

Modellizzazione dei Sistemi Logistici

Algoritmi euristici

Corso di Studi in Ingegneria Gestionale

a.a. 2020-2021

giuseppe.bruno@unina.it

Docente: Prof. Giuseppe Bruno

Argomenti della lezione

- **Alcune definizioni fondamentali**
- **Algoritmi costruttivi**
- **Algoritmi migliorativi**
- **Conclusioni**

Definizioni fondamentali

In termini generali un problema di ottimizzazione può essere formulato come

$$z = f(x) \quad \text{Max!}$$
$$x \in X$$

con

- X di insieme di ***soluzioni ammissibili***
- $z=f(x)$ ***funzione obiettivo*** $z=f(x)$ da massimizzare

Una soluzione $x^* \in X$ è un **massimo locale** se $f(x^*) \geq f(x)$ per ogni $x \in I_\varepsilon(x)$

Una soluzione $x^* \in X$ è un **massimo globale** se $f(x^*) \geq f(x)$ per ogni $x \in X$

Definizioni fondamentali

Problema e metodo di risoluzione

Una volta formalizzato un problema di ottimizzazione si pone il problema di individuarne le soluzioni (ottimi globali o locali).

Un **metodo di risoluzione** è una tecnica che consente di trovare soluzioni del problema.

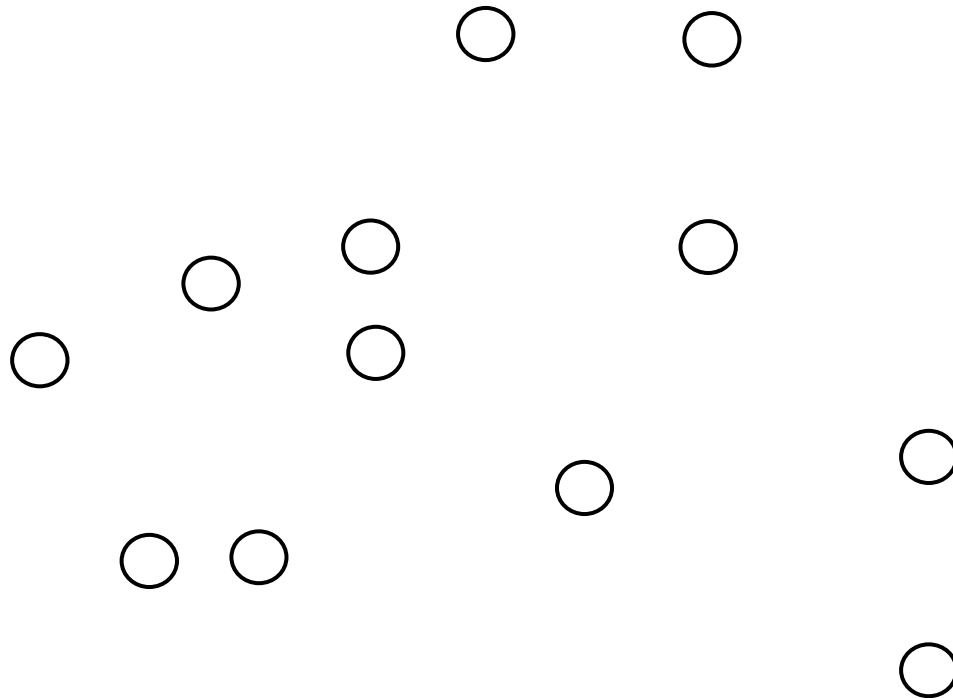
Un metodo di risoluzione può essere **esatto** se individua un ottimo globale ammissibile

euristico se è orientato alla ricerca di una buona soluzione (ma non necessariamente ottima).

Definizioni fondamentali

Esempio di problema del commesso viaggiatore

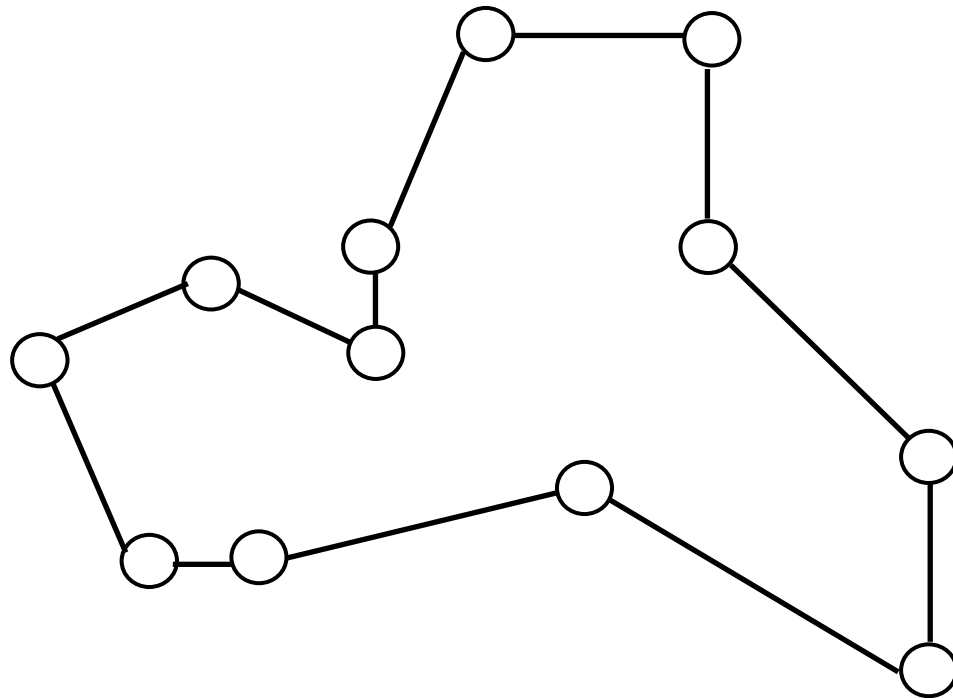
Si individui il circuito di lunghezza minima che passi per ciascun nodo una ed una sola volta



Esempio

Esempio di problema del commesso viaggiatore

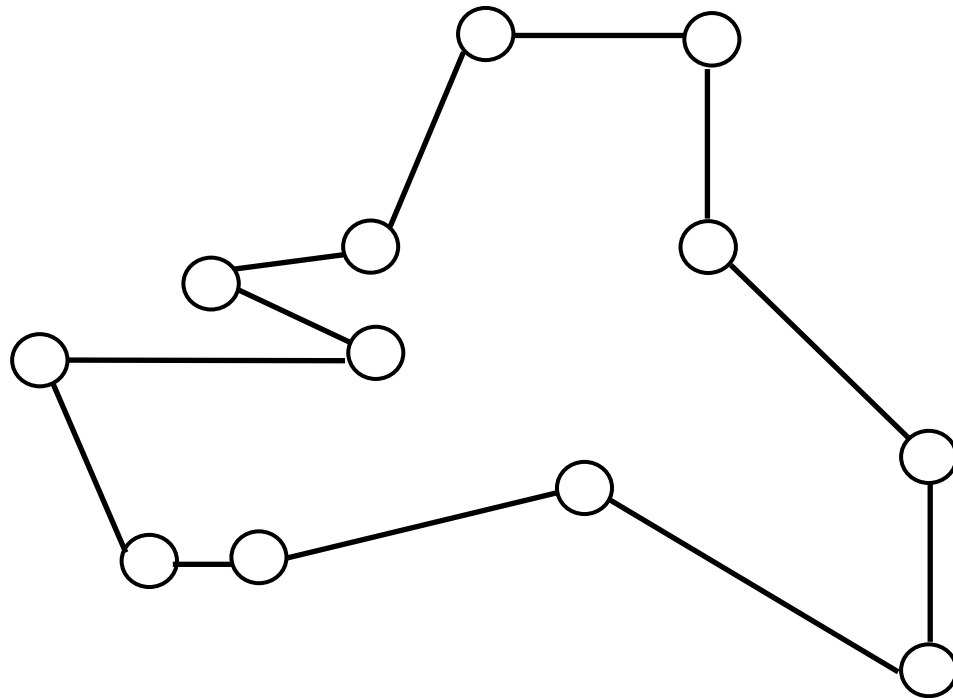
Soluzione ottima



Esempio

Esempio di problema del commesso viaggiatore

Soluzione approssimata



Classificazione tecniche euristiche

I metodi di risoluzione euristici si distinguono in

metodo costruttivi, orientati alla individuazione (costruzione) di una soluzione ammissibile;

metodo migliorativi o di ricerca locale, che, partendo da una soluzione ammissibile, puntano a migliorarla;

metodi metaeuristici che utilizzano diversi meccanismi per migliorare le soluzioni ottenibili con un metodo migliorativo

Metodi o algoritmi costruttivi

Metodi orientati alla costruzione di una soluzione ammissibile.

