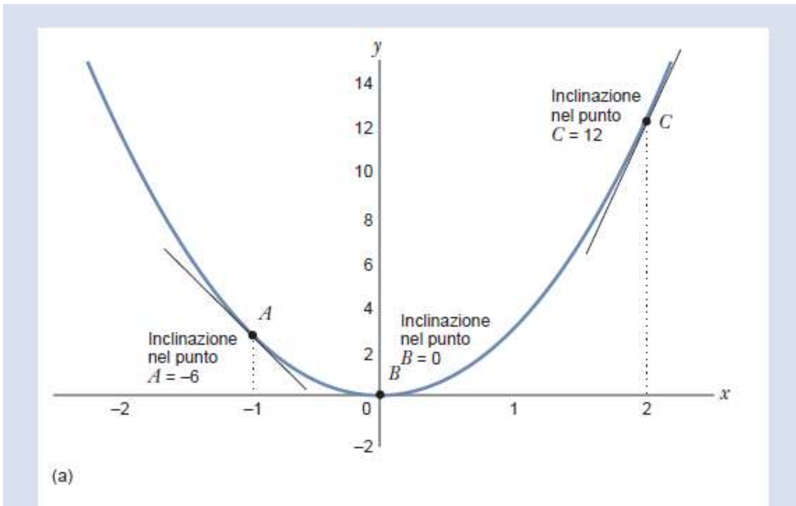
Calcoliamo il valore della derivata in 3 punti:

$$\text{Se } x = -1 \rightarrow y = -3 \text{ e } dy(x)/dx = -6$$
$$\text{Se } x = 0 \rightarrow y = 0 \text{ e } dy(x)/dx = 0$$
$$\text{Se } x = 2 \rightarrow y = 12 \text{ e } dy(x)/dx = 12$$

L'inclinazione (derivata) cresce al crescere di *x.*

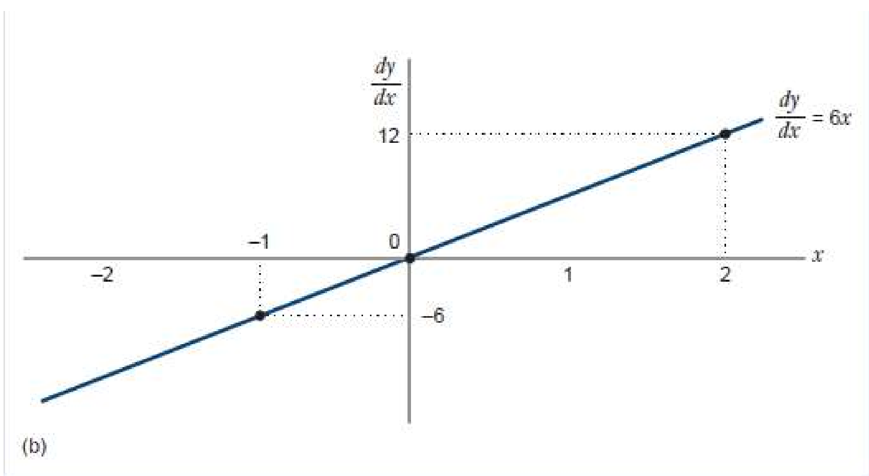
Le Derivate: Regole di Derivazione

Grafico di $y(x)=3x^2$



Le Derivate: Regole di Derivazione

Grafico di $dy(x)/dx = 6x$



Derivata di una potenza

Consideriamo la funzione (iperbole):

$$U(y) = y^{1/2}$$

dove $a = 1$ e $b = 1/2$. La derivata è

$$dU(y)/dy = aby^{b-1} = 1(1/2)y^{(1/2)-1} = (1/2)y^{-(1/2)}$$

L'inclinazione (derivata) decresce al crescere di y.