Passi fondamentali di un algoritmo costruttivo

1. Inizializzazione

Si sceglie un elemento di partenza per la costruzione della soluzione parziale S .

2. Selezione di un nuovo elemento da aggiungere alla soluzione parziale

Si individua il criterio di selezione di un nuovo elemento da aggiungere alla soluzione parziale S .

3. Criterio di arresto

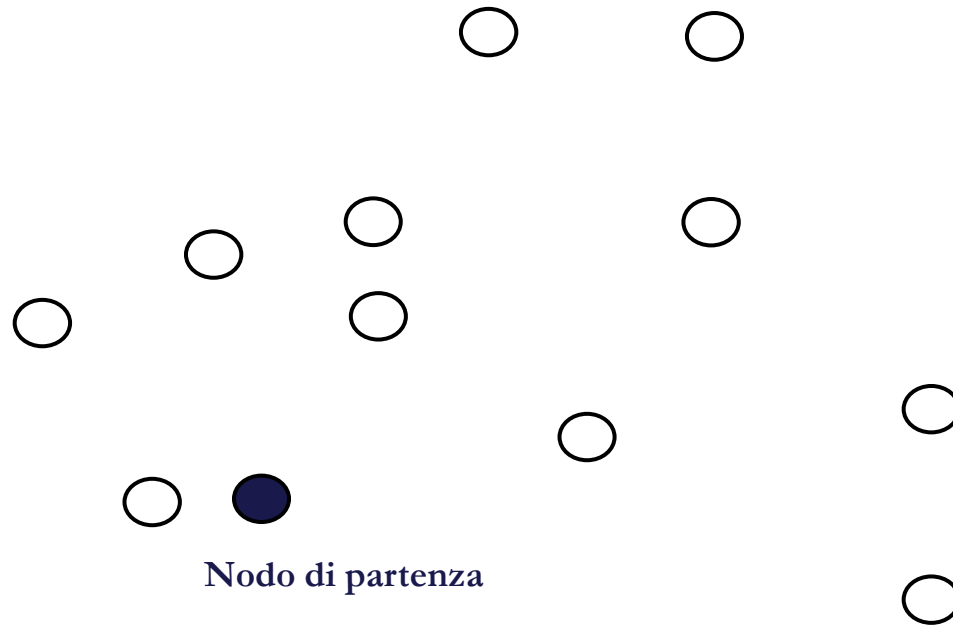
Se S è completa e, quindi, ammissibile la procedura si interrompe altrimenti si ritorna al passo 2.

Metodi o algoritmi costruttivi

Esempio di applicazione di algoritmo costruttivo
per la risoluzione del problema del commesso viaggiatore

1. Inizializzazione

Si sceglie un elemento di partenza per la costruzione della soluzione parziale S .

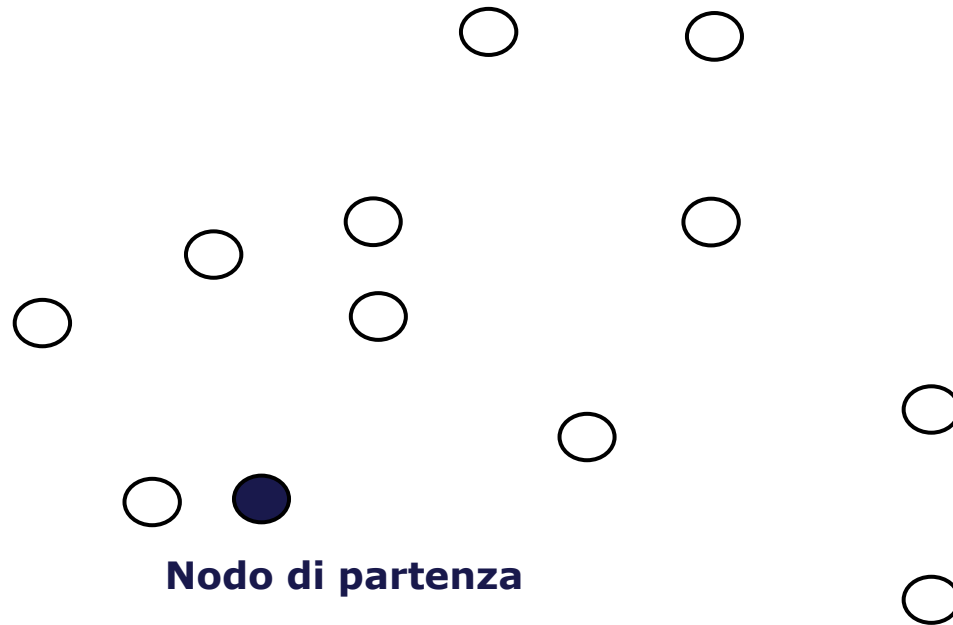


Metodi o algoritmi costruttivi

Esempio di applicazione di algoritmo costruttivo
per la risoluzione del problema del commesso viaggiatore

2. Selezione nuovo elemento da aggiungere alla soluzione

Si individua il criterio di selezione di un nuovo elemento da aggiungere alla soluzione parziale S .



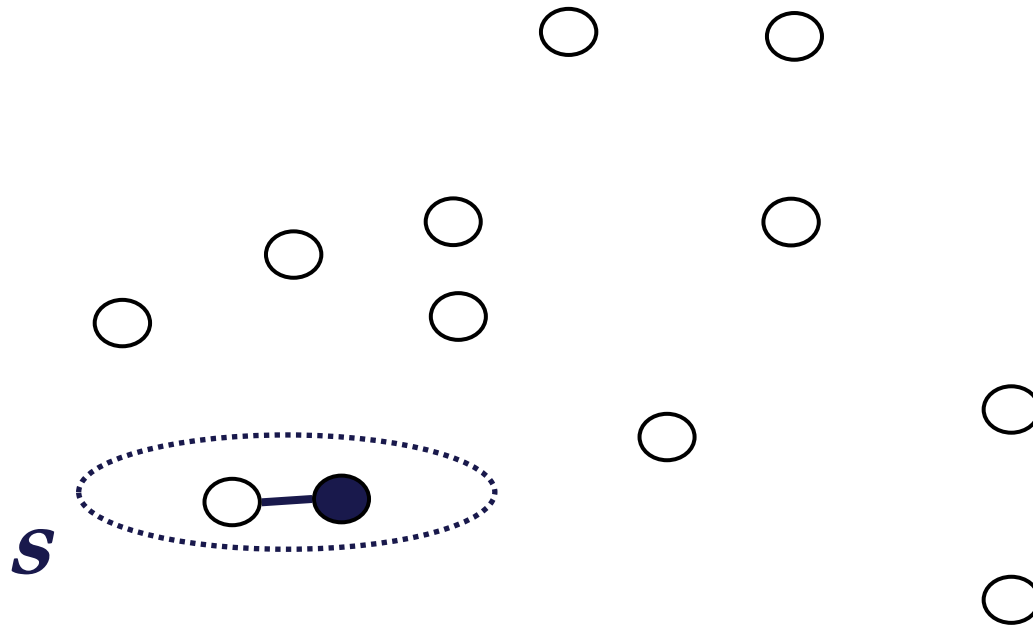
criterio di selezione: aggiunta del nodo più vicino all'ultimo nodo inserito nella soluzione parziale S .

Metodi o algoritmi costruttivi

Esempio di applicazione di algoritmo costruttivo
per la risoluzione del problema del commesso viaggiatore

2. Selezione nuovo elemento da aggiungere alla soluzione

Si individua il criterio di selezione di un nuovo elemento da aggiungere alla soluzione parziale S .



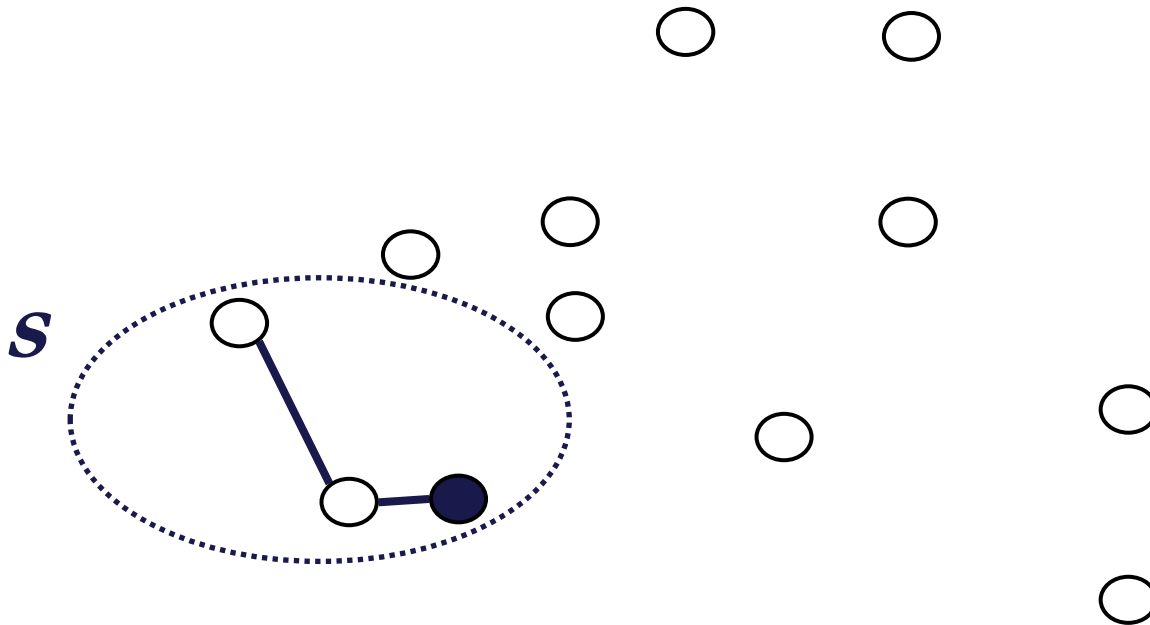
criterio di selezione: aggiunta del nodo più vicino all'ultimo nodo inserito nella soluzione parziale S .

Metodi o algoritmi costruttivi

Esempio di applicazione di algoritmo costruttivo
per la risoluzione del problema del commesso viaggiatore

2. Selezione nuovo elemento da aggiungere alla soluzione

Si individua il criterio di selezione di un nuovo elemento da aggiungere alla soluzione parziale S .



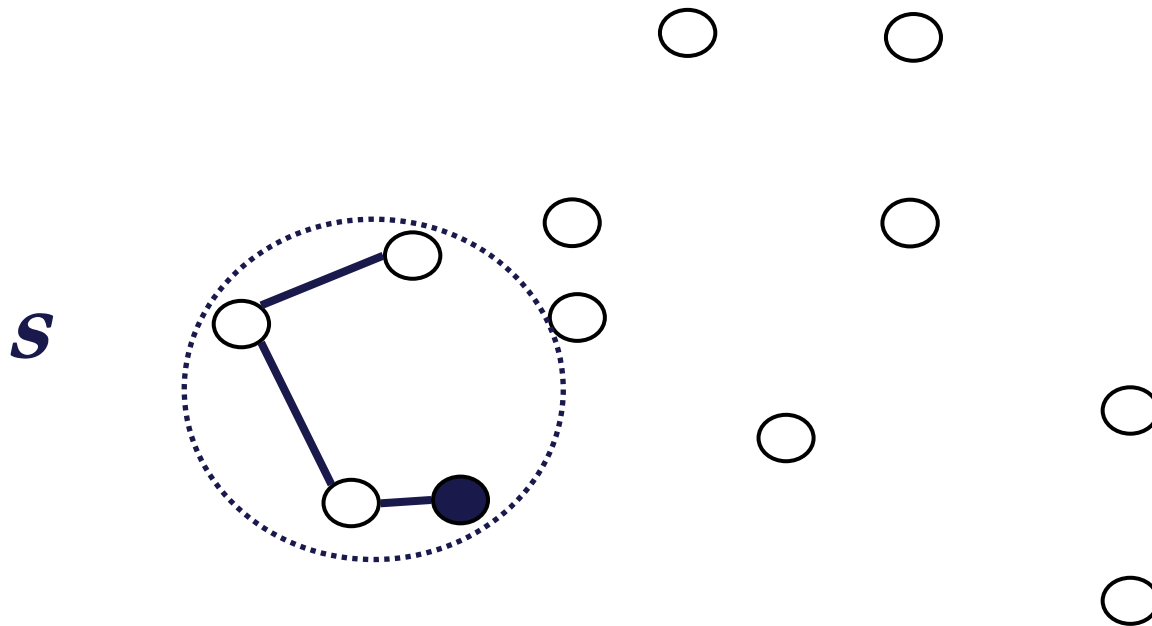
criterio di selezione: aggiunta del nodo più vicino all'ultimo nodo inserito nella soluzione parziale S .

Metodi o algoritmi costruttivi

Esempio di applicazione di algoritmo costruttivo
per la risoluzione del problema del commesso viaggiatore

2. Selezione nuovo elemento da aggiungere alla soluzione

Si individua il criterio di selezione di un nuovo elemento da aggiungere alla soluzione parziale S .



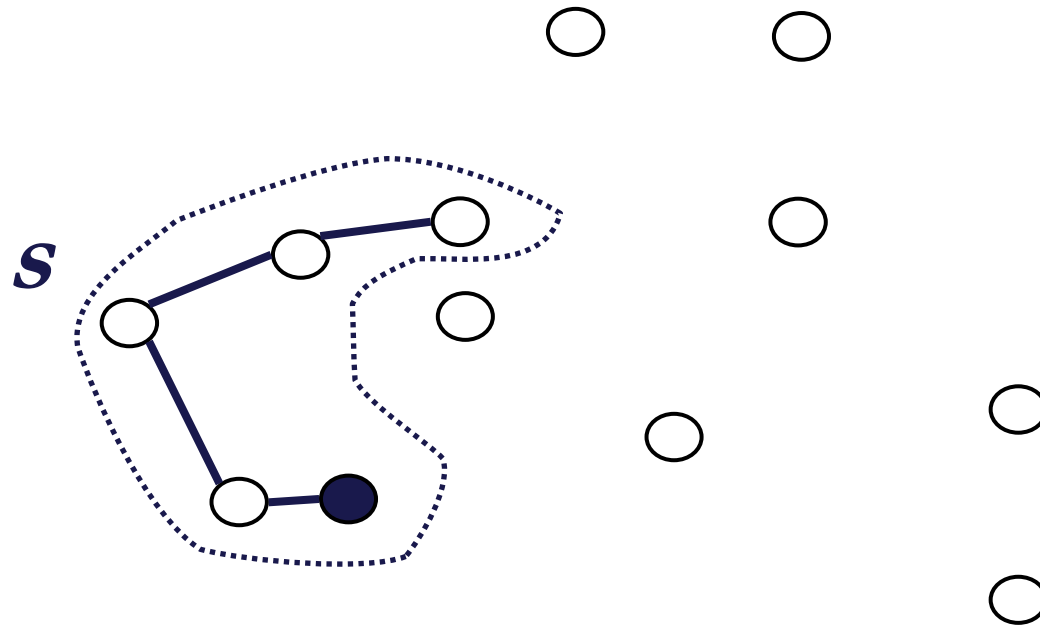
criterio di selezione: aggiunta del nodo più vicino all'ultimo nodo inserito nella soluzione parziale S .

Metodi o algoritmi costruttivi

Esempio di applicazione di algoritmo costruttivo
per la risoluzione del problema del commesso viaggiatore

2. Selezione nuovo elemento da aggiungere alla soluzione

Si individua il criterio di selezione di un nuovo elemento da aggiungere alla soluzione parziale S .