Derivata di logaritmo

Consideriamo la funzione logaritmica:

$$y(x) = ln\ x$$

dove *ln* indica il logaritmo naturale. La derivata è

$$dy(x)/dx = 1/x$$

Derivata di una somma

Consideriamo due funzioni di x: $f(x)$ e $g(x)$. Definiamo la loro somma come

$$y(x) = f(x) + g(x)$$

La derivata di una somma di funzioni è uguale alla somma delle derivate,

$$dy(x)/dx = df(x)/dx + dg(x)/dx$$

Derivata di una somma

Consideriamo le seguenti funzioni di x

$$f(x) = 5x^2$$
$$g(x) = 2x$$

Definiamo

$$y(x) = f(x) + g(x) \rightarrow$$
$$y(x) = 5x^2 + 2x$$

Derivata di una somma

Poiché

$$df(x)/dx = 10x$$
$$dg(x)/dx = 2,$$

avremo

$$dy(x)/dx = df(x)/dx + dg(x)/dx = 10x+2$$

Derivata di una differenza di funzioni

Consideriamo due funzioni di x: $f(x)$ e $g(x)$. Definiamo la loro differenza come

$$y(x) = f(x) - g(x)$$

La derivata di una differenza di funzioni è uguale alla differenza delle derivate,

$$dy(x)/dx = df(x)/dx - dg(x)/dx$$

Derivata di somme e differenze

Consideriamo la funzione di costo totale

$$C(Q) = Q^3 - 10Q^2 + 40Q$$

dove Q è la quantità prodotta. La derivata

$$dC(Q)/dQ = 3Q^2 - 20Q + 40$$

Viene definita *costo marginale* (*MC*).

Derivata di una somma e differenze

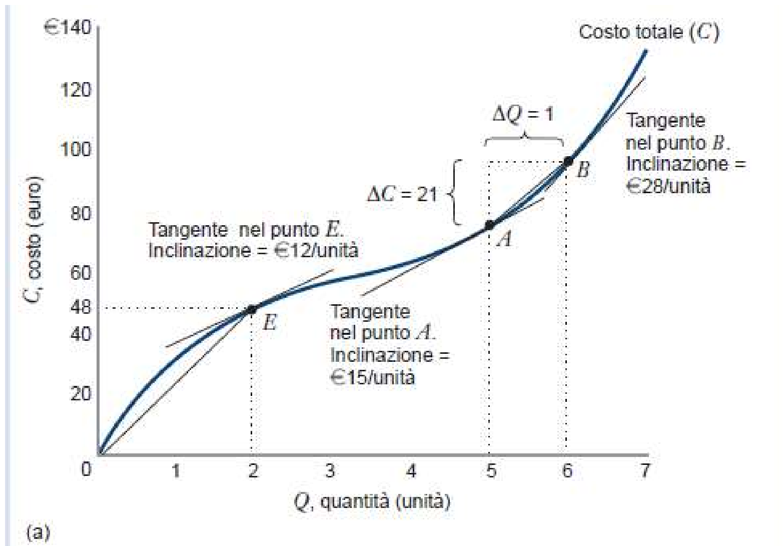
Calcoliamo il valore della derivata in 3 punti:

Se Q = 2, → MC = 12

Se Q = 5, → MC = 15

Se Q = 6, → MC = 28

Derivata di una somma e differenze



Derivata di un prodotto

Consideriamo due funzioni di x: $f(x)$ e $g(x)$. Definiamo il loro prodotto come

$$y(x) = f(x)g(x)$$

La derivata di prodotto di funzioni è

$$dy(x)/dx = g(x)\,(df(x)/dx) + f(x)\,(dg(x)/dx)$$

Derivata di un prodotto

Consideriamo le seguenti funzioni di *x*

$$f(x) = x^2$$
$$g(x) = 6 - x$$

Definiamo

$$y(x) = f(x)\, g(x) \rightarrow$$
$$y(x) = x^2(6-x)$$

Derivata di un prodotto

Poiché

$$df(x)/dx = 2x$$
$$dg(x)/dx = -1,$$

avremo

$$dy(x)/dx = g(x)\,(df(x)/dx) + f(x)\,(dg(x)/dx)$$
$$dy(x)/dx = (6-x)\,(2x) + x^2\,(-1)$$
$$dy(x)/dx = -3x^2 + 12x$$

Derivata di un prodotto

Alternativamente, riscriviamo

$$y(x) = x^2(6-x)$$

come

$$y(x) = -x^3 + 6x^2$$

Applicando la regola di derivazione delle potenze,

$$dy(x)/dx = -3x^2 + 12x$$

Le Derivate: Regole di Derivazione

Derivata di un quoziente

Consideriamo due funzioni di *x*: *f*(*x*) e *g*(*x*). Definiamo la loro differenza come

$$y(x) = f(x)/g(x)$$

La derivata di un quoziente di funzioni è

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$$

Derivata di un quoziente

Consideriamo le seguenti funzioni di *x*

$$f(x) = x^2$$
$$g(x) = 6 - x$$

Definiamo

$$y(x) = f(x)/g(x) \rightarrow$$
$$y(x) = x^2/(6 - x)$$

Le Derivate: Regole di Derivazione

Derivata di un quoziente

Poiché

$$df(x)/dx = 2x$$
$$dg(x)/dx = -1,$$

avremo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2} = \frac{(6-x)(2x)-(x^2)(-1)}{(6-x)^2}$$

Derivata di una funzione a più variabili

Consideriamo ora una funzione che dipende da più variabili

$$y = f(x,z)$$

La *derivata parziale* di *y* rispetto alla variabile *x* (lo stesso vale per le altre variabili *z* ecc.), in un punto, si ottiene derivando la funzione nella sola variabile *x*, considerando come costanti tutte le altre variabili.

Derivata di una funzione a più variabili

Avremo:

$$\partial y/\partial x = \partial f(x,z)/\partial x$$

$$\partial y/\partial z = \partial f(x,z)/\partial z$$

$$\partial^2 y/\partial x^2 = \partial^2 f(x,z)/\partial x^2$$

$$\partial^2 y/\partial x\, \partial z = \partial^2 y/\partial z\, \partial x = \partial^2 f(x,z)/\partial x\, \partial z$$

Esempio

Consideriamo la funzione

$$\Pi(Q_1,Q_2) = 13Q_1 - 2(Q_1)^2 + Q_1Q_2 + 8Q_2 - 3(Q_2)^2$$

Calcoliamo:

$$\partial\, \Pi(Q_1,Q_2) / \partial Q_1 = 13 - 4Q_1 + Q_2$$

$$\partial\, \Pi(Q_1,Q_2) / \partial Q_2 = Q_1 + 8 - 6Q_2$$

Esempio

Consideriamo la funzione

$$U(x,y) = (x)^{1/2} (y)^{1/2}$$

Calcolare le utilità marginali:

$$UM_x = \partial\, U(x,y) / \partial x = (1/2)\, (x)^{-1/2} (y)^{1/2}$$

$$UM_y = \partial\, U(x,y) / \partial y = (1/2)\, (x)^{1/2} (y)^{-1/2}$$

Le Derivate: Monotonicità

Le derivate ci permettono di determinare se una funzione è crescente oppure no.

Consideriamo la funzione $y = f(x)$:

- *la funzione è strettamente crescente in x se $f'(x) > 0$ per ogni x in X;*
- *la funzione è crescente in x se $f'(x) \geq 0$ per ogni x in X;*
- *la funzione è strettamente decrescente in x se $f'(x) < 0$ per ogni x in X;*
- *la funzione è decrescente in x se $f'(x) \leq 0$ per ogni x in X;*

Le Derivate: Concavità e Convessità

Le derivate ci permettono di determinare se una funzione è concava o convessa.