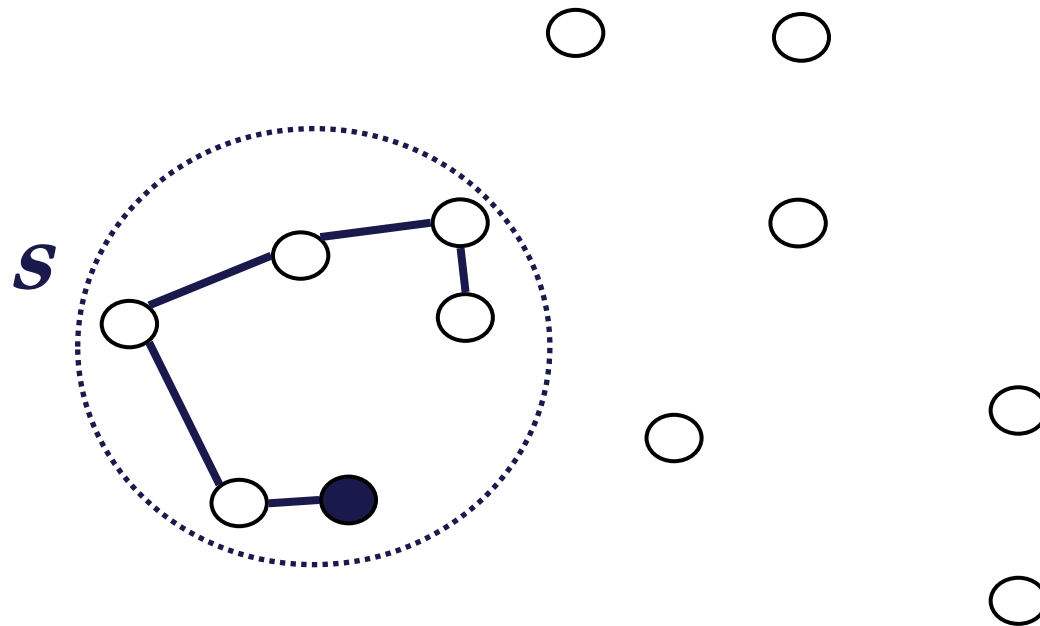
criterio di selezione: aggiunta del nodo più vicino all'ultimo nodo inserito nella soluzione parziale S .

Metodi o algoritmi costruttivi

Esempio di applicazione di algoritmo costruttivo
per la risoluzione del problema del commesso viaggiatore

2. Selezione nuovo elemento da aggiungere alla soluzione

Si individua il criterio di selezione di un nuovo elemento da aggiungere alla soluzione parziale S .



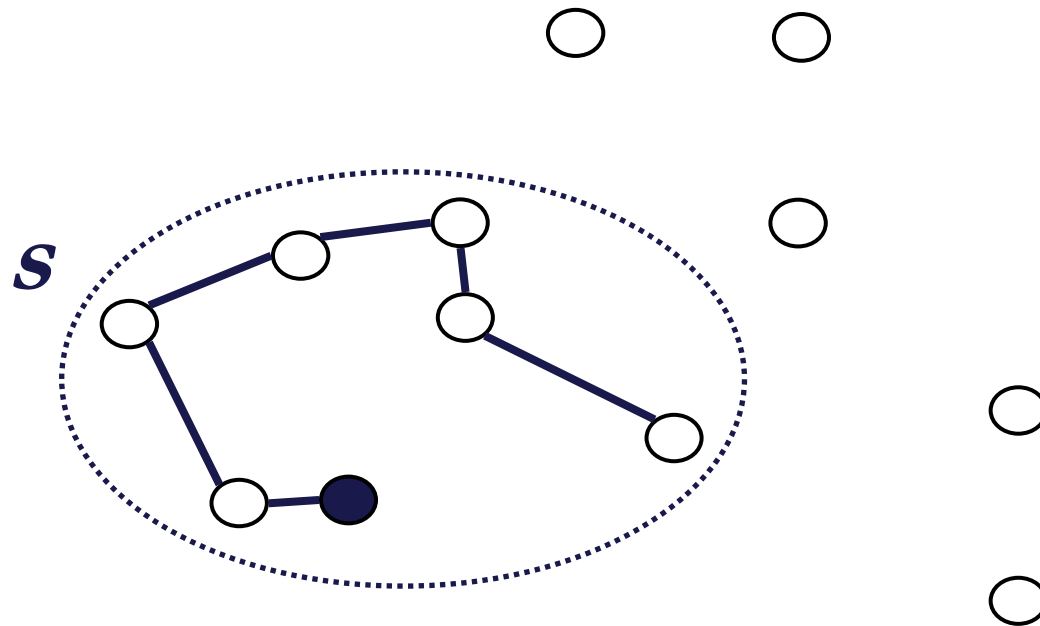
criterio di selezione: aggiunta del nodo più vicino all'ultimo nodo inserito nella soluzione parziale S .

Metodi o algoritmi costruttivi

Esempio di applicazione di algoritmo costruttivo
per la risoluzione del problema del commesso viaggiatore

2. Selezione nuovo elemento da aggiungere alla soluzione

Si individua il criterio di selezione di un nuovo elemento da aggiungere alla soluzione parziale S .



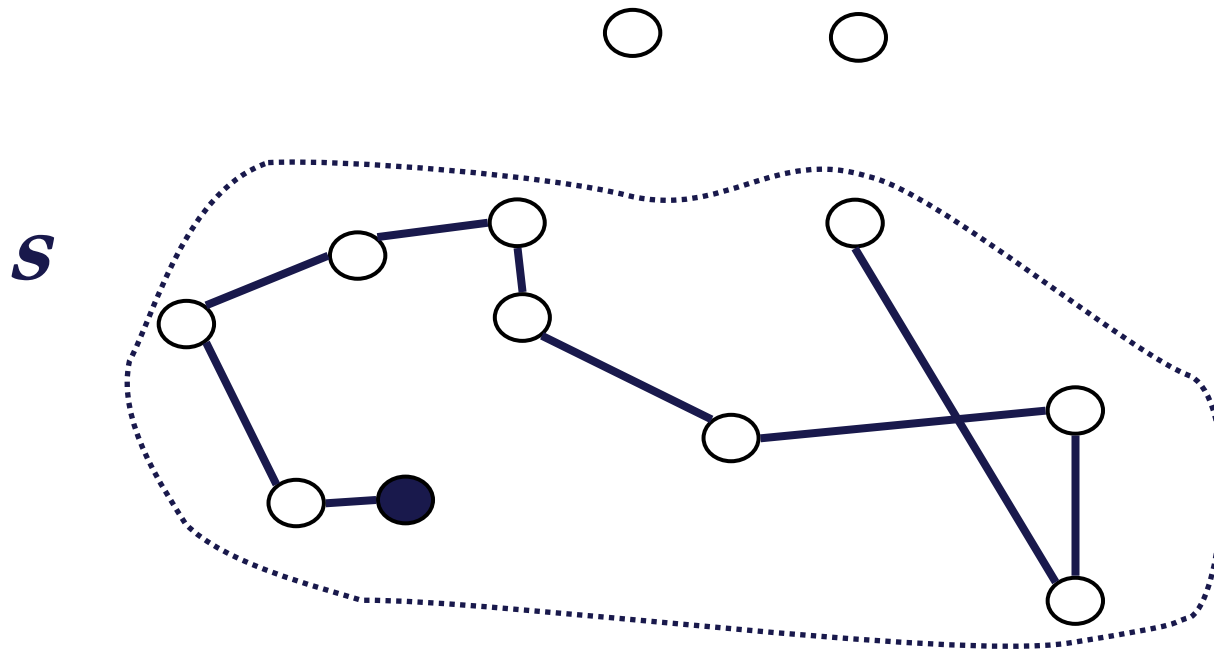
criterio di selezione: aggiunta del nodo più vicino all'ultimo nodo inserito nella soluzione parziale S .

Metodi o algoritmi costruttivi

Esempio di applicazione di algoritmo costruttivo per la risoluzione del problema del commesso viaggiatore

2. Selezione nuovo elemento da aggiungere alla soluzione

Si individua il criterio di selezione di un nuovo elemento da aggiungere alla soluzione parziale S .