Consideriamo la funzione (continua e derivabile)

$$y = f(x)$$

- *la funzione è strettamente convessa in x se $f''(x) > 0$ per ogni x in X;*
- *la funzione è convessa in x se $f''(x) \geq 0$ per ogni x in X;*
- *la funzione è strettamente concava in x se $f''(x) < 0$ per ogni x in X;*
- *la funzione è concava in x se $f''(x) \leq 0$ per ogni x in X;*

Le derivate hanno un significato economico:

- Se $U(Q)$ è la **funzione di utilità** di un consumatore, allora dU/dQ, l'inclinazione della funzione, rappresenta **l'utilità marginale**: ci dice di quanto aumenta l'utilità del consumatore se questi consuma una unità in più del bene.

Le derivate hanno un significato economico:

- Se $C(Q)$ è la **funzione di costo totale** di una impresa, allora dC/dQ, l'inclinazione della funzione, rappresenta il **costo marginale**: ci dice di quanto aumentano i costi dell'impresa se questa produce una unità in più del bene.

Massimizzazione e Minimizzazione

Le derivate permettono di individuare i punti di massimo e di minimo di una funzione $y = f(x)$.

In corrispondenza del minimo (o del massimo) di una funzione, l'inclinazione della curva che la rappresenta è pari a zero; in altre parole, la sua derivata si annulla nel punto di minimo o massimo:

$$dy/dx=0$$

Massimizzazione e Minimizzazione: Esempio 1

Si consideri la funzione:

$$y(x) = -x^2 + 6x + 1$$

Massimizzazione e Minimizzazione: Esempio 1

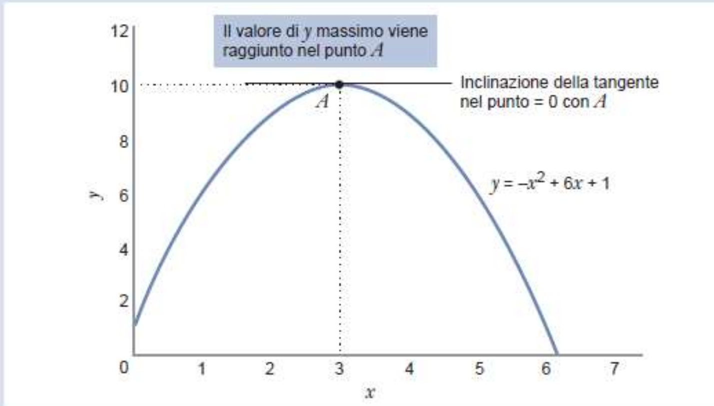


FIGURA A.7 Massimizzare una funzione
Il grafico illustra come la funzione in esame raggiunga il suo punto di massimo quando la sua inclinazione è zero. Nel punto A, in corrispondenza del quale $x = 3$, y raggiunge il suo valore massimo ($y = 10$). L'inclinazione della curva – ed, equivalentemente, il valore della derivata dy/dx – risulta quindi essere nulla nel punto A.

Massimizzazione e Minimizzazione: Esempio 1

Nel punto di massimo, la derivata della funzione *y*(*x*) rispetto a *x* deve essere uguale a zero:

$$dy(x)/dx = -2x + 6 = 0$$

Pertanto,

$$-2x + 6 = 0 \leftrightarrow$$
$$x^* = 3$$
$$y(x^*) = -3^2 + 6(3) + 1 = 10$$

Massimizzazione e Minimizzazione: Esempio 2

Si consideri la funzione:

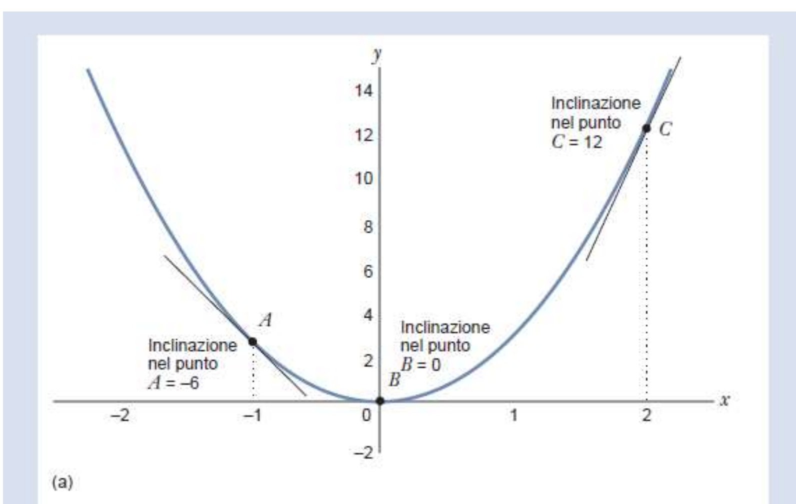
$$y(x) = 3x^2$$

Microeconomia 2/ed
David A. Besanko, Ronald R. Braeutigam - © 2012

67

Massimizzazione e Minimizzazione: Esempio 2

Grafico di $y(x)=3x^2$



Microeconomia 2/ed
David A. Besanko, Ronald R. Braeutigam - © 2012

68

Massimizzazione e Minimizzazione: Esempio 2

Nel punto di minimo, la derivata della funzione *y(x)* rispetto a *x* deve essere uguale a zero:

$$dy(x)/dx = 6x = 0$$

Pertanto,

$$6x = 0 \leftrightarrow$$
$$x^* = 0$$
$$y(x^*) = 3(0)^2 = 0$$

Massimizzazione e Minimizzazione

Come riconoscere un punto di minimo o di massimo?
La x^* che risolve condizione del prim'ordine,

$$dy(x)/dx = 0$$

può essere sia un massimo sia un minimo. Occorre guardare alle condizioni del second'ordine,

$$d^2y(x)/dx^2$$

cioè alla derivata seconda della funzione (capire se l'inclinazione della curva è crescente o decrescente quando ci avviciniamo al punto che annulla la derivata prima).

Massimizzazione e Minimizzazione

- Se, nel punto x^* tale che $dy(x^*)/dx = 0$, vale

$$d^2y(x^*)/dx^2 < 0,$$

allora x^* è un punto di massimo della funzione $y(x)$.

- Se, nel punto x^* tale che $dy(x^*)/dx = 0$, vale

$$d^2y(x^*)/dx^2 > 0,$$

allora x^* è un punto di minimo della funzione $y(x)$.

Massimizzazione e Minimizzazione

- Nell'Esempio 1,

$$y(x) = -x^2 + 6x + 1$$

avevamo trovato che

$$dy(x)/dx = 0 \leftrightarrow -2x + 6 = 0$$
$$\leftrightarrow x^* = 3$$

Poiché

$$d^2y(x^*)/dx^2 = -2 < 0,$$

allora $x^* = 3$ è un punto di massimo della funzione $y(x)$.

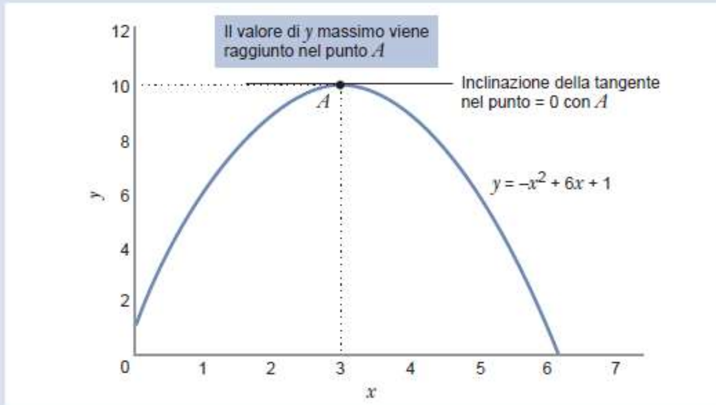


FIGURA A.7 Massimizzare una funzione
Il grafico illustra come la funzione in esame raggiunga il suo punto di massimo quando la sua inclinazione è zero. Nel punto *A*, in corrispondenza del quale $x = 3$, y raggiunge il suo valore massimo ($y = 10$). L'inclinazione della curva – ed, equivalentemente, il valore della derivata dy/dx – risulta quindi essere nulla nel punto A.