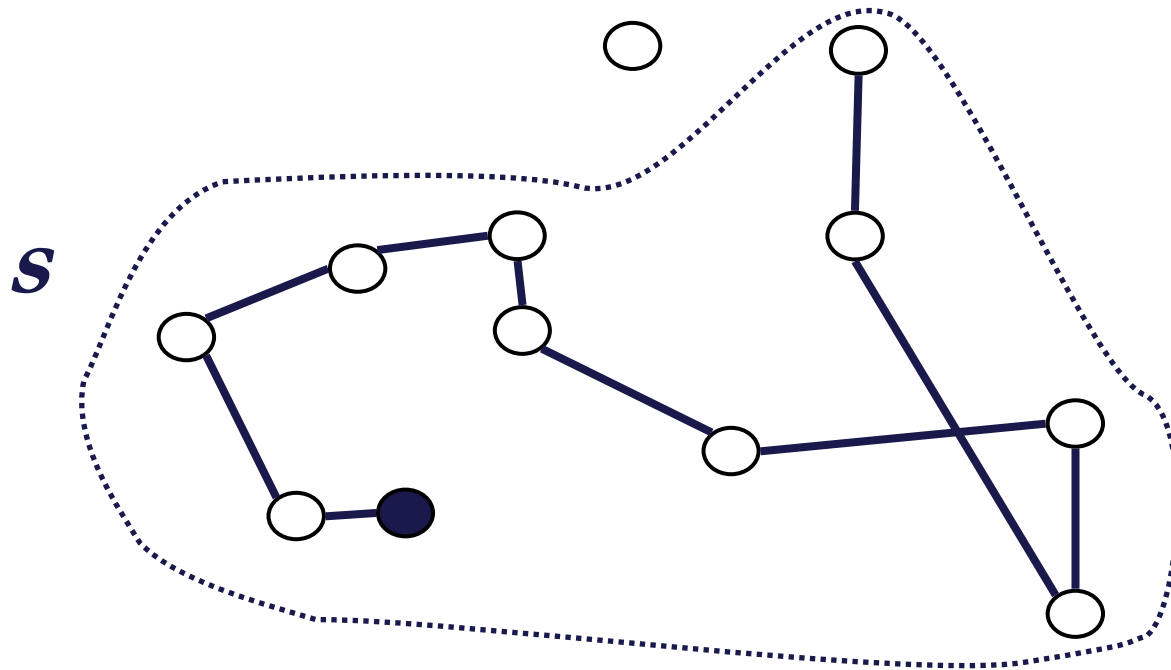
criterio di selezione: aggiunta del nodo più vicino all'ultimo nodo inserito nella soluzione parziale S .

Metodi o algoritmi costruttivi

Esempio di applicazione di algoritmo costruttivo per la risoluzione del problema del commesso viaggiatore

2. Selezione nuovo elemento da aggiungere alla soluzione

Si individua il criterio di selezione di un nuovo elemento da aggiungere alla soluzione parziale S .



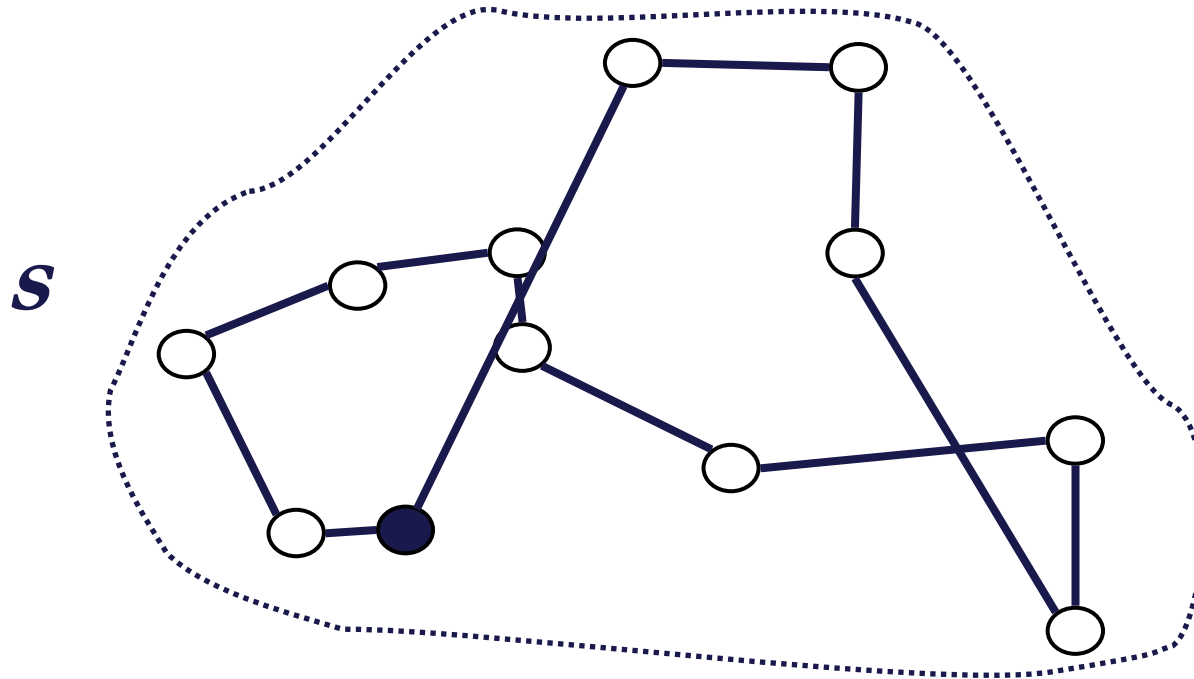
criterio di selezione: aggiunta del nodo più vicino all'ultimo nodo inserito nella soluzione parziale S .

Metodi o algoritmi costruttivi

Esempio di applicazione di algoritmo costruttivo per la risoluzione del problema del commesso viaggiatore

2. Selezione nuovo elemento da aggiungere alla soluzione

Si individua il criterio di selezione di un nuovo elemento da aggiungere alla soluzione parziale S .



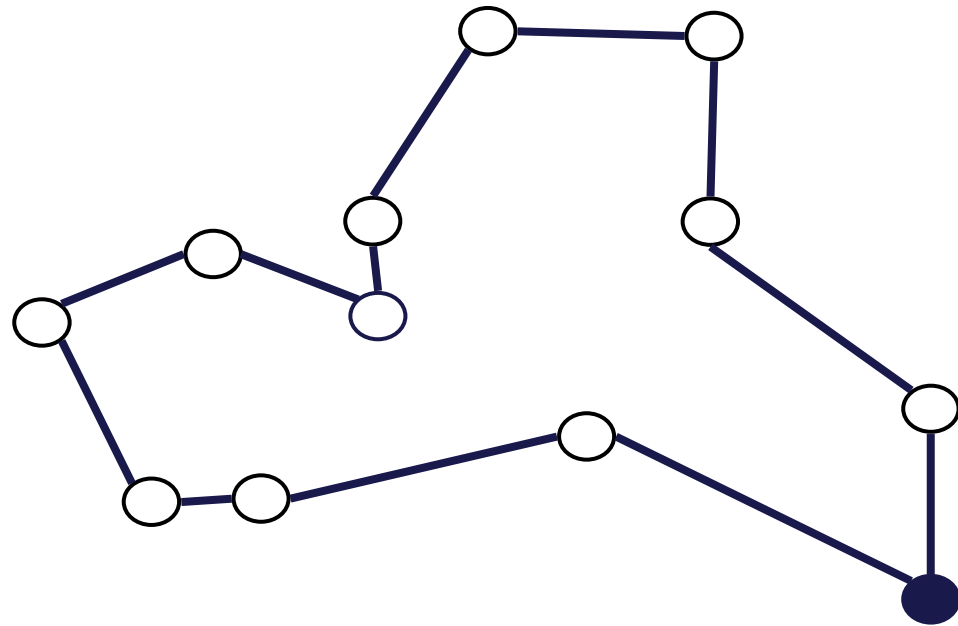
criterio di selezione: aggiunta del nodo più vicino all'ultimo nodo inserito nella soluzione parziale S .

Metodi o algoritmi costruttivi

Le soluzioni individuate da tecniche costruttive dipendono dalla

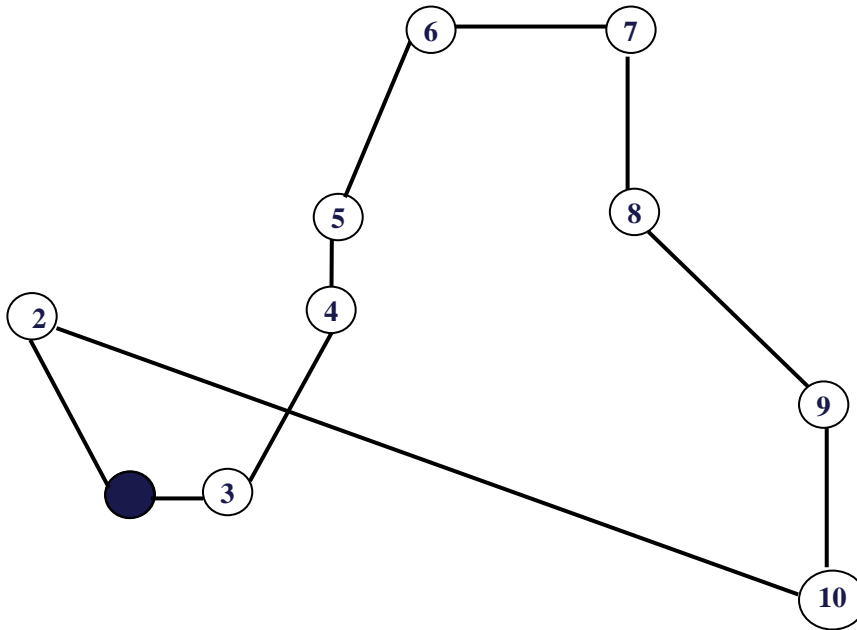
- **Scelta dell'elemento di partenza**
- **Scelta del criterio di selezione di un nuovo elemento da aggiungere alla soluzione parziale**

Esempio di soluzione
individuata con lo
stesso criterio a partire
da un diverso elemento
di partenza



Metodi o algoritmi costruttivi

Algoritmo del nearest neighbour



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1		1	6	2	7	8	13	16	14	15	16	<i>n-1</i>
2	6		7	6	7	12	15	13	18	20		
3	2	7		6	8	12	15	12	12	15		<i>n-2</i>
4	7	6	6		1	7	10	5	9	13		<i>n-3</i>
5	8	7	8	1		5	8	5	11	14		<i>n-4</i>
6	13	12	12	7	5		4	6	12	15		<i>n-5</i>
7	15	15	15	10	8	4		4	10	14		<i>n-6</i>
8	14	13	12	5	5	6	4		7	13		<i>n-7</i>
9	16	18	12	9	11	12	10	7		5		<i>n-8</i>
10	15	20	15	13	14	15	14	5				<i>1</i>

Metodi o algoritmi costruttivi

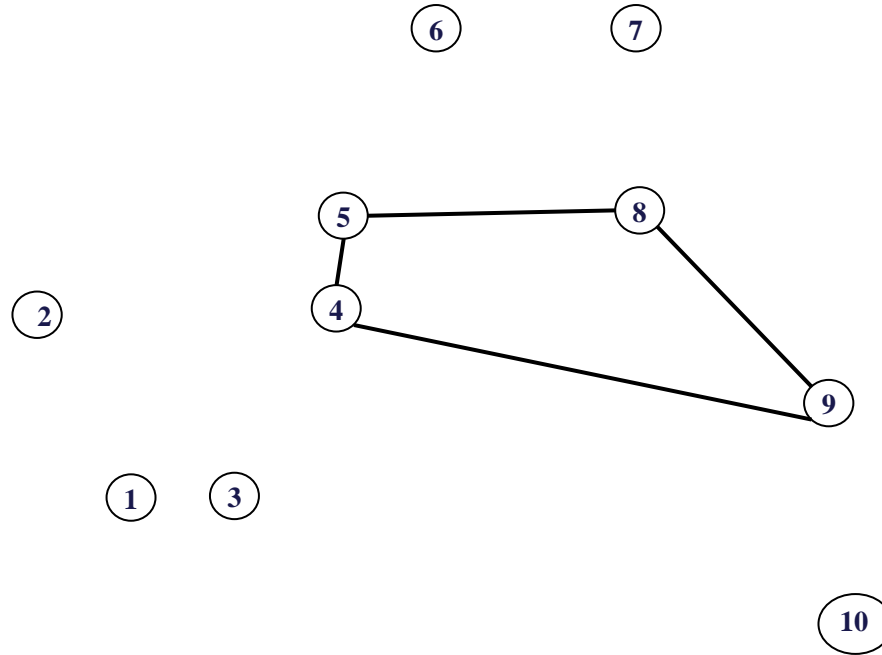
	1	n	
1	-										$n-1$
.		-									$n-2$
.			-								$n-3$
.				-							...
.					-						...
.						-					...
.							-				...
.								-			2
.									-		1
n										-	

$$\frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n - 1)}{2} < n^2 = O(n^2)$$