La derivata seconda negativa implica che:

- a sinistra di $x^* = 3$, l'inclinazione della curva che rappresenta $y(x)$ si riduce (ma rimane positiva).

- a destra di $x^* = 3$, l'inclinazione della curva che rappresenta $y(x)$ diventa negativa.

Poiché sappiamo che in corrispondenza di $x^* = 3$ l'inclinazione è nulla, concludiamo che $x^* = 3$ è un punto di massimo.

Massimizzazione e Minimizzazione

- Nell'Esempio 2,

$$y(x) = -x^2 + 6x + 1$$

avevamo trovato che

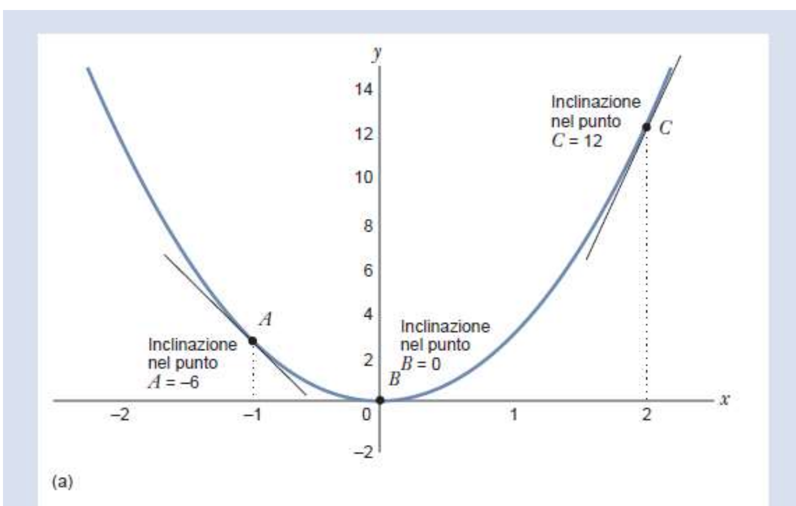
$$dy(x)/dx = 0 \leftrightarrow 6x = 0$$
$$\leftrightarrow x^* = 0.$$

Poiché

$$d^2y(x^*)/dx^2 = 6 > 0,$$

allora $x^* = 0$ è un punto di minimo della funzione $y(x)$.

Massimizzazione e Minimizzazione



Massimizzazione e Minimizzazione

La derivata seconda positiva implica che:

- a sinistra di $x^* = 0$ l'inclinazione della curva che rappresenta $y(x)$ aumenta (ma rimane negativa).

- a destra di $x^* = 0$ l'inclinazione della curva che rappresenta $y(x)$ diventa positiva.

Poiché sappiamo che in corrispondenza di $x^* = 0$ l'inclinazione è nulla, concludiamo che $x^* = 0$ è un punto di minimo.

Massimizzazione e Minimizzazione: funzioni a due variabili

Consideriamo la funzione

$$y = f(x,z)$$

In corrispondenza del minimo (o del massimo) di una funzione, tutte le derivate parziali si annullano:

$$\partial y/\partial x = \partial f(x,z)/\partial x = 0$$

$$\partial y/\partial z = \partial f(x,z)/\partial z = 0$$

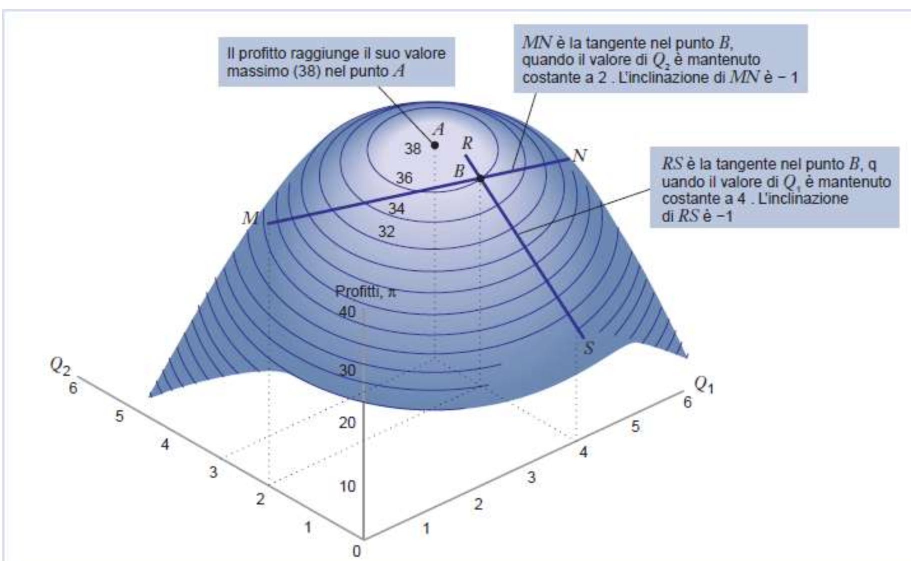
Massimizzazione e Minimizzazione: funzioni a due variabili

Consideriamo la funzione

$$\Pi(Q_1,Q_2) = 13Q_1 - 2(Q_1)^2 + Q_1Q_2 + 8Q_2 - 2(Q_2)^2$$

Trovare la combinazione di output (Q_1,Q_2) che massimizza i profitti dell'impresa.

Massimizzazione e Minimizzazione: funzioni a due variabili



Massimizzazione e Minimizzazione: funzioni a due variabili

$$\partial \Pi(Q_1,Q_2) / \partial Q_1 : 13 - 4Q_1 + Q_2 = 0$$

$$\partial \Pi(Q_1,Q_2) / \partial Q_2 : Q_1 + 8 - 4Q_2 = 0$$

Risolvendo il sistema di due equazioni, avremo:

$$Q_1^* = 4 \ \text{e} \ Q_2^* = 3$$

Ottimizzazione Vincolata

- Le decisioni economiche vengono prese cercando di massimizzare o minimizzare il valore di determinate variabili economiche (utilità, costi, profitti ecc.).

- Tali scelte non sono libere: gli individui fronteggiano dei vincoli (di bilancio, tecnologici ecc.)

- Come si risolvono i problemi di massimizzazione e minimizzazione vincolata?

Ottimizzazione Vincolata

- Definiamo funzione obiettivo la funzione che il soggetto economico intende minimizzare o massimizzare, e la indichiamo con $F(x,y)$, dove x e y sono le variabili di scelta dell'agente.

- Definiamo con $G(x,y)$ il vincolo che deve essere soddisfatto nella scelta.

Ottimizzazione Vincolata

Avremo:

$$\max_{(x,y)} F(x,y)$$

$$G(x,y) = 0$$

Il recinto del pastore

Costruire un recinto rettangolare, avendo a disposizione *F* metri di assi di legno. Il pastore può scegliere la lunghezza (*L*) e la larghezza (*W*) del recinto (espresse in metri), in modo da massimizzare l'area del recinto.

Il recinto del pastore

Problema:

max Area(L,W) rispetto a (L,W)

sotto il vincolo

$$2L + 2W \leq F$$

Il recinto del pastore

$$\max_{(L,W)} \; Area(L,W) = LW$$

sotto il vincolo:

$$2L + 2W = F$$

Riscriviamo il vincolo:

$$2L + 2W = F \rightarrow W = F/2 - L$$

e sostituiamolo nella funzione obiettivo *Area(L,W).*
Il problema diventa

$$\max_{L} \; Area(L) = L(F/2 - L)$$

$$= LF/2 - L^2$$

La nuova funzione obiettivo incorpora il vincolo, e la variabile di scelta è ora *L.*

Esercizio 2

La condizione del primo ordine:

dArea/dL = F/2 – 2L = 0 → L* = F/4

identifica il massimo della funzione.