Metodi o algoritmi costruttivi

Nearest insertion

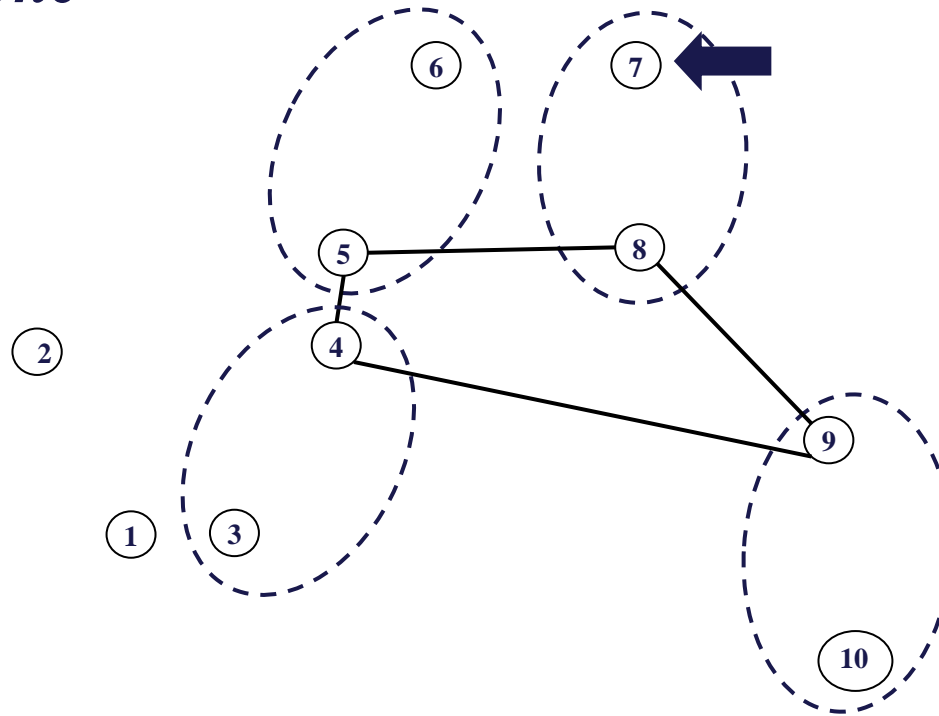
Algoritmi di inserimento



Metodi o algoritmi costruttivi

Nearest insertion

Fase di selezione



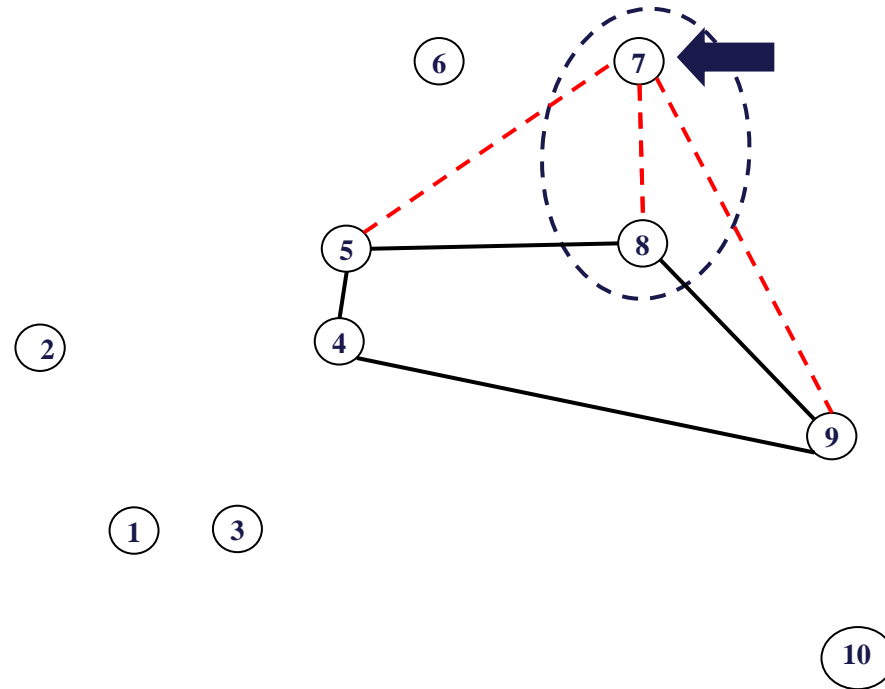
Metodi o algoritmi costruttivi

Nearest insertion

Algoritmi di inserimento

Fase di selezione

Fase di inserimento

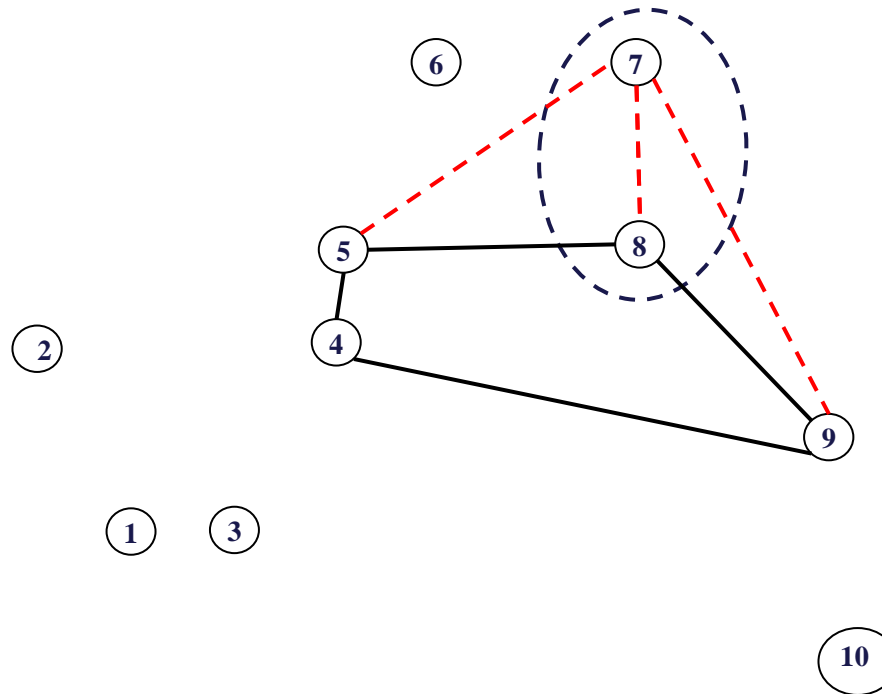


Metodi o algoritmi costruttivi

Nearest insertion

Fase di selezione

*Fase di
inserimento*



$$\Delta_{578} = c_{57} + c_{78} - c_{58}$$

$$\Delta_{879} = c_{87} + c_{79} - c_{89}$$

$$\Delta_{578} < \Delta_{879}$$

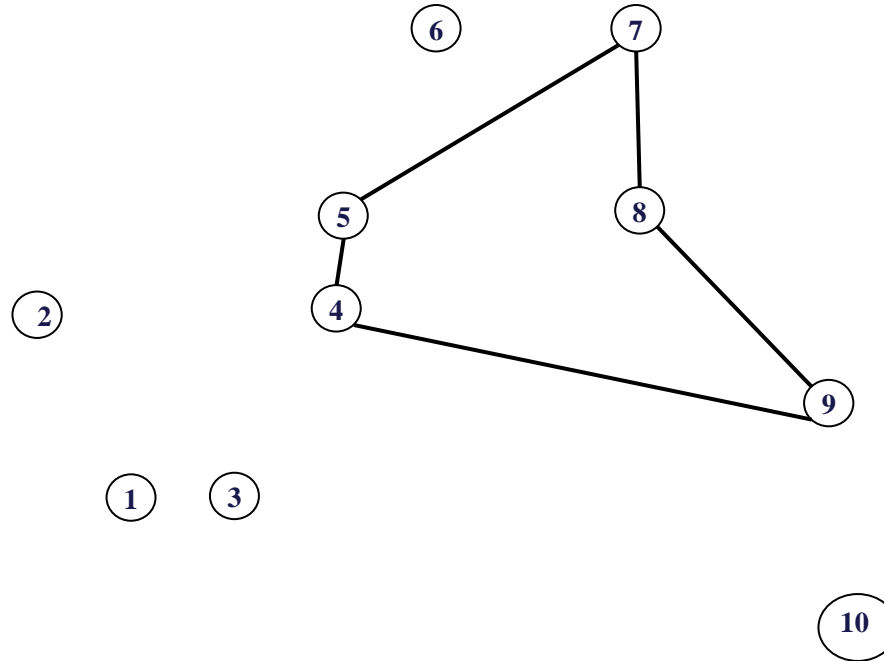
Metodi o algoritmi costruttivi

Nearest insertion

Fase di selezione

*Fase di
inserimento*

$$\Delta_{578} < \Delta_{879}$$



Metodi o algoritmi costruttivi

Gli algoritmi costruttivi sono anche detti

Myopic (Miopi)

Greedy (Affamati)

Dal momento che fanno la scelta apparentemente migliore senza considerare l'intero problema

Metodi o algoritmi migliorativi

Metodi orientati al miglioramento di una soluzione ammissibile.

Passi fondamentali di un algoritmo migliorativo

1. Inizializzazione

Si sceglie una soluzione iniziale S di innesco del processo di ricerca.

2. Individuazione dell'intorno

Si definisce una "mossa" ovvero una operazione che consente di individuare un intorno $N(S)$ della soluzione corrente

3. Scelta di una nuova soluzione

Si individua la soluzione $S' \in N(S)$ migliore dell'intorno

4. Criterio di arresto

Se S' è migliore di S si sostituisce si pone $S=S'$ e si torna al passo 2; altrimenti la procedura si arresta

Metodi o algoritmi migliorativi

Esempio di applicazione di tecnica migliorativa
per la risoluzione del problema del commesso viaggiatore

Si supponga di rappresentare una soluzione del TSP attraverso una stringa rappresentativa della successione di città da visitare

1. Inizializzazione

Si sceglie una soluzione iniziale S di innesco del processo di ricerca.

									$Z(S)$
S	1	2	3	4	5	6	7	8	100

Metodi o algoritmi migliorativi

Esempio applicazione di tecnica migliorativa per il TSP

2. Individuazione dell'intorno

Si definisce una "mossa" ovvero una operazione che consente di individuare un intorno $N(S)$ della soluzione corrente

Esempio di mossa: scambio di posizione di due elementi consecutivi

								z(S)	
S	1	2	3	4	5	6	7	8	100

Metodi o algoritmi migliorativi

Esempio applicazione di tecnica migliorativa per il TSP

2. Individuazione dell'intorno

Si definisce una "mossa" ovvero una operazione che consente di individuare un intorno $N(S)$ della soluzione corrente

Esempio di mossa: scambio di posizione di due elementi consecutivi

	S	1	2	3	4	5	6	7	8	Z(S)
										100
N(S)	A	2	1	3	4	5	6	7	8	
	B	1	3	2	4	5	6	7	8	
	C	1	2	4	3	5	6	7	8	
	D	1	2	3	5	4	6	7	8	
	E	1	2	3	4	6	5	7	8	
	F	1	2	3	4	5	7	6	8	
	G	1	2	3	4	5	6	8	7	
	H	8	2	3	4	5	6	7	1	

Metodi o algoritmi migliorativi

Esempio applicazione di tecnica migliorativa per il TSP

3. Scelta di una nuova soluzione

Si individua la soluzione $S' \in N(S)$ migliore dell'intorno

		1	2	3	4	5	6	7	8	Z(S)
	S	1	2	3	4	5	6	7	8	100
N(S)	A	2	1	3	4	5	6	7	8	106
	B	1	3	2	4	5	6	7	8	104
	C	1	2	4	3	5	6	7	8	112
	D	1	2	3	5	4	6	7	8	101
	E	1	2	3	4	6	5	7	8	98
	F	1	2	3	4	5	7	6	8	102
	G	1	2	3	4	5	6	8	7	96
	H	8	2	3	4	5	6	7	1	103

Metodi o algoritmi migliorativi

Esempio applicazione di tecnica migliorativa per il TSP

3. Scelta di una nuova soluzione

Si individua la soluzione $S' \in N(S)$ migliore dell'intorno

		1	2	3	4	5	6	7	8	Z(S)
	S	1	2	3	4	5	6	7	8	100
$N(S)$	A	2	1	3	4	5	6	7	8	106
	B	1	3	2	4	5	6	7	8	104
	C	1	2	4	3	5	6	7	8	112
	D	1	2	3	5	4	6	7	8	101
	E	1	2	3	4	6	5	7	8	98
	F	1	2	3	4	5	7	6	8	102
	S'=G	1	2	3	4	5	6	8	7	96
	H	8	2	3	4	5	6	7	1	103

Metodi o algoritmi migliorativi

Esempio applicazione di tecnica migliorativa per il TSP

4. Criterio di arresto

Se S' è migliore di S si sostituisce si pone $S=S'$ e si torna al passo 2; altrimenti la procedura si arresta

									$Z(S)$	
	S	1	2	3	4	5	6	7	8	100
	A	2	1	3	4	5	6	7	8	106
	B	1	3	2	4	5	6	7	8	104
	C	1	2	4	3	5	6	7	8	112
	D	1	2	3	5	4	6	7	8	101
	E	1	2	3	4	6	5	7	8	98
	F	1	2	3	4	5	7	6	8	102
	S'=G	1	2	3	4	5	6	8	7	96
	H	8	2	3	4	5	6	7	1	103

$N(S)$

Metodi o algoritmi migliorativi

Esempio applicazione di tecnica migliorativa per il TSP

2. Individuazione dell'intorno

Si definisce una "mossa" ovvero una operazione che consente di individuare un intorno $N(S)$ della soluzione corrente

Esempio di mossa: scambio di posizione di due elementi consecutivi

	S'	1	2	3	4	5	6	8	7
	A'	2	1	3	4	5	6	8	7
	B'	1	3	2	4	5	6	8	7
	C'	1	2	4	3	5	6	8	7
	D'	1	2	3	5	4	6	8	7
	E'	1	2	3	4	6	5	8	7
	F'	1	2	3	4	5	8	6	7
	G'	1	2	3	4	5	6	7	8
	H'	7	2	3	4	5	6	8	1

$N(S')$

$Z(S')$

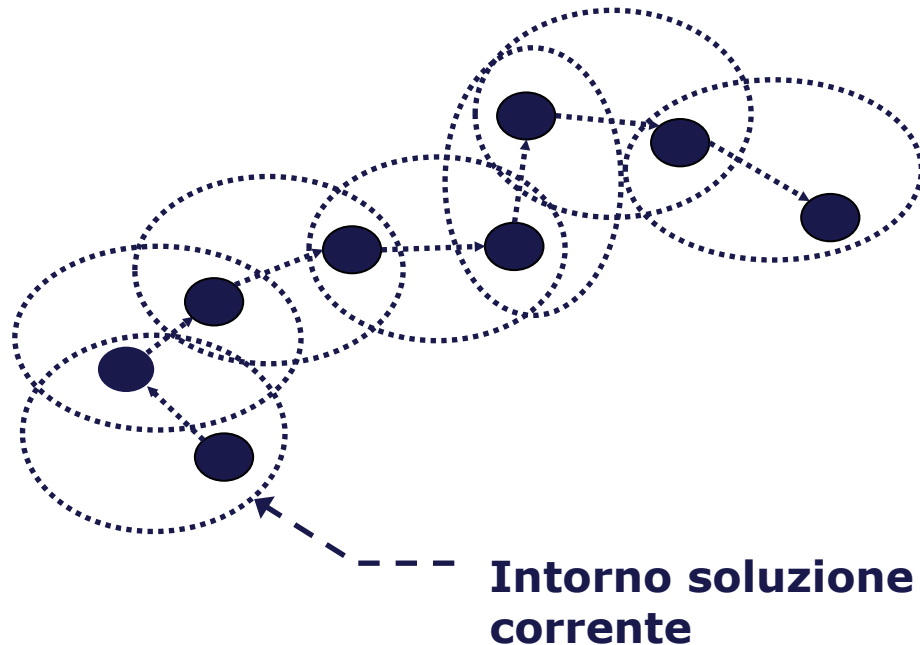
96

E così
iterativamente
fino all'arresto

Metodi o algoritmi migliorativi

Il processo di ricerca locale

Il processo di ricerca locale, attraverso la scelta, ad ogni iterazione, di una nuova soluzione dell'intorno individua un percorso nello spazio di ricerca che converge in un minimo locale



Metodi o algoritmi migliorativi

Dal punto di vista matematico il processo di ricerca analizza, ad ogni iterazione, un intorno della soluzione corrente. Per questa ragione gli algoritmi migliorativi sono detti anche **algoritmi o tecniche di ricerca locale**.

Le soluzioni individuate da algoritmi di ricerca locale rappresentano ottimi (minimi o massimi) locali e dipendono dalla

Scelta della soluzione di partenza

Scelta della mossa

Metodi o algoritmi migliorativi

Mosse tipiche

Problemi con soluzioni a combinazione

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	1	0	1	1	1

**Sostituzione valori
complementari**

1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0

**Dimensione intorno:
n**

Numero massimo soluzioni ammissibili: **2^n**

Metodi o algoritmi migliorativi

Mosse tipiche

Problemi con soluzioni a combinazione

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0

Scambio valori 1 e 0

Dimensione intorno:
 $p(n-p)$

Numero massimo soluzioni ammissibili: 2^n

p : numero elementi di valore 0 o 1

Metodi o algoritmi migliorativi

Mosse tipiche

Problemi con soluzioni a permutazione

1 2 3 4 5

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

**Scambio valori
consecutivi**

2	1	3	4	5
1	3	2	4	5
1	2	4	3	5
1	2	3	5	4
5	2	3	4	1

Dimensione intorno:

n

Numero massimo soluzioni ammissibili: **n!**

Metodi o algoritmi migliorativi

Mosse tipiche

Problemi con soluzioni a permutazione

1 2 3 4 5

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

Scambio di posizioni tra
due nodi (swap)

2	1	3	4	5
3	2	1	4	5
4	2	3	1	5
5	2	3	4	1

Dimensione intorno:
 $n(n-1)/2$

1	3	2	4	5
1	4	3	2	5
1	5	3	4	2

1	2	4	3	5
1	4	5	4	3

1	2	3	5	4
---	---	---	---	---

Numero massimo soluzioni ammissibili: **n!**

Metodi o algoritmi migliorativi

Mosse tipiche

Problemi con soluzioni a permutazione

1	2	3	4	5
1	2	3	4	5

**Mossa di inserimento di
ciascun nodo in altre
posizioni**

2	1	3	4	5
2	3	1	4	5
2	3	4	1	5
2	3	4	5	1

**Dimensione intorno:
 $n(n-1)/2$**

1	3	2	4	5
1	3	4	2	5
1	3	4	5	2

1	2	4	3	5
1	2	4	5	3

1	2	3	5	4
---	---	---	---	---

Numero massimo soluzioni ammissibili: **$n!$**

Metodi o algoritmi migliorativi

In presenza di problemi complessi dal punto di vista computazionale (NP-hard) nelle applicazioni è necessario ricorrere a tecniche euristiche di risoluzione.

Le tecniche costruttive sono orientate alla individuazione (costruzione) di una soluzione ammissibile.

Le tecniche migliorative o di ricerca locale partono da una soluzione ammissibile e puntano a migliorarla attraverso la applicazione iterativa di una mossa. Esse convergono in un ottimo locale.

Per migliorare la qualità delle soluzioni individuabili con queste tecniche è possibile ricorrere a tecniche cosiddette **metaeuristiche**

Metodi o algoritmi migliorativi

Esercizio

Si consideri il problema di riempire due zaini rispettivamente di capacità 100 e 150 utilizzando gli oggetti indicati, con l'obiettivo di massimizzarne il valore:

- (a) Si formuli il modello matematico del problema.
- (b) Si proponga un algoritmo costruttivo per la risoluzione del problema.
- (c) Si imposti un algoritmo migliorativo e si effettui una iterazione dell'algoritmo proposto.

Oggetto	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Valore v_j	60	40	60	80	30	20	25	65	60
Peso p_j	40	30	50	40	40	10	25	55	50

Metodi o algoritmi migliorativi

Esercizio

Si consideri un problema di assegnazione di operazioni a 3 macchine ($P3||C_{\max}$) con l'obiettivo di distribuire al meglio il carico di lavoro tra le macchine

- (a) Si formuli il modello matematico del problema.
- (b) Si proponga un algoritmo costruttivo per la risoluzione del problema.
- (c) Si imposti un algoritmo migliorativo e si effettui una iterazione dell'algoritmo proposto.

Operazione	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
p_j	11	10	10	9	9	9	4	2	1	1