Sostituendo *L** nel vincolo *W* = *F/2* - *L*, troviamo anche il valore di *W**,

W* = F/2 - L* = F/4

Per massimizzare l'area, il recinto dovrà essere un quadrato → *W** = *L**

Esercizio 2

Utilizzando le derivate, possiamo rispondere a varie domande:

1. Di quanto variano la lunghezza e la larghezza del recinto quando varia la quantità disponibile di legna, F?

Sappiamo che *L** = *F*/4 e *W** = *F*/4 ; Pertanto:

dL*/dF = 0.25 e dW*/dF = 0.25

Se il pastore ha a dispozione un metro in più di legna, lunghezza e larghezza aumentano di 25 cm.

Esercizio 2

Utilizzando le derivate, possiamo rispondere a varie domande:

1. Di quanto varia l'area del recinto quando varia la quantità disponibile di legna, F?

Sappiamo che Area* = $L^*W^* = (F/4)^2 = F^2/16$ m^2;
Pertanto:

$$dArea^*/dF = F/8$$

Se il pastore ha a dispozione un metro in più di legna, l'area aumenta di $F/8$ m^2.

I moltiplicatori di Lagrange

Non sempre è possibile risolvere un problema di ottimizzazione vincolata con il metodo di sostituzione visto in precedenza.

⟹ METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

I moltiplicatori di Lagrange

Si consideri il problema:

$$\max_{(x,y)} F(x,y)$$
$$G(x,y) = 0$$

Costruiamo la FUNZIONE LAGRANGIANA:

$$\Lambda(x,y,\lambda) = F(x,y) + \lambda G(x,y)$$

Dove λ è il moltiplicatore di Lagrange. Il moltiplicatore misura di quanto variarebbe il valore della funzione obiettivo se il vincolo $G(x,y)$ si modificasse.

I moltiplicatore di Lagrange

Calcoliamo le derivate parziali rispetto alle incognite (x,y, λ) e imponiamo che esse siano uguali a zero (*condizioni del primo ordine*).

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} + \lambda \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow G(x,y) = 0$$

I moltiplicatore di Lagrange

Otteniamo un sistema di tre equazioni e tre incognite: risolvendolo, otteniamo i valori di x ,y e λ che massimizzano la funzione $F(x,y)$, dato il vincolo $G(x,y)$.

→ $\boxed{x^*, y^*, \lambda^*}$

Esercizio 2

Domanda di due beni

$$\max_{(x,y)} \quad U(x,y) = (x-3)^{(1/3)}\,(y-2)^{(2/3)}$$

sotto il vincolo:

$$4x + 6y = 240$$

Esercizio 2

Ricordate le proprietà di potenze e logaritmi:

$$y(x) = x^a$$

può essere riscritto come

$$\ln y(x) = a \ln x$$

Inoltre:

$$y(x) = x^a y^b$$

può essere riscritto come

$$\ln y(x) = a \ln x + b \ln y$$

e

$$y(x) = x^a / y^b$$

può essere riscritto come

$$\ln y(x) = a \ln x - b \ln y$$

Esercizio 2

Pertanto, riscriviamo il problema di massimizzazione

$$\max_{(x,y)} \quad U(x,y) = (1/3)\ln(x-3) + (2/3)\ln(y-2)$$

sotto il vincolo:

$$4x + 6y = 240$$

Esercizio 2

Riscriviamo il vincolo come:

$$4x + 6y - 240 = 0$$

Costruiamo il Lagrangiano:

$$\Lambda(x,y,\lambda) = (1/3)\log(x-3) + (2/3)\log(y-2) - \lambda(4x+6y-240)$$

Esercizio 2

La soluzione è

$$x^* = 21 \;\; e \;\; y^* = 26$$

Inoltre,

$$\lambda^* = 1/216$$